XB-002

هندسه

محمد خرمی

XB-002 (2016/08/20)

هندسه

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

کاربرد، چاپ، و انتشارِ این متن برا یِ منظورها یِ غیر-ِ-تجاری آزاد است، به شرط ی که هیچ تغییر ی در آن (از جمله در متن، سبک، و رسم‌الخط) داده نشود. برا یِ هر نُع استفاده یِ دیگر ی، اجازه یِ نویسنده لازم است.

فهرست

فهرست ۳

0 مقدمه ۸

دفاع ۸

0 نمادگذاری ۱۰

1 خمینه ۲۰

1 تعریف ِ خمینه ۲۰

2 حاصل- ِ -ضرب ِ دِکَرتی یِ خمینِها ۲۶

3 خمینه یِ فشرده ۳۱

4 خمینه یِ سمتپذیر ۳۲

5 مشتقپذیری یِ تابع ۳۴

6 پارش ِ یک ۳۸

7 کلاف ۴۱

8 کلاف ِ برداری ۵۲
9 فضا یِ مماس در یک نقطه ۵۹
10 مشتق ِ تابع ۶۵
11 مشتق ِ سویی ۷۹
12 فضا یِ تانسرها در یک نقطه ۸۱
13 پایه یِ مختصاتی ۸۲

2 میدان ۸۹

14 فضا یِ تانسرها ۸۹
15 میدان ِ تانسری ۹۹
16 پیشران، پَسار ۱۰۴
17 شارش ِ یک میدان ِ برداری ۱۰۷
18 خم ِ مستقل-از-پارامتر ۱۱۲
19 مشتق ِ لی ۱۱۷
20 جابِجاگر ِ دُ میدان ِ برداری ۱۳۰
21 میدان-پایه ۱۳۴
22 قضیه یِ فْرُبِنیوس I ۱۳۸
23 جبر ِ عملگرها I ۱۴۶

3 جبر ِ برونی ۱۴۸

24 جایگشت، ضرب ِ برونی ۱۴۸
25 کاهش ِ درونی ۱۴۹
26 مشتق ِ برونی ۱۵۵

27 جبرِ عملگرها II ۱۵۸
28 قضیه یِ فُرُبِنیوس II ۱۶۶
29 انتگرالگیری ۱۷۳
30 عنصر-ِ-حجم ۱۷۷
31 توده و چگالی ۱۸۳
32 مساحت ۱۹۰
33 دیورژانسِ یک میدانِ برداری ۱۹۵
34 قضیه یِ سْتُکس ۲۰۰
4 مشتقِ هموردا ۲۰۷
35 افکنشِ قائم ۲۰۷
36 هموستار ۲۰۹
37 مشتقِ هموردا ۲۲۱
38 هموستارها یِ القاییده ۲۲۵
39 هموستارِ آفین ۲۴۵
40 خمش ۲۶۴
41 اتحادِ بیانکی ۲۷۶
42 مشتقِ هموردا یِ یک خم ۲۸۱
43 انتقالِ افقی ۲۸۵
44 بالا-برده یِ یک میدانِ برداری ۲۹۴
45 هُلُنُمی ۲۹۶
46 تختیت، بدیهیت ۳۰۸
5 مشتقِ هموردا و میدانها یِ تانسری ۳۱۵

47 هموستار و میدانها یِ تانسری ۳۱۵
48 انتقال ِ موازی ۳۳۲
49 انتقال- ِ-موازی یِ خمها ۳۳۸
50 ژنُدزیک ۳۴۲
51 پیچش ۳۴۸
52 خمش ِ خمینه ۳۶۵
53 اتحاد ِ اول ِ بیانکی ۳۷۷
54 تانسر ِ ریچی ۳۸۵
6 خمینه یِ دُ-فرمدار ۳۸۹
55 میدان- ِ-دُ-فرم ِ ناتکین ۳۸۹
56 گرادیان ِ یک میدان ِ اسکالر ۴۰۲
57 حجم ِ سازگار با دُ-فرم ۴۰۴
58 دُگانی یِ هاج ۴۱۰
59 همضرب ِ برونی ۴۲۱
60 دُگانی یِ هاج، و دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری ۴۲۴
61 کرل ۴۲۵
62 دُ-فرم ِ درونی ۴۳۳
63 همکاهش ِ درونی ۴۳۶
64 هممشتق ِ برونی ۴۳۸
65 لَپلَسی ۴۵۰
66 سیلَپلَسی ۴۶۱
7 خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ۴۶۶

67 شبه- ِ -متریک ۴۶۶
68 هموستار ِ سازگار با شبه- ِ -متریک ۴۸۰
69 عملگرها یِ برداری یِ مشتق ۵۰۱
70 خمش ِ سازگار با شبه- ِ -متریک ۵۰۸
71 اسکالر ِ خمش و تانسر ِ اَینشتَین ۵۱۸
72 تغییر ِ همدیس ِ شبه- ِ -متریک ۵۲۱
73 تانسر ِ وَیل ۵۳۰
74 پیچش و خمش در بُعدها یِ کوچک ۵۳۴
75 درجه-یِ-آزادی ۵۴۶
76 طول و ژنُدزیک ۵۵۷

8 نقشِها یِ ویژه ۵۷۲

77 نقشه یِ دِکَرتی ۵۷۲
78 نقشه یِ گاؤسی-بهنجار ۵۹۰
79 نقشه یِ متعامد ۵۹۸
80 نقشه یِ همدیس-دِکَرتی ۶۱۳
81 رابطِها یِ مستقل-از-پایه بر اساس ِ نقشِها یِ ویژه ۶۱۶
82 خمش ِ لِوی-چیویتا و نقشه یِ شبه- ِ -متریک-دِکَرتی ۶۱۷
83 لَپلَسی و سیلَپلَسی در خمینه یِ شبه- ِ -ریمانی ۶۱۹

