در ریاضیات - حجم - حجم فیزیکی

یک بُعد: طول (حجم یک‌بُعدی)

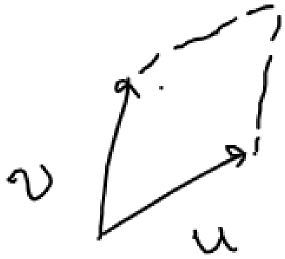
دو بُعد: مساحت (حجم دو بُعدی)

سه بُعد: حجم (حجم سه بُعدی)

n بُعد: حجم n بعدی

متوازی الاضلاع با ۲ بردار مشخص میشود:

S مساحت



$S(u, v) =$ عدد

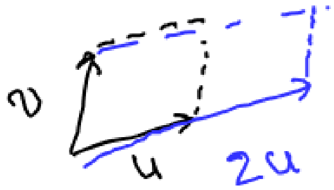
(عضی هیئت)

بردار

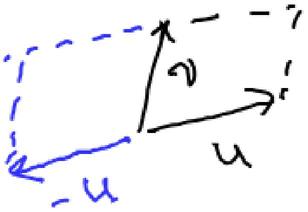
عدد

$S(\alpha u, v) = \alpha S(u, v) \qquad \alpha \geq 0$

$S(u, \alpha v) = \alpha S(u, v)$



$$S(2u, v) = 2\,S(u, v)$$



$$S(-u, v) = S(u, v)$$

$$S(\alpha u, v) = |\alpha|\, S(u, v)$$

$$S(u, \alpha v) = |\alpha|\, S(u, v)$$

حقيقي α

$$u = u_1 + u_2$$

$$S(u, v) = S(u_1, v) + S(u_2, v)$$

h : v ارتفاع متوازي الاضلاع بر

$$h = h_1 + h_2$$

$$S(u_1, v) = S(u, v) + S(u_2, v)$$

$$h_1 = h + h_2$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$S(u, v) = S(u_1, v) - S(u_2, v)$$

$$S(u_1+u_2, v) = |S(u_1, v) \pm S(u_2, v)|$$

$$S(\alpha u, v) = |\alpha|\, S(u, v)$$

اگر:

$$S(\alpha u, v) = \alpha\, S(u, v)$$

$$S(u_1+u_2, v) = S(u_1, v) + S(u_2, v)$$

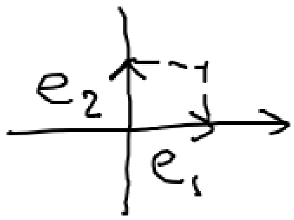
S نسبت به متغیر اول خطی است

(به شکل مشابه، نسبت به متغیر دوم هم خطی است)

اما در واقع چنین نیست.

مساحت جبری به جای مساحت

$$\begin{array}{ccc} S & & \varepsilon \end{array}$$



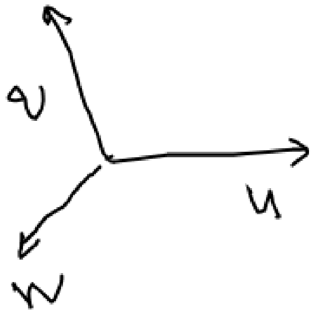
$$S(e_1, e_2) = 1$$

$$\varepsilon(e_1, e_2) = 1$$

$$S(e_2, e_1) = 1$$

$$\varepsilon(e_2, e_1) = -1$$

تعریف



زاویه کوچکتر:

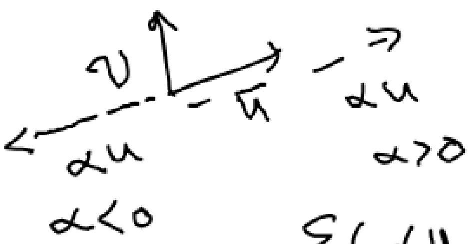
$\varepsilon(u, v) > 0$ — u به v مثلثاتی

