$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 u = \lambda u \longrightarrow \det(\lambda - M_1) = 0$$

$u \neq 0$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \lambda & +1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda^2 = -1 \qquad \lambda = \pm i$$

$C_{M_1}(\lambda) = 0 \longleftarrow$ ممکن است معادله‌ی ویژه‌-مقدارها

جواب‌های ناحقیقی داشته باشد.

$$C_M(z) = \det(zI - M)$$

Apostol منبع: کتاب آپستل

$\lambda = \pm i \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M_1 u = \lambda u \qquad \begin{pmatrix} \lambda & +1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} u = 0 \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\lambda = -i \qquad \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} -ix + y = 0 \\ -x - iy = 0 \end{array}$

$\hookrightarrow \; y = ix \;\hookrightarrow\; -x - i(ix) = 0$

$\hookrightarrow \; -x + x = 0 \qquad 0 = 0$ درست

$\lambda = -i \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ ix \end{pmatrix} \qquad$ انتخاب : $x = 1 \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda = i \qquad \begin{pmatrix} i & +1 \\ -1 & i \end{pmatrix} u = 0 \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$ix + y = 0 \longrightarrow y = -ix$

$-x + iy = 0 \qquad -x + i(-ix) = 0 = -x + x \checkmark$

درست

$\lambda = i \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ -ix \end{pmatrix} \qquad$ انتخاب $\quad x = 1 \qquad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -i \qquad \lambda_2 = i$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

u_1 و u_2 خطی مستقل‌اند؟

$$\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0$$

$$0 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ i\alpha - i\beta \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

u_1 و u_2 خطی مستقل هستند.

قضیه: اگر u و v ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقدارهای متمایز باشند، u و v حتماً خطی مستقل‌اند.

اثبات:

$$Mu = \lambda u \qquad u \neq 0 \neq v$$

$$Mv = \mu v \qquad \lambda \neq \mu$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \qquad M\times : \quad M(\alpha u + \beta v) = 0$$

ضرب M

$$\Rightarrow \alpha M u + \beta M v = 0 \Longrightarrow \alpha \lambda u + \beta \mu v = 0$$

$\alpha u+\beta v=0 \qquad \times\mu \qquad \longrightarrow \qquad \alpha\mu u+\beta\mu v=0$

$\alpha\lambda u+\beta\mu v=0$

تفاضل معادلات : $\qquad \alpha\mu u-\alpha\lambda u=0$

$\Rightarrow \alpha(\mu-\lambda)u=0 \qquad u\neq 0 \Rightarrow$

$\alpha(\mu-\lambda)=0 \qquad \mu\neq\lambda \Rightarrow \alpha=0$

$\beta=0 \xLeftarrow{v\neq 0} \beta v=0$

پس : $\qquad \alpha u+\beta v=0 \Rightarrow \alpha=\beta=0$

یعنی u و v خطی مستقل اند.

شکل کلی‌تر قضیه: اگر $u_1, \dots, u_k$ ویژه‌بردارهای متناظر با ویژه‌مقدارهای $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ باشند

$i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

آنگاه $u_1, \dots, u_k$ خطی مستقل‌اند.

اثبات:

$$\underbrace{\overbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k}^{\text{عدد}}}_{\text{بردار}} = 0 \qquad M \times$$

$$M(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k) = 0 \xRightarrow{\text{خطی } M}$$

$$\alpha_1 M u_1 + \dots + \alpha_k M u_k = 0 \qquad \alpha_1 \lambda_1 u_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k u_k = 0$$

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k = 0 \quad \times \lambda_k$$

λ_iها و α_iها [illegible]

u_iها بردار

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \alpha_1 u_1 + \cdots + \lambda_k \alpha_k u_k = 0 \\ &\lambda_k \alpha_1 u_1 + \cdots + \lambda_k \alpha_k u_k = 0 \end{aligned}\right\} \text{تفاضل}$$

$$\overbrace{(\lambda_k - \lambda_1)\alpha_1}^{\tilde{\alpha}_1} u_1 + \cdots + \overbrace{(\lambda_k - \lambda_{k-1})\alpha_{k-1}}^{\tilde{\alpha}_{k-1}} u_{k-1} = 0$$