9 پیوست ۶۲۲

84 چند مرجع ۶۲۲
85 اسمها یِ خاص ۶۲۳
86 واژه-نامه یِ فارسی به انگلیسی ۶۲۵

0

مقدمه

دفاع

این کتاب برا یِ فیزیک- پیشِها یا آنها یی که قرار است فیزیک- پیشه شوند (یعنی دانشجوها یِ فیزیک) نوشته شده، هر چند از نظر ِ من اشکال ی ندارد که آدمها یِ دیگر ی (از جمله ریاضی- پیشِها) هم آن را بخانند. مبنا یِ نوشتن ِ این کتاب اینها ست.

a برا یِ آموختن ِ فیزیک، و برا یِ به- کار- بردن ِ فیزیک، ریاضیات لازم است. به نظر میرسد این فکر، دست- ِ- کم از زمان ِ نیوتُن به بعد برا یِ بعض یها جا افتاده است.

b بعض یها (از جمله من) تصور میکنند برا یِ آموختن ِ هر چیز ِ درسی یی خوب است (یا لازم است) پیشنیازها یِ آن چیز را دانست.

c بعض یها (از جمله من) تصور میکنند زبان ِ هندسه به فهمیدن ِ فیزیک و کار- کردن در آن کمک میکند. و البته کسان ی هم هستند که فکر میکنند این زبان مزاحم ِ فیزیک است. بعض یها (از جمله من) با فیزیک یا یی فیزیک از هندسه خُش ِشان میئاید. و البته بعض یها هم از هندسه متنفر َند. از این مُقعیت که اینجا من َم که دارم مینویسم استفاده میکنم و یاداوری میکنم که

حالا آنها یی که بردارها را در فیزیک به کار نمیبرند زیاد نیستند، و زبان ِ هندسه را شاید بشود گسترش ی از زبان ِ برداری دانست.

البته این فروکاستگرایی برا یِ خیل یها مطلوب نیست. (اینجا منظور از فروکاستگرایی این است که آموختن ِ هر چیز بر اساس ِ پیشنیاز ِ آن باشد، و مثلَن نسبیت- ِ-عام به هندسه-یِ-خمینه تبدیل نشود.)

d پیشنیاز ِ این کتاب، حسابان و البته جبر- ِ-خطی ست. جز این، خوب است خاننده معادلات ِ دیفرانسیل بداند، و البته آنالیز ِ ریاضی هم کمک میکند.

e این کتاب تمرین ندارد. برا یِ این نبود ِ تمرین میشود استدلالها یِ زیاد ی آورد (یا تراشید). خُد ِ این استدلال-آوردن (تراشیدن) را میشود نُع ی تمرین (البته نَ در هندسه) تلقی کرد. این کتاب تقریبَن مثال هم ندارد.

h شکل ِ این کتاب، بر خلاف ِ کتاب ِ جبر- ِ-خطی شکل ِ «قضیه-اثبات» نیست. نَ این که چیز ی اثبات نشده. سعی شده ادعاها اثبات شود، و جاها یی که اثبات ِ ادعا یی نیامده هم صریحَن گفته شده.

i در این کتاب شکل ی نیست. بعض یها این را به حساب ِ علاقه به لَگرانژ خاهند گذاشت، بعض یها هم به حساب ِ تنبلی. اینجا دیگر آن بهانه که «کشیدن ِ شکل ِ یک فضا یِ خطی یِ با بُعدها یِ متعدد کم ی سخت است» کار نمیکند.

j این کتاب در ادامه یِ کتاب ِ جبر- ِ-خطی نوشته شده. و جبر- ِ-خطی هم در وِبگاه ِ من در هم ین پوشه ای ست که این (هندسه) است.

از هر پیشنهاد ی استقبال میشود (نَ این که هر پیشنهاد ی پذیرفته میشود).

محمد خرمی 2016/08/20

0 نمادگذاری

همه یِ نمادها یی که در این کتاب به کار رفته استاندارد نیستند. خاندن ِ این بخش راه ِ مناسب ی برا یِ آموختن ِ مفهومها یِ متناظر با نمادها یِ معرفی-شده نیست. همه جا قرارداد- ِ-جمع ِ اَینشْتَین به کار رفته، یعنی

$$A^i{}_i = \sum_i A^i{}_i$$

$:=$	$a := b$ ← a بنا بر تعریف برابر است با b
$\forall$	برا یِ هر
$\exists$	وجود دارد
$\in$	$x \in \mathbb{S}$ ← x عضو ِ $\mathbb{S}$ است.
$\cup$	$\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$ ← اجتماع ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$
$\cap$	$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ ← اشتراک ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ با مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$
$\times$	$\mathbb{S}_1 \times \mathbb{S}_2$ ← حاصلِضرب ِ دِکَرتی یِ مجموعه یِ $\mathbb{S}_1$ در مجموعه یِ $\mathbb{S}_2$
$\subseteq$	$\mathbb{S}_1 \subseteq \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}_2$ است.
$\subset$	$\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}_2$ است و با $\mathbb{S}_2$ برابر نیست.
$\subseteq$	$\mathbb{S}_1 \supseteq \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ شامل ِ $\mathbb{S}_2$ است.
$\subset$	$\mathbb{S}_1 \supset \mathbb{S}_2$ ← $\mathbb{S}_1$ شامل ِ $\mathbb{S}_2$ است و با $\mathbb{S}_2$ برابر نیست.
$:$	چنین است که
$\mid$	چنان که
$\{\ \mid\ \}$	$\{a_{i,j,k} \mid i \in \mathbb{S}, j\}$ ← مجموعه یِ همه یِ $a_{i,j,k}$ ها با k یِ ثابت و (i,j) ها یی که $i \in \mathbb{S}$ و j در یک مجموعه یِ معلوم َند
$/$	$\mathbb{S}/\blacklozenge$ ← خارج- ِ-قسمت ِ $\mathbb{S}$ بر رابطه یِ همئرزی یِ $\blacklozenge$
eq	$\mathrm{eq}_\blacklozenge(z)$ ← رده یِ همئرزی یِ z با رابطه یِ همئرزی یِ $\blacklozenge$
res	$\mathrm{res}(f;\mathbb{S})$ ← تحدید ِ f به $\mathbb{S}$

$$\mathcal{O}^{\blacklozenge n} = \overbrace{\mathcal{O}\blacklozenge\cdots\blacklozenge\mathcal{O}}^{n}$$