$\varepsilon(u, w) < 0$ — u به w پادمثلثاتی

$$\boxed{S(u,v) = |\varepsilon(u,v)|}$$ زاویه ی u به v مثبت

$\varepsilon(u,v) > 0 \qquad S(u,v) = \varepsilon(u,v)$

$\alpha > 0$: زاویه ی (αu) به v مثبت



$$\varepsilon(\alpha u, v) > 0$$

$$\varepsilon(\alpha u, v) = S(\alpha u, v) = \alpha S(u,v) = \alpha \varepsilon(u,v)$$

$$\varepsilon(\alpha u, v) = \alpha \varepsilon(u,v) \Longleftarrow$$

$\alpha < 0$ زاویه ی (αu) به v منفی $\quad \varepsilon(\alpha u, v) < 0 \quad \varepsilon(\alpha u, v) = -S(\alpha u, v)$

$$= -\left[|\alpha| S(u,v)\right]$$

$$= -(-\alpha)\, \varepsilon(u,v)$$

$$\varepsilon(\alpha u, v) = \alpha \varepsilon(u,v) \Longleftarrow$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow S(\alpha u, v) = 0 = \varepsilon(\alpha u, v)$$

پس اگر زاویه‌ی u به v مثبت باشد،

$$\forall \alpha : \quad \varepsilon(\alpha u, v) = \alpha . \varepsilon(u, v)$$

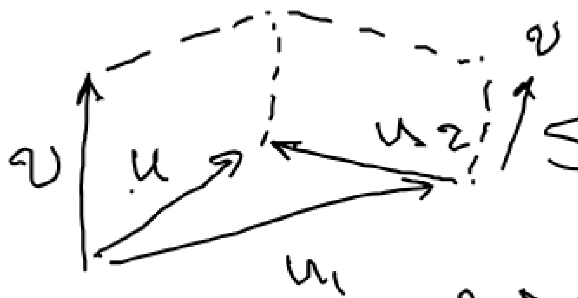
به شکل مشابه، اگر زاویه‌ی u به v منفی باشد هم

$$\forall \alpha : \quad \varepsilon(\alpha u, v) = \alpha \, \varepsilon(u, v)$$

$\forall \alpha$ عدد ، $\forall (u, v)$ بردار

$$\varepsilon(\alpha u, v) = \alpha \, \varepsilon(u, v)$$

$$\varepsilon(u, \alpha v) = \alpha \, \varepsilon(u, v)$$



$u = u_1 + u_2$

$S(u,v) = S(u_1,v) - S(u_2,v)$

زاویه‌ی u_1 با v ، u با v مثبت است

زاویه‌ی u_2 با v منفی است

$\varepsilon(u,v) > 0$

$\varepsilon(u_1,v) > 0$

$\varepsilon(u_2,v) < 0$

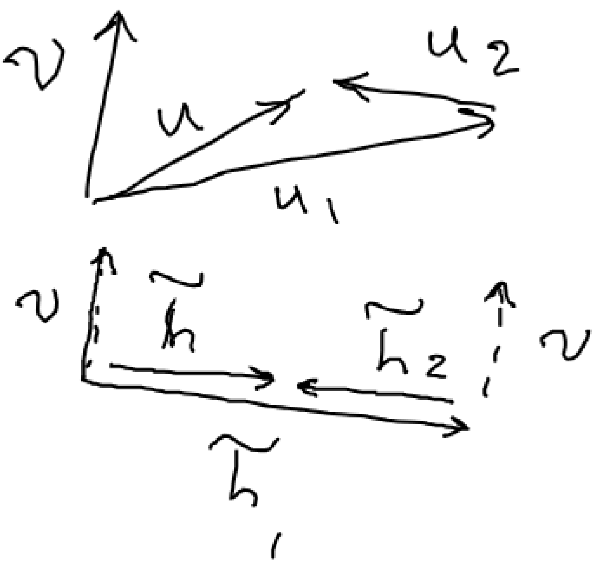
$\varepsilon(u,v) = \varepsilon(u_1,v) + \varepsilon(u_2,v)$

$\varepsilon(u_1+u_2,v) = \varepsilon(u_1,v) + \varepsilon(u_2,v)$

محاسبه‌ی مساحت جبری با ارتفاع جبری $(\tilde{h})$

به جای ارتفاع h

$\tilde{h} = \pm h$ → ارتفاع



$\tilde{h}_2 < 0$

$\tilde{h}_1 , \tilde{h} > 0$

مستقل از شکل : $u = u_1 + u_2 \Rightarrow \tilde{h} = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2$

$\forall\, u_1, u_2, v \qquad \mathcal{E}(u_1+u_2, v) = \mathcal{E}(u_1, v) + \mathcal{E}(u_2, v)$

$\forall\, u, v_1, v_2 \qquad \mathcal{E}(u, v_1+v_2) = \mathcal{E}(u, v_1) + \mathcal{E}(u, v_2)$

$\mathcal{E}(\alpha u, v) = \alpha\, \mathcal{E}(u, v)$

$\mathcal{E}(u, \alpha v) = \alpha\, \mathcal{E}(u, v)$

$\mathcal{E}(u,v)$ نسبت به u خطی است.

