جبر خطی

فضای برداری (خطی)

گسترش (ایجاد کردن)

بردار

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$u+v = \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} \qquad \alpha u = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix}$$

[illegible]

مجموعه ی عددها: هیئت یا میدان

$\mathbb{F}, +, \times \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$

$\mathbb{F}$ نسبت به جمع (+) بسته است $\qquad (\alpha+\beta) \in \mathbb{F}$

+ شرکت پذیر است $\qquad \alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$

وجود خنثای جمع $\qquad \exists\, 0 \in \mathbb{F}: \quad 0+\alpha = \alpha+0 = \alpha$

وجود وارون جمعی $\qquad \forall \alpha: \exists\, (-\alpha) \in \mathbb{F}: \quad \alpha+(-\alpha) = (-\alpha)+\alpha = 0$

+ جابجایی است $\qquad \beta+\alpha = \alpha+\beta$

مجموعه ی عددهای طبیعی (صحیح مثبت) ، $\mathbb{N}$

بسته ، شرکت پذیر ، جابه جایی

خنثای جمع ، وارون جمعی ندارد.

$(\mathbb{N}, +, \times)$ هیئت نیست.

صحیح نامنفی

$\uparrow$

$\{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow$ خنثای جمع هست

وارون جمعی ندارد.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ عددهای صحیح

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$

$\alpha \times \beta \in \mathbb{F}$ — بسته بودن ×

$\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$ — شرکت پذیری ×

$\exists 1 \in \mathbb{F}: \; 1 \times \alpha = \alpha \times 1 = \alpha$ — وجود خنثای ضرب:

$\forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{F}: \; \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{F}: \; \alpha \times \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \times \alpha = 1$ — وجود وارون ضربی

$\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$ — جابجایی بودن ضرب

$\alpha \times (\beta + \gamma) = (\alpha \times \beta) + (\alpha \times \gamma)$ — پخشی

$\frac{m}{n}$ مجموعه‌ی عددهای گویای مثبت

گویا m و n صحیح و $n \neq 0$

برای گویای مثبت $m, n > 0$

$$\frac{m_1}{n_1} \times \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 \times m_2}{n_1 \times n_2}$$

همه‌ی ویژگیهای ضرب هست.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{m}$$

وارون

خنثی $1 = \frac{1}{1}$

خنثی جمع و وارون جمعی را ندارد

مجموعه‌ی عددهای گویای مثبت (یا گویای نامنفی)
با + و × ، معمول ، هیئت نیست

$\mathbb{Z}$ با + و × ، معمول: هیئت نیست.

$\mathbb{N}$ ، + ، ×
جمع و ضرب ، معمول

وارون ضربی ندارد

هیئت نیست:
وارون جمع و وارون ضرب ، خنثای جمع ندارد
$\mathbb{N}\cup\{0\}$: خنثای جمع هست. وارون‌ها را ندارد.

$\mathbb{Q}$ (مجموعه‌ی عددهای گویا)

کوچکترین مجموعه‌ی شامل $\mathbb{N}$ (مجموعه‌ی عددهای طبیعی) است، که $(\mathbb{Q}, +, \times)$ هیئت است.

در این درس بیشتر با هیئت $\mathbb{R}$ (عددهای حقیقی) و $\mathbb{C}$ (عددهای مختلط) کار داریم.

فضای برداری (خطی):

هیئت $\mathbb{F}$ (مجموعه‌ی عددها)

$$(\mathbb{F}, +, \times) \longrightarrow \mathbb{F}$$

مجموعه‌ی $\mathbb{V}$ (مجموعه‌ی بردارها)

$+'$ و $\times'$

با یک دسته ویژگی

یک فضای برداری (خطی) $(\mathbb{V}, \mathbb{F}, +', \times')$

ساده‌تر: $\mathbb{V}$ یک فضای خطی (برداری) است.

$u, v, w \in \mathbb{V}$

بسته بودن نسبت به $+'$ $\qquad u +' v \in \mathbb{V}$

شرکت‌پذیری $\qquad u +' (v +' w) = (u +' v) +' w$

خنثای جمع $\qquad 0' \in \mathbb{V} \quad 0' +' u = u +' 0' = u$

$\forall u \in \mathbb{V}: \; \exists (-'u) \in \mathbb{V}: \quad u +' (-'u) = (-'u) +' u = 0'$

وارون جمعی

جابجایی $\qquad u +' v = v +' u$

مثال: مجموعه‌ی ستون‌های n-تایی $\mathbb{F}^n$

که هر عنصر ستون در $\mathbb{F}$ است.