$\overset{b}{\underset{i=a}{\blacklozenge}} \mathcal{O}_i = \mathcal{O}_a \blacklozenge \cdots \blacklozenge \mathcal{O}_b$

$\overset{}{\underset{i}{\blacklozenge}}$ ♦ برا یِ i ها یِ در یک مجموعه یِ معین

$\overset{\setminus j}{\underset{i}{\blacklozenge}}$ ♦ برا یِ i ها یِ در یک مجموعه یِ معین، جز j

dom دامنه یِ

img تصویر ِ

dim بُعد ِ

span پهنه یِ

ker هسته یِ

$\mathbf{1}_{\mathbb{D}}$ ← همانی یِ $\mathbb{D}$ $\mathbf{1}$

f^{-1} ← وارون ِ f $\cdot^{-1}$

$\blacklozenge^*$ ← دُگان ِ ♦ $*$

f_* ← پیشران ِ f

f^* ← پسار ِ f

$f(x)$ ← مقدار ِ تابع ِ f به ازا یِ x $\cdot(\cdot)$

$f(\mathbb{S})$ ← تصویر ِ مجموعه یِ $\mathbb{S}$ تحت ِ تابع ِ f، یعنی تصویر ِ $\mathrm{res}(f;\mathbb{S})$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

$(f_1, f_2)(x) = [f_1(x), f_2(x)]$

$\overset{j}{\mathbf{\Pi}}_{i_1,\ldots i_k}(x_j, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$

$\mathbf{\Pi}_{i_1,\ldots i_k}(x_1, \ldots, x_n) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$

$[\blacklozenge_{\{i_1,\ldots,i_k\}}(x_1, \ldots, x_k)](y_1, \ldots, y_{n-k}) = \blacklozenge(z_1, \ldots, z_n)$

که z یک n تایی ست که برا یِ j نابزرگتر از k مئلفه یِ i_j َش برابر با x_j است، و

بقیه یِ مئلفِها یَش مئلفِها یِ y َند، بدون تغییر در ترتیب ِشان

$\delta_{i\,j}$ ← دلتا یِ کْرُنِکِر ِ i و j، برابر با یک (صفر) اگر $j = i$ $(j \neq i)$ δ

δ_i^j ← دلتا یِ کْرُنِکِر ِ i و j، برابر با یک (صفر) اگر $j = i$ $(j \neq i)$

$\delta_e\, e^i = e_i$

مجموعه یِ تهی	$\varnothing$
مجموعه یِ عددها یِ حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه یِ اعضا یی از $\mathbb{R}^n$ که اولین مئلفه یِشان منفی ست	$\mathbb{R}^n_-$
مجموعه یِ اعضا یی از $\mathbb{R}^n$ که اولین مئلفه یِشان صفر است	$\mathbb{R}^n_0$
مجموعه یِ اعضا یی از $\mathbb{R}^n$ که اولین مئلفه یِشان مثبت است	$\mathbb{R}^n_+$
مجموعه یِ اعضا یی از $\mathbb{R}^n$ که اولین مئلفه یِشان منفی یا صفر است	$\mathbb{R}^n_{-0}$
مجموعه یِ اعضا یی از $\mathbb{R}^n$ که اولین مئلفه یِشان صفر یا مثبت است	$\mathbb{R}^n_{0+}$
$\mathsf{nei}_r(x)$ ← همسایِگی یِ x به شعاع ِ r، یعنی $\{y \mid \lvert y-x\rvert < r\}$	nei
دترمینان ِ	det
رد ِ	tr
$\mathbb{T}(\mathbb{M})$ ← تپُلژی یِ $\mathbb{M}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ ← همه یِ اعضا یِ $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ که شامل ِ x َند	
$\dfrac{o(s)}{s}$ به صفر میگراید	o
مشتقگیری (برا یِ تابعها یِ از یک فضا یِ خطی به یک فضا یِ خطی)	$\boldsymbol{D}$
مشتقگیری	$\mathbf{D}$
$\mathbf{D}_{(i)}$ ← مشتقگیری نسبت به مئلفه یِ i	
$\overset{j}{\mathbf{D}}_{(i)}$ ← مشتقگیری نسبت به مئلفه یِ i، وقت ی شماره-گذاری یِ مئلفِها از j شروع میشود	
$(\mathbf{D}_v\, f)$ ← مشتق ِ f در سو یِ v (مشتق ِ سویی یِ f با v)	

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{e_i}$$

$$\mathbf{D}^i = g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j$$

$$\phi_{\mathrm{s}}(x) = (\mathbf{D}\,\phi)(x)$$

تابع- ِ-مشتق ِ	$\boldsymbol{\mathcal{D}}$
$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{(i)}$ ← اثر ِ تابع- ِ-مشتق بر مئلفه یِ i	
$\overset{j}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(i)}$ ← اثر ِ تابع- ِ-مشتق بر مئلفه یِ i، وقت ی شماره-گذاری یِ مئلفِها از j شروع میشود	

$$\mathfrak{D}^j\,\centerdot = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{j\,i}\,\centerdot\}$$

$[\mathbf{I}(a,b)]f = \int_a^b \mathrm{d}t\, f(t)$

$\mathsf{F}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ تابعها یِ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$ — F

$\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ ← مجموعه یِ میدانها یِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) با دامنه یِ $\mathbb{M}$