این یک ترکیب خطی از u_1 تا u_{k-1} است.

$$\tilde{\alpha}_1 u_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_{k-1} u_{k-1} = 0$$

$M \times$

$$\lambda_1 \tilde{\alpha}_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \tilde{\alpha}_{k-1} u_{k-1} = 0$$

$$\lambda_{k-1} \tilde{\alpha}_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \tilde{\alpha}_{k-1} u_{k-1} = 0 \qquad : \lambda_{k-1} \times$$

$$(\lambda_{k-1} - \lambda_1) \tilde{\alpha}_1 u_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_{k-2}) \tilde{\alpha}_{k-2} u_{k-2} = 0$$

$$\tilde{\alpha}_1 = (\lambda_k - \lambda_1) \alpha_1$$

$\times (\lambda_{k-2} - M)$ .... به همین ترتیب:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \cdots (\lambda_k - \lambda_1) \alpha_1 u_1 = 0$$

$$u_1 \neq 0 \Rightarrow (\lambda_2-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_1)\alpha_1 = 0$$

$$\lambda_2 \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_k \neq \lambda_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

به شکل مشابه، بقیه‌ی ضرایب هم صفر می‌شوند:

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

پس با استقرا ثابت کرد.

حکم، I_k: u_1 تا u_k ویژه‌بردار با ویژه‌مقدارهای متمایز

$\Rightarrow$ u_1 تا u_k خطی مستقل

روش اثبات با استقرا :

I_k برای $k=1$ ثابت شود:

$$\alpha_1 u_1 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = 0$$

درست است چون $u_1 \neq 0$ (u_1 ، غیر صفر بردار است)

درستی I_k برای $k=l$ فرض شود

درستی I_k برای $k=l+1$ ثابت شود.

ثابت کنید بردارهای u_1 تا u_{l+1} خطی مستقل‌اند.

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{l+1} u_{l+1} = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \cdots = \alpha_{l+1} = 0$$

$M\times$: $\quad \lambda_1 \alpha_1 u_1 + \cdots + \lambda_{l+1} \alpha_{l+1} u_{l+1} = 0$

$\lambda_{l+1}\times$: $\quad \lambda_{l+1} \alpha_1 u_1 + \cdots + \lambda_{l+1} \alpha_{l+1} u_{l+1} = 0$

تفاضل: $\quad (\lambda_{l+1} - \lambda_1)\alpha_1 u_1 + \cdots + (\lambda_{l+1} - \lambda_l)\alpha_l u_l = 0$

یک ترکیب خطی از u_1 تا u_l صفر شد.

فرض این بود که I_l درست است . یعنی $u_1, \dots, u_l$

خطی مستقل‌اند . $\Longleftarrow$

$$(\lambda_{l+1}-\lambda_1)\alpha_1 = \cdots = (\lambda_{l+1}-\lambda_l)\alpha_l = 0$$

$$\lambda_{l+1}-\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_{l+1}-\lambda_l \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_l = 0 \Longrightarrow$$

$$\alpha_{l+1} u_{l+1} = 0 \xRightarrow{u_{l+1} \neq 0} \alpha_{l+1} = 0$$

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l+1} = 0$$

پس u_1 تا u_{l+1} خطی مستقل اند. یعنی I_{l+1} درست است.

قضیه با استقرا ثابت شد.

ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقدارهای متمایز خطی مستقل اند.