$\mathcal{E}(u,v)$ نسبت به v خطی است.

ε (انهتجیری)

V هیک

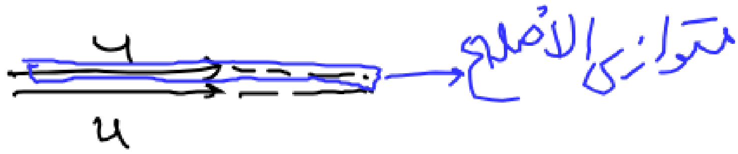
$\varepsilon: V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$

$\varepsilon(u,v)$ نسبت به u خطی است، نسبت به v خطی است

ε دوخطی است.

(نسبت به بردار اول خطی است، نسبت به بردار دوم خطی است)

$\varepsilon(u,u)=0$



دو بردار u, v

$$\varepsilon(u+v, u+v) = 0$$

خطی بودن نسبت به دومی

$$= \varepsilon(u+v, u) + \varepsilon(u+v, v)$$

$$= \varepsilon(u, u) + \varepsilon(v, u) + \varepsilon(u, v) + \varepsilon(v, v)$$

خطی بودن نسبت به اولی

$$\varepsilon(u, u) = 0 = \varepsilon(v, v) \implies$$

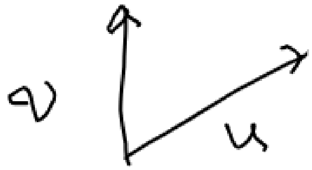
$$\varepsilon(v, u) + \varepsilon(u, v) = 0$$

$$\varepsilon(v, u) = -\varepsilon(u, v)$$

ε پادمتقارن است.

برای $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ → عددهای حقیقی

زاویه‌ی v به u قرینه‌ی زاویه‌ی u به v است.



$$\varepsilon(u,v)>0 \Rightarrow \varepsilon(v,u)<0$$

$$\varepsilon(u,v)<0 \Rightarrow \varepsilon(v,u)>0.$$

$$|\varepsilon(v,u)|=|\varepsilon(u,v)|$$

$$\Rightarrow \varepsilon(v,u)=-\varepsilon(u,v)$$

این نتیجه‌ی آخر مستقل از این است که $\mathbb{R}$ باشد،

برای هیئت‌های دیگر هم درست است.

در اثبات، صفحه‌ی پیشین، فقط خطی بودن و $[\forall u: \varepsilon(u,u)=0]$ به کار رفت

ε ۲ خطی ست ، $\forall u: \; \varepsilon(u,u)=0$

ب

ε ۲ خطی ست ، $\forall u,v: \; \varepsilon(v,u) = -\varepsilon(u,v)$

$$\varepsilon(u,u) = -\varepsilon(u,u) \Longrightarrow 2\varepsilon(u,u)=0$$

$2 \neq 0$ ، چون $\varepsilon(u,u)=0$

e_1, e_2 یک پایه برای V

بردار

$\varepsilon(u,v)$ [illegible]

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$

$v = v_1 e_1 + v_2 e_2$

[illegible] [illegible]

$$\varepsilon(u,v) = \varepsilon(u, v_1 e_1 + v_2 e_2)$$

$$= v_1 \varepsilon(u, e_1) + v_2 \varepsilon(u, e_2)$$

$$= v_1 \varepsilon(u_1 e_1 + u_2 e_2, e_1) + v_2 \varepsilon(u_1 e_1 + u_2 e_2, e_2)$$

$$= u_1 v_1 \underbrace{\varepsilon(e_1, e_1)}_{=0} + u_2 e_1 \varepsilon(e_2, e_1) + u_1 v_2 \varepsilon(e_1, e_2)$$

$$+ u_2 v_2 \underbrace{\varepsilon(e_2, e_2)}_{=0}$$

$$\varepsilon(e_2, e_1) = -\varepsilon(e_1, e_2)$$

$$\varepsilon(u,v) = [\varepsilon(e_1, e_2)](u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

با داشتن $\varepsilon(e_1,e_2)$ ، $\varepsilon(u,v)$ برای هر u و v معلوم میشود.