$\mathsf{LF}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ تابعها یِ خطی از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$ — LF

$\mathsf{LF}(\mathbb{S};\mathbb{D}_1,\ldots,\mathbb{D}_n)$ ← مجموعه یِ تابعها یِ چندخطی از $\mathbb{D}_1$ تا $\mathbb{D}_n$ به $\mathbb{S}$

$\mathsf{CF}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ تابعها یِ پیوسته از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$ — CF

$\mathsf{HF}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ همانریختیها یِ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$ — HF

$\mathsf{DF}(\mathbb{S};\mathbb{D})$ ← مجموعه یِ وابرریختیها یِ از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{S}$ — DF

$\mathcal{A}^s(\mathbb{M})$ ← مجموعه یِ میدانها یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل با دامنه یِ $\mathbb{M}$ — $\mathcal{A}$

$\mathbb{S}_2 \mathrel{\hat{=}} \mathbb{S}_1$ ← $\mathbb{S}_2$ با $\mathbb{S}_1$ همانریخت است. — $\mathrel{\hat{=}}$

مرز ِ — $\mathbf{b}$

$\mathbf{b}_m$ ← یال ِ درجه-یِ-m ِ

درون ِ — $\mathbf{int}$

دستیدِگی یِ، علامت ِ — sgn

تقارنی یِ — sy

نشانگان ِ — snt

snt_+ ← تعداد ِ بردارها یِ با علامت ِ مثبت، در یک پایه یِ متعامد

snt_- ← تعداد ِ بردارها یِ با علامت ِ منفی، در یک پایه یِ متعامد

$\mathbb{E}_x$ ← تار ِ $\mathbb{E}$ در نقطه یِ x — $\mathbf{.}$

ε_v ← عنصر- ِ-مساحت در سو یِ v (متناظر با عنصر- ِ-حجم ِ ε)

$\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ ← گسترش-یافته یِ بدیهی یِ کلاف ِ $\mathbb{E}$ با خمینه یِ $\mathbb{N}$ — $\mathbf{.}^{\mathbf{.}}$

$U^{\mathbb{N}}$ ←

بدیهیگر ِ متناظر با بدیهیگر ِ U بر کلاف برا یِ

گسترش-یافته یِ بدیهی یِ کلاف با خمینه یِ $\mathbb{N}$

$\boldsymbol{\pi}^{\mathbb{N}}$ ← افکنش ِ گسترش-یافته یِ بدیهی یِ کلاف با خمینه یِ $\mathbb{N}$

$\boldsymbol{\pi}(z)$ ← مبنا یِ z — $\boldsymbol{\pi}$

افکنش از $\mathbb{J}$ به $\mathbb{B}$ — $\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{J}\to\mathbb{B}}$

$\check{\blacklozenge}\,\boldsymbol{.} = \blacklozenge(\boldsymbol{.})$

$\check{\blacklozenge}\,v = \blacklozenge(\boldsymbol{.}, v)$

مُجود ی در $\mathbb{TE}$، که متناظر با $\blacklozenge$ در کلاف ِ $\mathbb{E}$ است — $\dashv\!\blacklozenge\!\vdash$

ϖ_i ← افکنش بر مئلفه یِ i ِ حاصل- ِ-جمع — $\varpi_{\boldsymbol{.}}$

حاصل- ِ-جمع ِ مستفیم — $\oplus$

حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری — $\otimes$

$\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ ← — $\mathbf{B}_0$

کلاف ی که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{M}$ است و تار َش بدیهی (تک-عضوی) ست

$\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ ← — $\mathbf{B}_1$

کلاف ی که خمینه-یِ-پایه اَش بدیهی (تک-عضوی) ست و تار َش $\mathbb{M}$ است

$\mathsf{S}(\mathbb{E})$ ← مجموعه یِ برشها یِ کلاف ِ $\mathbb{E}$ — S

$\mathsf{et}_x(\gamma)$ ← — et

رده یِ همئرزی یِ خمها یی که از x میگذرند و

در این نقطه مماس بر آنها با مماس بر γ یکسان است

$\mathsf{cu}_x(V)$ ← خم ی که از x میگذرد و مشتق ِ تصویر َش در $\mathbb{R}^m$ بردار ِ V است — cu

$\mathsf{pc}(\gamma)$ ← مجموعه یِ خمها یِ همئرز با γ با رابطه یِ بازپارامترش — pc

$\mathsf{pc}_+(\gamma)$ ←

مجموعه یِ خمها یِ همئرز با γ با رابطه یِ بازپارامترش با تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت

$\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ ← فضا یِ مماس بر $\mathbb{M}$ در x — T

$\mathrm{T}\mathbb{M}$ ← فضا یِ مماس بر $\mathbb{M}$

$\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ ← فضا یِ هممماس بر $\mathbb{M}$ در x

$\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ ← فضا یِ هممماس بر $\mathbb{M}$

$\mathrm{T}^{(r,s)}_x\mathbb{M}$ ← فضا یِ تانسُرها یِ نُع ِ (r,s) در x

$\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ ← فضا یِ تانسُرها یِ نُع ِ (r,s)

$(\mathrm{T}_k)\mathbb{M}$ ← کلاف ی که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{M}$ است و تار َش در x مجموعه یِ زیرفضاها یِ k بُعدی یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است

$(\mathrm{T}^*_k)\mathbb{M}$ ← کلاف ی که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{M}$ است و تار َش در x مجموعه یِ زیرفضاها یِ k بُعدی یِ $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ است

$$\mathrm{T}\mathbb{E} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} (\mathrm{T}\mathbb{E}_x)$$

ادغام ِ $\mathfrak{G}$

$\mathfrak{G}^{(a)}{}_{(b)}$ ← ادغام ِ مئلفِها یِ a ُم و b ُم

گونه یِ ty

همگونه یِ tty

$\mathsf{fl}(t\,v)$ ← شارش ِ میدان ِ برداری یِ v به اندازه یِ t fl

$\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}$ ← انتقال به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ T