برای M_1 ویژه مقدارها و ویژه بردارها به دست آمدند:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -i \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = i \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$M_1 \overset{?}{=} C D C^{-1} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ستون‌ها ویژه بردارها

روی قطرها ویژه مقدارها

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad C^{-1} \stackrel{?}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-i) \times 1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2i & -i & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1 \to 1 + \left(\frac{-i}{2}\right) \times 2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & -2i & -i & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to \left(\frac{i}{2}\right) \times 2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{array}\right) \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

آزمایش:

$$C\,C^{-1} \overset{?}{=} 1$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

$$C\,C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

آزمایش:

$$CDC^{-1} \stackrel{?}{=} M_1$$

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CDC^{-1} = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1$$

شکل قطری M_1: $D = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

پایه‌ای که M_1 در آن قطری می‌شود: $u_1 \to \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ و $u_2 \to \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

اگر ترتیب ویژه مقدارها عوض شد :

$$\tilde{\lambda}_1 = i \qquad \tilde{\lambda}_2 = -i \qquad \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \qquad \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \qquad \tilde{D} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -i/2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{C}\tilde{D}\tilde{C}^{-1} = M_1$$

لطفاً آزمایش کنید

ترتیب ویژه مقدارها و ویژه بردارها باید نگه دارید

$\lambda_1 = i \qquad \lambda_2 = -i \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

$M_1 u_1 = \lambda_2 u_1 \qquad D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$M_1 u_2 = \lambda_1 u_2 \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$

C عوض نشده، D تبدیل به $(-D)$

این ترتیب ویژه مقدارها و ویژه بردارها را نگه دارید

لطفاً آن را رعایت کنید $\quad CDC^{-1} \neq M_1 \quad (CDC^{-1} = -M_1)$

این که ترتیب، ویژه بردارها و ویژه مقدارها چه باشه مهم نیست

ولی مهم است که این ترتیبها با هم سازگار باشند.

مثال بعدی:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

معادله‌ی ویژه مقدارها:

$$0 = \det(\lambda - M_3) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = (\lambda-1)\det\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1)$$

$$\Rightarrow \lambda-1=0 \quad \text{یا} \quad \lambda^2-1=0$$

$$\lambda=1 \qquad\qquad \lambda=\pm 1$$

جواب:

$$\lambda = 1, 1, -1$$

M_3 یک ماتریس 3×3 است. برای قطری کردن آن 3 ویژه بردار لازم است.

$\lambda = -1$: $(\lambda - M_3)u = 0$ $0 \neq u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$-2x = 0 \longrightarrow x = 0$

$-y - z = 0 \longrightarrow z = -y$

$-y - z = 0 \longrightarrow$ تکراری

$u = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{pmatrix}$ (مثلاً) : $y = 1$ $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 1$ $0 = (\lambda - M_3)u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$0 = 0$ ✓

$y - z = 0 \longrightarrow z = y$

$-y + z = 0 \longrightarrow$ تکراری

تکراری

تنها شرط: $z = y$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

x, y دلخواه

فقط هر دو صفر نشوند.

یک انتخاب:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}$$

یک انتخاب دیگر.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} x=0 \\ y=1 \end{matrix}$$

خلاصه:

$\lambda_1 = -1 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_3 = 1 \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

u_1 و u_2, u_3 خطی مستقل اند.

u_2 و u_3 متناظر با ویژه مقدارهای یکسان اند.

قضیه مثلوث: اگر ویژه مقدارها متمایز باشند، ویژه بردارها خطی مستقل اند.

ویژه بردارها ممکن است خطی مستقل باشند یا نباشند

اگر ویژه مقدارها یکسان باشند، قضیه چیزی نمی‌گه:

بيّن أنّ u_1 و u_2, u_3 خطياً مستقلة. (الحلّ تُرك لكم)

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CDC^{-1} \overset{?}{=} M_3$$

$$C^{-1} = ? \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \longleftrightarrow 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to 3 + (1)1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[3 \to 3 + (-1/2)2]{1 \to 1 + (-1)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \to 1 + (-1/2)3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to (\frac{1}{2}) \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

پس C^{-1} درست

نیست: در محاسبه اشتباه شده.

$(C^{-1}$ سطر اول$) \times (C$ ستون دوم$) \neq 0$

C^{-1} باز محاسبه شود.