$u \in \mathbb{F}^n \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad u_1, \dots, u_n \in \mathbb{F}$

ضرب دکارتی

$$\mathbb{F} \times \mathbb{F} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{F},\ y \in \mathbb{F}\}$$

$$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in \mathbb{F}, \dots, x_n \in \mathbb{F}\}$$

تعریف $+'$

$$u +' v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$$

$u\in\mathbb{F}^n \quad v\in\mathbb{F}^n \qquad u_i\in\mathbb{F} \quad v_i\in\mathbb{F}$

$\alpha\in\mathbb{F} \quad u\in\mathbb{F}^n \qquad \alpha+u$

$\alpha+'u$

$\mathbb{V}$ مجموعه‌ی بردارها ، $\mathbb{F}$ هیئت — (مجموعه‌ی عددها)

$+$ برای عددها ، $+'$ برای بردارها

جمع عدد و بردار تعریف نشده

$u, v, w \in V$

$\alpha, \beta, \gamma \in F$

$\times'$: بین یک عدد و یک بردار:

$\alpha \in F \ , \ u \in V$

$(\alpha \times' u) \in V$

$\underbrace{\alpha \ u \ v}$ ✗ — بین u , v ضرب تعریف نشده

$\underbrace{u \ v \ w}$ ✗

$\alpha \times' \underbrace{(\beta \times' u)}_{\text{بردار}} = \underbrace{(\alpha \times \beta)}_{\text{عدد}} \times' u$ — شرکت پذیری

بردار $1 \times' u = u \longrightarrow$ خنثی

$\alpha \times' 1 = \alpha$ ✗ $\quad u \times' 1$? / $u \times' \alpha = \alpha \times' u$ میشود قرارداد کرد

$$\underbrace{\alpha x' u}_{\text{بردار}} = \underbrace{1}_{\text{عدد}} \quad \times \qquad \text{وارون}$$

برای x' وارون وجود ندارد.

$\alpha \neq 0$

$$\alpha^{-1} x' u = \frac{u}{\alpha} \qquad u \to \text{بردار}, \quad \alpha \to \text{عدد}$$

u, v بردار

$$\frac{\overset{\text{بردار}}{u}}{\underset{\text{بردار}}{v}} \times \qquad \text{تعریف نشده} \qquad \frac{\overset{\text{عدد}}{\alpha}}{\underset{\text{بردار}}{v}} \times$$

$$0 \times' (0 +' 0) \qquad \alpha \times' (u +' v) = (\alpha \times' u) +' (\alpha \times' v)$$

$$(0 + 0) \times' 0 \qquad (\alpha + \beta) \times' u = (\alpha \times' u) +' (\beta \times' u)$$

۵. پخشی (دو ویژگی)

برای ستونها (بردار)

$$\alpha \times' \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \times u_1 \\ \vdots \\ \alpha \times u_n \end{pmatrix}$$