$\mathbf{L}_v\,T$ ← مشتق ِ لی یِ T با v $\mathbf{L}$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\mathbf{D}\,\Sigma,T) = \mathbf{L}_{\Sigma\,v}T - \Sigma\,\mathbf{L}_v\,T$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j T = \boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i,e^j,T)$$

$$\mathbf{A}_v\,T = \int_0^t \mathrm{d}s\,[\mathsf{fl}(s\,v)]_*\,T, \quad \mathbf{L}_v\,t = 1$$

$$[A,B] = A\,B - B\,A$$

جابِجاگر $\diamond$

ضربگر $\mathbf{m}$

$\mathbf{i}_T\,\sigma$ ← کاهش ِ درونی یِ σ با T $\mathbf{i}$

$$\underset{\smile}{g}\,v = g(\boldsymbol{.},v)$$

$$\mathbf{j}_\omega\,\sigma = \frac{1}{[\mathsf{ty}(\omega)]!}\,\mathbf{i}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})\otimes[\mathsf{ty}(\omega)]_\omega}\,\sigma$$

$\mathbf{i}^{\mathrm{t}}_u\,\sigma$ ← همکاهش ِ درونی یِ σ با u $\mathbf{i}^{\mathrm{t}}$

ضرب ِ برونی $\wedge$

همضرب ِ برونی $\wedge^{\mathrm{t}}$

مشتق ِ برونی $\mathbf{d}$

$\mathbf{d}_{(i)}$ ← مشتق ِ برونی نسبت به مئلفه ی ِ i

$\overset{j}{\mathbf{d}}_{(i)}$ ← مشتق ِ برونی نسبت به مئلفه ی ِ i، وقت ی شماره-گذاری ی ِ مئلفِها از j شروع میشود

هممشتق ِ برونی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$

تابع- ِ-جایگشت Per

متقارنگر Sym

تابع- ِ-جایگشت ِ علامتدار aPer

پادمتقارنگر aSym

$\mathsf{aSym}_{(i_1,\ldots,i_k)}$ ← پادمتقارنگر نسبت به متغیرها (شاخصها) ی ِ $(i_1,\ldots,i_k)$

مجموعه ی ِ جایگشتها $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}_n$ ← مجموعه ی ِ n جایگشتها

$$\begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{bmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathsf{sgn}_\sigma \left[\prod_{k=1}^{n} \delta^{i_k}_{j_{\sigma^{-1}(k)}}\right]$$

$$[i_1 \cdots i_n] = \begin{bmatrix} i_1 \cdots i_n \\ 1 \cdots n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{o}(e) = e^0 \wedge \cdots \wedge e^{m-1}$$

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) = \boldsymbol{\varepsilon}(e^0,\ldots,e^{m-1})$$

یک-فرم- ِ-مساحت $\boldsymbol{\sigma}$

بردار- ِ-مساحت $\mathbf{a}$

$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma$ ← $\boldsymbol{\varepsilon}$-توده ی ِ Σ $\boldsymbol{\mathcal{I}}$

$\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma$ ← توده ی ِ Σ

$\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega}$ ← $\boldsymbol{\varepsilon}$-چگالی ی ِ میانگین ِ Ω $\boldsymbol{\varrho}$

$\overline{\boldsymbol{\varrho}\,\Omega}$ ← چگالی ی ِ میانگین ِ Ω

$\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega$ ← $\boldsymbol{\varepsilon}$-چگالی ی ِ Ω

$\boldsymbol{\varrho}\,\Omega$ ← چگالی ی ِ Ω

ناوردا-توده $\boldsymbol{i\mathcal{I}}$

ناوردا-چگالی $\boldsymbol{i\varrho}$

مشتقِ هموردا $\boldsymbol{\nabla}$

$\boldsymbol{\nabla}_{(i)}$ ← مشتقِ هموردا نسبت به مئلفه یِ i

$\overset{j}{\boldsymbol{\nabla}}_{(i)}$ ← مشتقِ هموردا نسبت به مئلفه یِ i، وقت ی شماره-گذاری یِ مئلفِها از j شروع میشود

مشتقِ هموردا، شکلِ وابسته-به-بدیهیگر ∇

مشتق-ِ-هموردا یِ برونی $\boldsymbol{\delta}$

$\grave{\blacklozenge}$ ← ردِ $\blacklozenge$ $\grave{\blacklozenge}$

$\boldsymbol{Q}(t_2, t_1, \centerdot)$ ← انتقال-ِ-افقی با γ از t_1 تا t_2 $\boldsymbol{Q}$

$\boldsymbol{Q}_\gamma(\centerdot, t_1, z)$ ← بالا-برده یِ γ در t_1 با z

$\boldsymbol{M}(s, \mathfrak{C})$ ← انتقال-ِ-افقی-یافته یِ $\mathfrak{C}$ به اندازه یِ s $\boldsymbol{M}$

$\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})$ ← قائم-افکنده یِ $\mathfrak{C}$ در t_1 $\boldsymbol{N}$

$(\boldsymbol{\Upsilon}\, u)$ ← بالا-برده یِ میدانِ برداری یِ u $\boldsymbol{\Upsilon}$

نگاشتِ افقی Q

رابطه یِ همئرزی یِ متناظر با نگاشتِ افقی $\overset{Q}{=}$

$\mathbb{M}_z^Q$ ← رده یِ همئرزی یِ شاملِ z $\overset{Q}{\centerdot}$

وقت ی خمینه-یِ-پایه یِ کلافِ $\mathbb{M}$ است.