محاسبه C^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \leftrightarrow 2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to 3+(1)1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[1 \to 1+(-1)2]{3 \to 3+(-2)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \to 1+(-1/2)3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & +1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to (\frac{1}{2}) \times 3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ 1-1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CDC^{-1} \overset{?}{=} M_3 \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CDC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & -1/2+1/2 & 1/2+1/2 \\ 1-1 & 1/2+1/2 & -1/2+1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_3 \quad \checkmark$$

لطفاً اینها را آزمایش کنید:

$$\lambda_1=-1 \quad u_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \lambda_2=1 \quad u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \lambda_3=1 \quad u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

C و D را به دست آورید و نشان دهید $CDC^{-1}=M_3$

$$\lambda_1=1 \quad u_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \lambda_2=1 \quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \lambda_3=-1 \quad u_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

C و D را به دست آورید و نشان دهید $CDC^{-1}=M_3$

مثال بعدی:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ویژه مقدارها:

$$0 = \det(\lambda - M_2) = \det\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \qquad \lambda = 1,1$$

دو ویژه مقدار یکسان.

در مثال قبل متناظر با ویژه مقدار $\lambda = 1$ که دوگانه بود،
دو ویژه بردار خطی مستقل پیدا میشد.

ویژه بردارهای M_2 :

$$(\lambda - M_2)u = 0 = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -y = 0 \\ 0 = 0 \ \checkmark \end{matrix}$$

آزاد x

$$u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یعنی از یک ویژه بردار خطی مستقل پیدا میکنیم (۱)

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ ویژه بردار هستند (با ویژه مقدار یک)

این با هم خطی مستقل نیستند.

پس پایه‌ای نیست که شامل ویژه بردارها باشد.

M_2 قطری شدنی نیست.

سئوال: آیا هموارترین اطلس‌ها بر M قابل شمارش است؟

(یعنی یک پایه هست که اعضای آن در ٪۶ بردارهای M باشند؟)

جواب: نه لزوماً:

$C_M(z) = \det(zI - M)$ حالتی که رخ میدهد.

M یک ماتریس $n \times n$ است.

۱- ریشه‌های معادله‌ی $C_M(\lambda) = 0$ ساده باشند.

(M_1 ، مثلا)

در این حالت n ویژه مقدار متمایز هست، متناظر با هر ویژه مقدار یک ویژه بردار هست. ویژه بردارها خطی مستقل‌اند (چون متناظر با ویژه‌مقدارهای متمایزند) پس یک پایه می‌سازند. M در این پایه قطری است، پس قطری‌شدنی است.

$C_M(\lambda)=0$ حتماً n ریشه دارد: $C_M(\lambda)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n از λ است.

قضیه‌ی اساسی جبر: هر چندجمله‌ای درجه‌ی n درست n ریشه دارد.
(ریشه ممکن است تکراری یا ناحقیقی باشد.)

پس M قطری شدنی است

حالت دوم: بعضی از (یا همه‌ی) ریشه‌های معادله‌ی $C_M(\lambda)=0$ چندگانه‌اند، اما اگر از یک ریشه‌ی k-گانه باشد، k ویژه‌بردار متناظر با آن هستند که با هم خطی مستقل‌اند. (مثال، M_3)

در این صورت هم کلاً n ویژه‌بردار هست که با هم خطی مستقل‌اند. این ویژه‌بردارها پایه می‌سازند، و M در این پایه قطری است.

حالت سوم: بعضی از یا همه ی ریشه های
معادله ی $C_n(d)=0$ چندگانه اند، و دست کم برای
یکی از این ریشه ها (ویژه مقدارها) تعداد ویژه بردارهایی
که به طور خطی مستقل می‌شوند کمتر از چندگانگی ی ریشه است.
(مثال: M_2: $d=1$ دوگانه است. این دو ویژه بردار
(متناظر با $d=1$) که با هم خطی مستقل باشند پیدا نمی‌شود)

در این حالت کمتر از n ویژه بردار هست که باهم خطی مستقل باشند. پس ویژه بردارها پایه نمی‌سازند.

و M قطری شدنی نیست.