اگر ε و $\tilde{\varepsilon}$ ۲ صورت جبری باشند، آنگاه ε و $\tilde{\varepsilon}$ با هم متناسب‌اند (یکی از آنها برابر است با یک عدد ضرب در دیگری):

$$= \frac{\varepsilon(u,v)}{\varepsilon(e_1,e_2)}$$

اثبات: گیریم $\varepsilon(e_1,e_2)=0 \Longrightarrow \varepsilon(u,v)=0$

$\varepsilon(u,v)=0 \quad \tilde{\varepsilon}(u,v)$ گیریم $\varepsilon(e_1,e_2)\neq 0$

$$\tilde{\varepsilon}(u,v) = [\tilde{\varepsilon}(e_1,e_2)]\boxed{(u_1v_2-u_2v_1)} = \frac{\tilde{\varepsilon}(e_1,e_2)}{\varepsilon(e_1,e_2)}\,\varepsilon(u,v)$$

اگر $\varepsilon(e_1,e_2)=0$ ، $\varepsilon = 0\,\tilde{\varepsilon}$

اگر $\varepsilon(e_1,e_2)\neq 0$ ، $\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}(e_1,e_2)}{\varepsilon(e_1,e_2)}\,\varepsilon$

عدد ثابت

اگر ε و $\tilde{\varepsilon}$ هر دو صفر باشند ، $\tilde{\varepsilon} = 0\,\varepsilon \,,\ \varepsilon = 0\,\tilde{\varepsilon}$

اگر ε و $\tilde{\varepsilon}$ هیچ یک صفر نباشند ،

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\tilde{\varepsilon}(e_1,e_2)}{\varepsilon(e_1,e_2)}\,\varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon(e_1,e_2)}{\tilde{\varepsilon}(e_1,e_2)}\,\tilde{\varepsilon}$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \underbrace{[\mathcal{E}(e_1,e_2)]}(u_1v_2 - u_2v_1)$$

انتخاب واحد : انتخاب

مساحت جبری ی متوازی الاضلاع با ضلعهای e_1, e_2.

$$u = u_1e_1 + u_2e_2 = \sum_{i=1}^{2} u_i e_i$$

$$\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}\left(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j\right)$$

$$= \sum_{i,j} u_i v_j \, \mathcal{E}(e_i, e_j) \qquad \mathcal{E}(e_i, e_j) =: \mathcal{E}_{ij}$$

$$\varepsilon(u,v)=\sum_{i,j}\varepsilon_{ij}\,u_i v_j$$

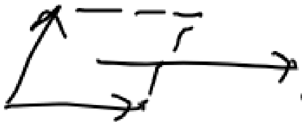
$\varepsilon_{ii}=0$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_{ii}=\varepsilon(e_i,e_i)$

$\varepsilon_{ji}=-\varepsilon_{ij}$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon_{ij}=\varepsilon(e_i,e_j)$

$\varepsilon_{11}=0$ $\qquad$ $\varepsilon(u,v)=\varepsilon_{12}(u_1v_2-u_2v_1)$

$\varepsilon_{22}=0$

$\varepsilon_{21}=-\varepsilon_{12}$ $\qquad$ e_2 $\qquad$ $\varepsilon_{12}=1$ $\qquad$ یک انتخاب :



e_1

مساحت جبری این متوازی الاضلاع یک است.

با این انتخاب ($\varepsilon_{12}=1$)

$$\varepsilon(u,v) = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

حالت سه بعدی:

حجم جبری (حجم سه‌بعدی جبری)

$$\varepsilon : V \times V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$$

$\varepsilon(u,v,w)$ نسبت به u خطی است، نسبت به v خطی است

نسبت به w خطی است: ε سه‌خطی است.

ε کاملاً پادمتقارن است.