H_λ ← هُلُنُمی با λ H

$\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(t_2, t_1, \centerdot)$ ← انتقال-ِ-موازی با γ از t_1 تا t_2 برا یِ تانسُرها یِ نُعِ (r,s) $\boldsymbol{P}^{(r,s)}$

$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{(1,0)}$

نگاشتِ موازی برا یِ تانسُرها یِ نُعِ (r,s) $P^{(r,s)}$

$P = P^{(1,0)}$

$\mathbb{M}_T^P$ ← رده یِ همئرزی یِ تانسُرها یِ موازی با T بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ $\overset{P}{\centerdot}$

$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1, \centerdot)$ ← انتقال-ِ-موازی-یافته یِ γ_2 در s_2 با γ_1 از s_1 تا t_1 $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

هموستارِ خمینه $\boldsymbol{\Gamma}$

ضریبِ عنصر-ِ-حجم در مشتقِ هموردا یِ عنصر-ِ-حجم: $\boldsymbol{\nabla}_u\, \varepsilon = [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_u(\varepsilon)]\varepsilon$ $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}$

تانسُرِ پیچش $\boldsymbol{T}$

تانسُر ِ همپیچش	$\boldsymbol{K}$
تانسُر ِ ریمان	$\boldsymbol{R}$
تارِد- ِ-خمش	$\grave{\boldsymbol{R}}$
همخمش	$\boldsymbol{S}$
تانسر ِ ریچی	R
اسکالر ِ خمش	$\mathcal{R}$
تانسر ِ اَینشتَین	G
رد ِ تانسر ِ اَینشتَین	$\mathcal{G}$
تانسر ِ وَیل	$\boldsymbol{C}$
♦ ِ لِوی-چیویتا	$\overset{\circ}{\blacklozenge}$
دُگانی یِ هاج	$\mathbf{h}$
دیورژانس ِ	$\mathbf{div}$
گرادیان ِ	$\mathbf{grad}$
کرل ِ	$\mathbf{curl}$
تیکرل ِ	$\mathbf{tcurl}$
کر ِ	$\mathbf{cur}$
تیکر ِ	$\mathbf{tcur}$
لَپلَسی	$\triangle$
سیلَپلَسی	$\boldsymbol{\nabla\nabla}$
	$u \cdot v = g(u, v)$
	$\|u\|^2 = u \cdot u$
	$\|u\| = \sqrt{\|u \cdot u\|}$
	$u \times v = \mathbf{a}(u, v)$
درجه-یِ-آزادی یِ	df
درجه-یِ-آزادی یِ میدانی یِ	fdf

طول- ِ-جبری	al
$(\mathfrak{n})$-طول- ِ-جبری	$\mathrm{al}^{(\mathfrak{n})}$
طول- ِ-جبری یِ نامعین	ial
دی-طول- ِ-جبری	Al

1

خمینه

1 تعریف ِ خمینه

میگویم مجموعه یِ $\mathbb{M}$ یک خمینه (یِ مشتقپذیر یا هموار) است، اگر این ویژِگیها برقرار باشد.

a1 مجموعه یِ $\mathbb{M}$ تپُلژیدار است. یک تپُلژی یِ $\mathbb{T}$ برا یِ مجموعه یِ $\mathbb{M}$ عبارت است از یک دسته مجموعه (مجموعِها یِ باز) با این ویژِگیها.

a1-1 $\forall\, \mathbb{B} \in \mathbb{T} \;:\; \mathbb{B} \subseteq \mathbb{M}.$

a1-2 $\varnothing \in \mathbb{T}.$

a1-3 $\mathbb{M} \in \mathbb{T}.$

a1-4 $\forall\, (\mathbb{B}, \mathbb{B}') \in (\mathbb{T} \times \mathbb{T}) \;:\; (\mathbb{B} \cap \mathbb{B}') \in \mathbb{T}.$

a1-5 $\forall\, \{\mathbb{U}_a \mid a\} \subseteq \mathbb{T} \;:\; (\bigcup_a \mathbb{U}_a) \in \mathbb{T}.$

تپُلژی یِ $\mathbb{M}$ را با $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ نشان میدهم. $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ یعنی مجموعه یِ همه یِ اعضا یِ $\mathbb{T}(\mathbb{M})$ که شامل ِ x اند.

a2 مجموعه یِ $\mathbb{M}$ یک فضا یِ هاؤسدُرف است. این یعنی متناظر با هر دُ-نقطه یِ متمایز در این مجموعه، دُ مجموعه یِ باز با اشتراک ِ تهی هستند که هر یک شامل ِ یک ی از آن نقطِها ست.

a3 یک m ِ طبیعی و یک مجموعه یِ $\mathbb{A}$ هستند که

$$\mathbb{A} = \{\phi_a \mid a\}. \qquad \textbf{a3-1}$$

$$\forall\, a \;:\; \Big(\{\mathsf{dom}(\phi_a) \in [\mathbb{T}(\mathbb{M})]\} \wedge \{\phi_a \in \mathsf{HF}[\mathbb{R}^m_{-0}; \mathsf{dom}(\phi_a)]\}\Big). \qquad \textbf{a3-2}$$

$$[\textstyle\bigcup_a \mathsf{dom}(\phi_a)] = \mathbb{M}. \qquad \textbf{a3-3}$$

$$\forall\, (\phi, \phi') \in (\mathbb{A} \times \mathbb{A}) \;:\; \phi' \circ \phi^{-1} \in \mathsf{DF}\{\mathbb{R}^m_{-0}; \phi[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]\}. \qquad \textbf{a3-4}$$

تابع ِ پیوسته تابع ی ست که اثر ِ وارون ِ آن بر هر مجموعه یِ باز، یک مجموعه یِ باز باشد. همانریختی تابع ی وارونپذیر است که خُد َش و وارون َش پیوسته اند. یک وابرریختی از $\mathbb{R}^m_{-0}$ به $\mathbb{R}^m_{-0}$ تابع ی وارونپذیر است که خُد َش و وارون َش هموار (k بار مشتقپذیر) َند.

