$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

مضربی از یک سطر به سطر دیگر اضافه شود
دترمینان عوض نمی‌شود

جای دو سطر با هم عوض شود، دترمینان در (-1)
ضرب می‌شود.

اگر یک سطر در یک عدد ضرب شود، دترمینان در آن عدد
ضرب می‌شود

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \to 3 + (-3)1]{2 \to 2 + (-2)1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} = M'$$

$$\det(M) = \det(M') = \det(M'')$$

$$M' \xrightarrow{3 \to 3 + (-2)2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M''$$

بسط $\det(M'')$ بر حسب ستون اول

$$\det(M'') = 1 \times \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M'''} + 0 + 0$$

$$\det(M''') = (-1) \times \det(0) + 0 \qquad \det(M) = 1 \times (-1) \times 0 = 0$$

وقتی ماتریس مثلثی باشد، دترمینان حاصلضرب عنصرهای قطری میشود.

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[3 \to 3+(-3)\times 1]{2 \to 2+(-2)\times 1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3 \to 3+(-2)\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N''$$

$$\det(N) = \det(N'') = 1 \times \det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) \times 1$$

$$\det(N) = -1$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \longleftrightarrow 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R'$$

$$\det(R) = -\det(R')$$

$$R' \xrightarrow{2 \to 2 + (-2) \times 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3 \to 3 + (1) 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\det(R') = \det(R'')$$

$$\det(R) = -\det(R'') = -\left[(1)(-1)(7)\right] = 7$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(R) = (-1)^{2+1} \times 2 \times \overbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}^{-2} + (-1)^{2+2} \times (-1) \times \overbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}^{-2}$$

$$+ (-1)^{2+3} \times 1 \times \underbrace{\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{-1} = 4 + 2 + 1 = 7$$

$M : V \to V$

اگر M چنان بود که

$e_1, \dots, e_n$

یک پایه برای V

μ_1 تا μ_n عدد

$$M\vec{e}_1 = \mu_1 e_1$$

$$M e_2 = \mu_2 e_2$$

$$\vdots$$

$$M e_n = \mu_n e_n$$

شکل ماتریسی M در این پایه

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} Me_1 & Me_2 & \cdots & Me_n \end{array}\right) \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mu_1 e_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_2 e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \quad \mu_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \ddots \; \mu_n \end{pmatrix}$$

صفر

صفر

ماتریس قطری است.

$$M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\qquad Me_1=e_1+3e_2$$

$$Me_2=2e_1+4e_2$$

آیا می‌توان پایه‌ی دیگری یافت، چنان که M در آن پایه قطری شود؟

$$Mf_1=\mu_1 f_1$$

f_1 و f_2 یک پایه‌ی دیگر

$$Mf_2=\mu_2 f_2$$

μ_1 و μ_2 عدد

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & 0\\ 0 & \mu_2\end{pmatrix}$$ ← اگر چنین بود، ماتریس M در پایه‌ی جدید

$$\overset{\text{عدد}}{\lambda}\qquad Mu = \lambda u \;\longrightarrow\; \text{بردار}$$

اگر $u = 0$ ، همه λ ها برقرار است.

$u \neq 0$: u : ویژه‌بردار

λ : ویژه‌مقدار

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad Me_1 = e_1 + 3e_2 \quad (Me_1) \nparallel e_1$$

e ویژگی

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u \neq 0$

$Mu = \lambda u$ — یک معادله برای ویژه بردار u و ویژه مقدار λ

ماتریس همانی

$\lambda u = \lambda 1 u$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda 1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$(M - \lambda 1) u = 0$ یا $(\lambda 1 - M) u = 0$

$(M - \lambda) u = 0$ یا $(\lambda - M) u = 0$

منظور این است که λ در ماتریس همانی ضرب شده.

$$\underbrace{(\lambda I - M)}_{A}\, u = 0 \qquad u \neq 0$$

$$A = \lambda I - M = \lambda 1 - M$$

$A u = 0 \qquad u \neq 0$ هسته‌ی A بدیهی نیست:

$\ker(A) \neq \{0\}$ شامل بردارهای ناصفر هست.

A (که مربع است) وارون‌پذیر نیست، چون هسته‌ی آن بدیهی نیست.

شرط این میشه که A وارون پذیر نباشه.

$$\Updownarrow$$

$$\det(A)=0$$

$Mu=\lambda u \qquad u\neq 0$ یک معادله برای بردار مجهول u و عدد λ

$\hookrightarrow \det(A)=0 \qquad \det(\lambda - M)=0$

یک معادله برای عدد λ

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \lambda - M = \lambda 1 - M = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(\lambda - M) = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-3)(-2)$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$$

$? = u$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \qquad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)x + 2y = 0$$

$$3x + (4-\lambda)y = 0$$

$$y = \frac{\lambda - 1}{2} x \longrightarrow 3x + \frac{(4-\lambda)(\lambda-1)}{2} x = 0$$

$$\Big[\underbrace{6 + (4-\alpha)(\alpha-1)}\Big]x = 0 \qquad \alpha = \alpha_1 \longrightarrow 0x = 0$$

$$6 + \left(4 - \frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(\frac{5-\sqrt{33}}{2} - 1\right)$$

$$= 6 - \left(\frac{5-\sqrt{33}}{2}\right)^2 + 5\,\frac{5-\sqrt{33}}{2} - 4$$

$$= 2 - \frac{25+33-10\sqrt{33}}{4} + \frac{25-5\sqrt{33}}{2}$$

$$= \frac{4 - 29 + 5\sqrt{33} + 25 - 5\sqrt{33}}{2} = 0$$

$$y = \frac{\lambda - 1}{2} x$$

x ن معين ميا نً

$$= \frac{\frac{5-\sqrt{33}}{2} - 1}{2} x = \frac{3-\sqrt{33}}{4} x$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3-\sqrt{33}}{4} x \end{pmatrix} \qquad x \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} u = x \begin{pmatrix} 1 + \frac{3-\sqrt{33}}{2} \\ 3 + 3 - \sqrt{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} \\ 6 - \sqrt{33} \end{pmatrix} x$$