یعنی

$$\mathcal{E}(v, u, w) = -\mathcal{E}(u, v, w)$$
$$\mathcal{E}(w, v, u) = -\mathcal{E}(u, v, w)$$
$$\mathcal{E}(u, w, v) = -\mathcal{E}(u, v, w)$$

e_3, e_2, e_1

یک پایه برای V

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i$$

بردار　　عدد　　بردار

$$v = \sum_i v_i e_i \qquad w = \sum_i w_i e_i$$

$$\mathcal{E}(u, v, w) = \mathcal{E}\left(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j, \sum_k w_k e_k\right)$$
$$= \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k \, \mathcal{E}(e_i, e_j, e_k)$$

$$\varepsilon(u,v)=\varepsilon\Big(\sum_i u_i e_i , \sum_j v_j e_j\Big)$$ ذلك :

$$=\sum_{i,j} u_i v_j \varepsilon_{ij}$$ $\varepsilon_{ij}=\varepsilon(e_i , e_j)$

درس :

$$= \varepsilon_{11}u_1v_1+\varepsilon_{12}u_1v_2+\varepsilon_{21}u_2v_1+\varepsilon_{22}u_2v_2$$

$$\sum_{i,i} u_i v_i \varepsilon_{ii}=\varepsilon_{11}u_1v_1+\varepsilon_{22}u_2v_2$$ ودرس :

$$\varepsilon(u,v)=\varepsilon(u_1e_1+u_2e_2 , v_1e_1+v_2e_2)$$

$$=\varepsilon_{11}u_1v_1+\varepsilon_{12}u_1v_2+\varepsilon_{21}u_2v_1+\varepsilon_{22}u_2v_2$$

$$\varepsilon(u,v,w)=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,u_i v_j w_k$$

جلسه 27

غیرصفرها : $i\neq j\neq k\neq i$

پادتقارن $\varepsilon(e_i,e_i,e_k)=-\varepsilon(e_i,e_i,e_k)$

$2\cdot\varepsilon(e_i,e_i,e_k)=0,\ 2\neq0\Rightarrow\varepsilon(e_i,e_i,e_k)=0$

$\varepsilon_{iik}=0$

دو شاخص ε برابر باشند، ε صفر می‌شود.

تعداد جملات ناصفر:

3 انتخاب برای i

2 انتخاب برای j $(j\neq i)$

$$3\times 2\times 1$$

1 انتخاب برای k $(k\neq i, k\neq j)$

$$\varepsilon(u,v,w) = \varepsilon_{123}u_1v_2w_3 + \varepsilon_{132}u_1v_3w_2 + \varepsilon_{213}u_2v_1w_3 + \varepsilon_{231}u_2v_3w_1 + \varepsilon_{312}u_3v_1w_2 + \varepsilon_{321}u_3v_2w_1$$

$$\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{123} \qquad \varepsilon_{213} = -\varepsilon_{123} \qquad \varepsilon_{231} = -\varepsilon_{213} = \varepsilon_{123}$$

$$\varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = \varepsilon_{123} \qquad \varepsilon_{321} = -\varepsilon_{123}$$

$$\varepsilon(u,v,w) = \varepsilon_{123}\left(u_1v_2w_3 - u_1v_3w_2 - u_2v_1w_3 + u_2v_3w_1 + u_3v_1w_2 - u_3v_2w_1\right)$$

$+$: $(i\ j\ k)$ یک جایگشت زوج از $(1\ 2\ 3)$

$-$: $(i\ j\ k)$ یک جایگشت فرد از $(1\ 2\ 3)$

با n بار جابه جا کردن جفت شاخص $(1\ 2\ 3)$
می‌شود

n فرد $\rightarrow -$

n زوج $\rightarrow +$

$\varepsilon(u,v,w)$ با معلوم کردن عدد ε_{123}، برای هر (u,v,w) معلوم است: به فقط مؤلفه‌های u و v و w بستگی دارد.

اگر ε و ε' حجم جبری (حجم سه‌بعدی جبری) باشند، ε و ε' با هم متناسب‌اند.

یک انتخاب: $\varepsilon_{123}=1$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{123} \begin{cases} 0, & \text{در صورتیکه دو شاخص برابر} \\ +1 & (i\,j\,k) \text{ یک جابجایی زوج از } (1\,2\,3) \\ -1, & (i\,j\,k) \text{ یک جابجایی فرد از } (1\,2\,3) \end{cases}$$

به طور کلی

با انتخاب $\varepsilon_{123} = 1$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{در صورتیکه دو شاخص برابر} \\ +1, & (i\,j\,k) \text{ یک جابجایی زوج از } (1\,2\,3) \\ -1, & (i\,j\,k) \text{ یک جابجایی فرد از } (1\,2\,3) \end{cases}$$