ثابت میشود اگر $\mathbb{M}$ ناتهی باشد، دو عدد ِ طبیعی یِ متمایز نیستند که همزمان **a3** را براورند. به این ترتیب، متناظر با خمینه یِ ناتهی یِ $\mathbb{M}$ فقط یک عدد ِ طبیعی هست که **a3** را بر میئاورد. به این عدد بُعد ِ $\mathbb{M}$ میگویند و آن را با $\dim(\mathbb{M})$ نشان میدهند. به هر یک از اعضا یِ $\mathbb{A}$ یک نقشه (یا نگاشت ِ مختصاتی، یا تابع ِ مختصاتی)، و به $\mathbb{A}$ یک اتلس میگویند. **a3-3** یعنی مجموعه یِ دامنِها یِ نقشِها یک پوشش ِ باز ِ خمینه است.

متناظر با نقشِها یِ ϕ و ϕ'، به $\phi' \circ \phi^{-1}$ در **a3-4** یک تابع ِ تغییر- ِ-مختصات میگویند. اگر ϕ یک نقشه باشد به $\phi(x)$ مختصات ِ متناظر با نقطه یِ x در $\mathbb{M}$ میگویند. به یک زیرمجموعه یِ اتلس ِ $\mathbb{A}$ که خُد َش هم اتلس باشد، یک زیراتلس ِ $\mathbb{A}$ میگویند. میگویند همانریختی یِ ϕ که دامنه اَش یک زیرمجموعه یِ باز ِ خمینه یِ $\mathbb{M}$ است و در $\mathbb{R}^m$ مقدار میگیرد با $\mathbb{A}$ که یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ است سازگار است، اگر $\mathbb{A} \cup \{\phi\}$ هم یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ باشد.

میگویم خمینه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ خطی ست، اگر $\mathbb{M}$ یک فضا یِ خطی باشد و یک همانریختی از آن به $\mathbb{R}^m$ با اتلس ِ $\mathbb{M}$ سازگار باشد. رُشن است که در این صورت همه یِ همانریختیها یِ از $\mathbb{M}$ به $\mathbb{R}^m$ با اتلس ِ $\mathbb{M}$ سازگار َند.

مختصات ِ هر نقطه عضو ی از $\mathbb{R}^m_{-0}$ است، پس میشود آن را با یک ستون ِ m تایی از عددها یِ حقیقی نشان داد، که مئلفه یِ صفر ِ آن ستون نامثبت است. به ازا یِ نقشِها یِ ϕ و ϕ'، دامنه و تصویر ِ $\phi' \circ \phi^{-1}$ زیرمجموعِها یِ باز ی از $\mathbb{R}^n_{-0}$ اند. به این ترتیب، این که $\phi' \circ \phi^{-1}$ وابرریختی ست یعنی اگر

$$\begin{pmatrix} X'^0 \\ \vdots \\ X'^{m-1} \end{pmatrix} = (\phi' \circ \phi^{-1}) \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

آنگاه بستِگی یِ ستون ِ X' به ستون ِ X وابرریختی ست. در واقع میشود مختصات ِ x را با X (یا X') نشان داد:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} X'^0 \\ \vdots \\ X'^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

این ویژِگیها یِ $\mathbb{M}$ را ساده چنین میگویند که $\mathbb{M}$ مُضعَن شبیه ِ $\mathbb{R}^m_{-0}$ است.

رُشن است که با تعریف ِ بالا برا یِ خمینه، خُد ِ $\mathbb{R}^m_{-0}$ هم خمینه است. کافی ست اتلس را $\{\mathbf{1}_{\mathbb{R}^m_{-0}}\}$ بگیرم. $\mathbb{R}^m$ هم خمینه است. کافی ست اتلس را $\{f\}$ بگیرم که f در $\mathsf{DF}(\mathbb{R}^m_{-0};\mathbb{R}^m)$ و

$$f \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{m-1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -\exp(-x^0) \\ x^1 \\ \vdots \\ x^{m-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

همچنین اگر $\mathbb{N}$ یک خمینه یِ n بُعدی باشد و f در $\mathsf{HF}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ باشد، آنگاه $\mathbb{M}$ هم یک خمینه یِ n بُعدی ست. برا یِ اثبات، یک اتلس برا یِ $\mathbb{M}$ میسازم. به سادِگی دیده میشود اگر $\{\phi_a \mid a\}$ یک اتلس ِ $\mathbb{N}$ باشد، $\{(\phi_a \circ f) \mid a\}$ یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ است. از جمله دیده میشود اگر $\mathbb{N}$ یک خمینه یِ n بُعدی باشد و f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ باشد و وارونپذیر باشد (فرض نشده $\mathbb{M}$ تپُلژی دارد)، آنگاه $\mathbb{M}$ هم یک

خمینه یِ n بُعدی ست. برا یِ اثبات کافی ست یک تپُلژی برا یِ $\mathbb{M}$ ساخته شود، چنان که f همانریختی شود. $\mathbb{T}$ را یک تپُلژی یِ $\mathbb{N}$ میگیرم. به سادِگی دیده میشود $f^{-1}(\mathbb{T})$ یک تپُلژی برا یِ $\mathbb{M}$ است، و با این تپُلژی f همانریختی ست. یک نتیجه این است که هر فضا یِ خطی یِ n بُعدی یی یک خمینه یِ n بُعدی یِ خطی ست. از جمله به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ دُ خمینه یِ خطی باشند، آنگاه $(\mathbb{M}_1 \otimes \mathbb{M}_2)$ یک خمینه یِ خطی ست.