$$\overbrace{\frac{5-\sqrt{33}}{2}}^{\lambda}\;\overbrace{\begin{pmatrix}1\\ \frac{3-\sqrt{33}}{4}\end{pmatrix}x}^{u} = \begin{pmatrix}\frac{5-\sqrt{33}}{2}\\ \frac{15+33-8\sqrt{33}}{8}\end{pmatrix}x$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{5-\sqrt{33}}{2}\\ 6-\sqrt{33}\end{pmatrix}x$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda=\lambda_1&=\frac{5-\sqrt{33}}{2}\\ u=u_1&=\begin{pmatrix}1\\ \frac{3-\sqrt{33}}{4}\end{pmatrix}x\end{aligned}\right\} \longrightarrow Mu_1=\lambda_1u_1$$

از جمله انتخاب ، $x=4$

$$\lambda_1 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$$

$$M u_1 = \lambda_1 u_1$$

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+\sqrt{33}}{4} \end{pmatrix} x$$

انتخاب $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix}$

$$M u_2 = \lambda_2 u_2$$

$$M u_1 = \alpha_1 u_1 \qquad u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 - \sqrt{33} \end{pmatrix}$$

$$M u_2 = \alpha_2 u_2 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 + \sqrt{33} \end{pmatrix}$$

u_1 , u_2 خطياً مستقلين

إذا $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} 4(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 3(\alpha_1 + \alpha_2) + \sqrt{33}(\alpha_2 - \alpha_1) \end{matrix}\right\} = 0 \begin{matrix} \longrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \longrightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \end{matrix} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

هر ترکیب خطی از u_1 و u_2 که صفر باشد، ضرایب باید صفر باشند. پس u_1 و u_2 خطی مستقل اند.

تعداد بردارها هم کافی است (2، که بعد فضاست)

پس u_1 و u_2 را میشود پایه گرفت.

نمایش ماتریسی M در این پایه:

$$Mu_1=\lambda_1 u_1$$

$$Mu_2=\lambda_2 u_2$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$: e_2, e_1 [illegible]

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ $u_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$ $\quad$ $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$: u_2, u_1 [illegible]

$$M = \begin{pmatrix} \frac{5-\sqrt{33}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5+\sqrt{33}}{2} \end{pmatrix}$$

[illegible] e_2, e_1

؟ u_2, u_1

$e_1 = a u_1 + b u_2$ $\quad$ $e_2 = c u_1 + d u_2$ $\quad$ $e_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

ماتریس در پایه‌ی ویژه‌بردارها قطری است.

به این خاطر، قطری کردن ماتریس می‌گویند.

در پایه‌ی e_1, e_2:

ماتریس به پایه‌ها بستگی دارد.

$$Mu_1 = \lambda_1 u_1.$$

$$Mu_2 = \lambda_2 u_2$$

روابط مستقل از پایه

$$M \underbrace{\left(u_1 \,\vdots\, u_2 \right)}_{C} = \underbrace{\left(u_1 \,\vdots\, u_2 \right)}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{D}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \,\vdots\, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \,\vdots\, \lambda_2 u_2 \end{pmatrix}$$

$MC = CD$ — u_1 و u_2 خطی مستقل

ستون‌های C خطی مستقل‌اند ⇐ C وارون‌پذیر است

(ماتریس مربعی)

$M \underbrace{C C^{-1}}_{1} = C D C^{-1}$ — پرانتز لازم نیست،

$M = CDC^{-1}$. چون ضرب ماتریس‌ها شرکت‌پذیر است.

$$M = C D C^{-1}$$

نمایش ماتریس

در پایه e

نمایش ماتریس در پایه

u (ویژه بردارها)

هر ستون ویژه بردار

ترتیب ویژه مقدارها

(در D)

همان ترتیب

ویژه بردارها در C است

مثال بررسی شده برای یک ماتریس 2×2 بود.

حالت کلی یک ماتریس $n\times n$

عدد

$$Mu = \lambda u \qquad u \neq 0$$

ویژه بردار

ویژه مقدار

$$u \neq 0$$

$$(M-\lambda)u = 0$$

شرط وجود جواب

$(M-\lambda)$ وارون‌ناپذیر باشد.

یک معادله برای λ :

$$\det(M - \lambda) = 0$$

شرط لازم و کافی برای اینکه ($Mu = \lambda u$) جواب ناصفر برای u داشته باشه.

چه جور معادله‌ای است ؟

$$C_M(z) := \det(z - M) = \det(zI - M)$$

$$z - M = \begin{pmatrix} z - M_{11} & -M_{12} & \cdots & -M_{1n} \\ -M_{21} & z - M_{22} & \cdots & -M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -M_{n1} & -M_{n2} & \cdots & z - M_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(z - M) = (z - M_{11}) \cdots (z - M_{nn}) +$$

ترم‌های دیگر.

$= z^n +$ z با توان‌های کمتر.

$C_M(z)$ یک چندجمله‌ای درجه‌ی n از z است.

معادله‌ای که ویژه مقدارها در آن صدق می‌کنند:

$C_M(\lambda)=0$ یک معادله‌ی درجه‌ی n برای λ

آیا هر ماتریسی قطری‌شدنی است؟

(به تعداد کافی ویژه‌بردار خطی مستقل دارد؟)

مثال:

لطفاً برای هر ماتریس
ویژه‌بردارها و
ویژه‌مقدارها را
حساب کنید.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$