علامت ′ از $+'$ و $\times'$ و $0'$ برمیدارم

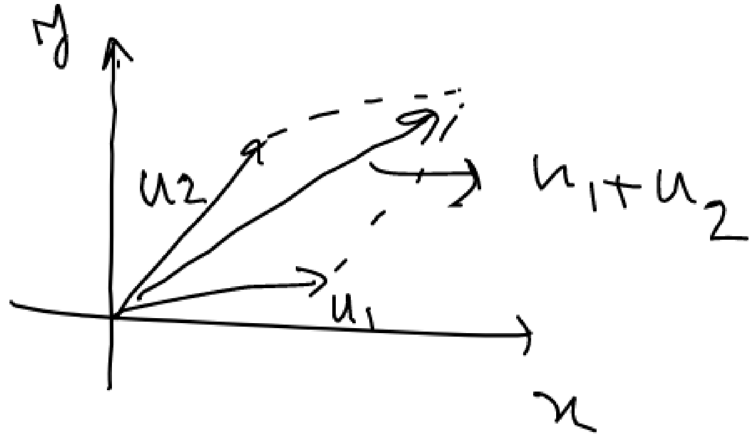
$\times$ یا $\times'$ را نمی‌نویسم

$$\alpha u \leftarrow \alpha \times' u$$

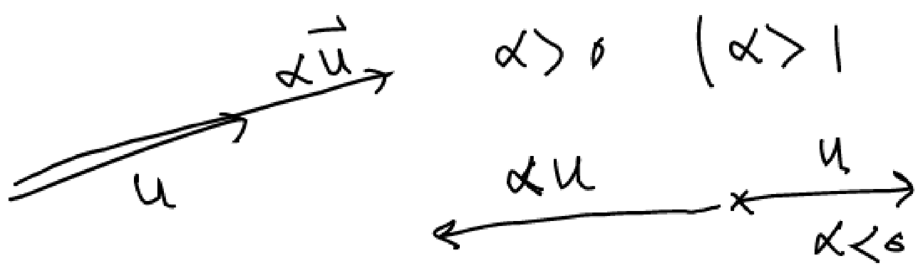
$$\alpha \beta \leftarrow \alpha \times \beta$$

$$0 + u \leftarrow 0' +' u$$

$$\overset{u_1}{\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}} + \overset{u_2}{\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix}$$



$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$$



یک ترکیب خطی از u و v

$$\overbrace{\alpha u + \beta v}^{\text{بردار}}$$

عدد

$$0u + 0v = 0$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0$$

مثال:

$$u=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\alpha u+\beta v=0=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha u=\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \qquad \beta v=\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\\alpha+2\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}\alpha+\beta&=0\\\alpha+2\beta&=0\end{aligned}$$

تفاضل $\beta=0 \rightarrow \alpha=0$

$$\alpha u+\beta v=0 \Longrightarrow \alpha=0,\ \beta=0$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} \alpha + \beta\gamma \\ \alpha + \beta\gamma \end{pmatrix}$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \quad : \quad \begin{matrix} \alpha + \beta\gamma = 0 \\ \alpha + \beta\gamma = 0 \end{matrix}$$

$$\alpha = -\gamma\beta \qquad (\alpha, \beta) = (-\gamma\beta, \beta)$$

$$\alpha u + \beta v = 0 \not\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

$$\overbrace{\alpha_{(1)}}^{\text{عدد}} u_{(1)} + \cdots + \overbrace{\alpha_{(n)}}^{} u_{(n)} = 0 \Rightarrow \alpha_{(1)} = \cdots = \alpha_{(n)} = 0$$

$u_{(1)}$ تا $u_{(n)}$ بردار n

$u_{(1)}$ تا $u_{(n)}$ خطی مستقل اند (مستقل خطی‌اند)

$$\not\Downarrow$$

$$\alpha_{(1)} = \cdots = \alpha_{(n)} = 0$$

خطی وابسته اند (وابسته خطی‌اند)

u , v خطي واليه :

$$\alpha u + \beta v = 0 \not\Rightarrow (\alpha, \beta) = (0, 0)$$

يعني $\exists (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

$$\alpha u + \beta v = 0$$

مثلاً $\beta \neq 0$

$$\beta^{-1} \alpha u + v = 0 \Rightarrow v = \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) u$$

v مضاعف لـ u .

او $\alpha \neq 0$ $u = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) v$ u مضاعف لـ v u , v خطی وابسته $\Leftarrow$ u و v همراستا

برعکس: اگر u و v همراستا باشند،

فرض: $u \neq 0$ داریم

$$v = \gamma u \Rightarrow \gamma u + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v = 0$$

$\Downarrow$

u , v خطی وابسته

u , v خطی وابسته $\Leftarrow$ u , v همراستا

---

u , v خطی وابسته $\Leftrightarrow$ u , v همراستا (u , v بر یک خط اند)

$\{\alpha u\}$

مجموعه‌ی ترکیب خطی‌های u
یک خط است $(u \neq 0)$

مجموعه‌ی ترکیب خطی‌های v, u (v, u مستقل خطی)

$w = u' + v'$

$u' = \alpha u$ $\quad w = \alpha u + \beta v$

$v' = \beta v$

مجموعه‌ی ترکیب خطی‌های v, u (v, u مستقل خطی) یک صفحه است

u, v, w خطی والبته مثلن

$\exists\ (\alpha, \beta, \gamma) \quad \gamma \neq 0$

$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$

$$w = \left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right) u + \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right) v$$

w در صفحه‌ی شامل u و v است.

یک صفحه هست که شامل u, v, w است.

در یک خط بیش از یک بردار خطی مستقل نیست

در یک صفحه بیش از دو بردار خطی مستقل نیست

گیریم در فضای برداری V

هر مجموعه‌ی با بیش از n بردار خطی وابسته است.

می‌گوییم بُعد فضای V برابر با n است.