گیرم $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست و متناظر با $x \in \mathbb{M}$ یک نقشه یِ ϕ هست که $\phi^0(x)$ صفر است. میخاهم نشان دهم اگر ϕ' نقشه ای باشد که دامنه اَش شاملِ x است، آنگاه $\phi'^0(x)$ هم صفر است. از این که $\phi \circ \phi'^{-1}$ مشتقپذیر است نتیجه میشود مئلفه یِ صفرمِ $\phi \circ \phi'^{-1}$ هم مشتقپذیر است. از این که مئلفه یِ صفرمِ $\phi \circ \phi'^{-1}$ در $\phi'(x)$ بیشینه میشود، معلوم میشود اگر یک همسایِگی یِ $\mathbb{R}^m$ باشد که زیرمجموعه یِ $\phi'[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ و شاملِ $\phi'(x)$ است، آنگاه مشتقِ مئلفه یِ صفرمِ $\phi \circ \phi'^{-1}$ در $\phi'(x)$ صفر است. اما اگر چنین باشد $[\boldsymbol{D}(\phi \circ \phi'^{-1})][\phi'(x)]$ وارونپذیر نخاهد بود، و در این صورت $\phi \circ \phi'^{-1}$ در $\phi'(x)$ وابرریختی نیست. پس هر همسایِگی یِ $\mathbb{R}^m_{-0}$ که زیرمجموعه یِ $\phi'[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ و شاملِ $\phi'(x)$ باشد، شاملِ دست-ِ-کم یک نقطه از $\mathbb{R}^m_0$ است. از اینجا نتیجه میشود $\phi'(x)$ در $\mathbb{R}^m_0$ است.

به این ترتیب معلوم میشود این که اثرِ یک نقشه بر x در $\mathbb{M}$ عضوِ $\mathbb{R}^m_0$ یا $\mathbb{R}^m_-$ است به نقشه بستِگی ندارد. ($\mathbb{M}$ خمینه ای m بُعدی ست.) از اینجا مرز و درونِ یک خمینه را تعریف میکنم. مرزِ $\mathbb{M}$ و درونِ خمینه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ را با به ترتیب $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ و $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ نشان میدهم و این‌ها را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{b}(\mathbb{M}) = \bigcup_{\phi \in \mathbb{A}} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m_0), \tag{5}$$

$$\mathbf{int}(\mathbb{M}) = \bigcup_{\phi \in \mathbb{A}} \phi^{-1}(\mathbb{R}^m_-), \tag{6}$$

که $\mathbb{A}$ اتلسِ $\mathbb{M}$ است. رُشن است که

$$[\mathbf{b}(\mathbb{M})] \cap [\mathbf{int}(\mathbb{M})] = \varnothing, \tag{7}$$

$$[\mathbf{b}(\mathbb{M})] \cup [\mathbf{int}(\mathbb{M})] = \mathbb{M}. \tag{8}$$

میگویم خمینه یِ $\mathbb{M}$ بیمرز است، اگر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ تهی باشد. به سادگی دیده میشود $\mathbb{M}$ بیمرز است، اگر و تنها اگر در تعریف ِ خمینه برا یِ آن بشود $\mathbb{R}^m$ را جانشین ِ $\mathbb{R}^m_{-0}$ کرد.

اگر $\mathbb{M}$ خمینه باشد هر زیرمجموعه یِ باز ِ ناتهی یِ $\mathbb{D}$ از آن هم خمینه است و بُعد ِ $\mathbb{D}$ هم بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. برا یِ اثبات تپُلژی یِ $\mathbb{D}$ را تپُلژی یِ القاییده از تپُلژی یِ $\mathbb{M}$ میگیرم. این یعنی مجموعِها یِ باز ِ $\mathbb{D}$ را اشتراک ِ $\mathbb{D}$ با مجموعِها یِ باز ِ $\mathbb{M}$ میگیرم. متناظر با $\mathbb{A}$ (اتلس ِ $\mathbb{M}$) $\mathbb{A}'$ را چنین تعریف میکنم

$$\mathbb{A}' = \{\mathsf{res}(\phi; \mathbb{D}) \mid \phi \in \mathbb{A}\}. \tag{9}$$

دیده میشود $\mathbb{A}'$ یک اتلس برا یِ $\mathbb{D}$ است.

از (6) دیده میشود $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ یک زیرمجموعه یِ باز ِ ناتهی یِ $\mathbb{M}$ است. پس $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ هم خمینه است، و

$$\mathsf{dim}[\mathbf{int}(\mathbb{M})] = \mathsf{dim}(\mathbb{M}). \tag{10}$$

ضمنَن دیده میشود $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ یک خمینه یِ بیمرز است:

$$\mathbf{b}[\mathbf{int}(\mathbb{M})] = \varnothing. \tag{11}$$

همچنین میشود نشان داد $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم خمینه است. برا یِ این کار، تپُلژی یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ را تپُلژی یِ القاییده از $\mathbb{M}$ میگیرم. متناظر با هر $\phi \in \mathbb{A}$ (که $\mathbb{A}$ اتلس ِ $\mathbb{M}$ است) تعریف میکنم

$$\tilde{\phi} = \mathfrak{P}_0 \circ \{\mathsf{res}[\phi; \mathbf{b}(\mathbb{M})]\}, \tag{12}$$

که

$$\mathfrak{P}_0 \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\tilde{\phi}$ یک-به-یک است و در نتیجه بر $\mathfrak{P}_0\{\phi[\mathbf{b}(\mathbb{M})]\}$ وارونپذیر است. در واقع،

$$\tilde{\phi}^{-1} = \phi^{-1} \circ \mathfrak{I}_0, \tag{14}$$

که

$$\mathfrak{I}_0 \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^1 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

از (12) معلوم میشود $\tilde{\phi}$ پیوسته است. از (14) هم معلوم میشود $\tilde{\phi}^{-1}$ پیوسته است.

سرانجام، باید نشان داد تابعها یِ تغییر- ِ-مختصات وابرریختی یَند. x را در $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ میگیرم و ϕ و ϕ' را دُ نقشه میگیرم که x در $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ باشد. دیده میشود

$$\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1} = \mathfrak{P}_0 \circ \phi' \circ \phi^{-1} \circ \mathfrak{I}_0, \tag{16}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\boldsymbol{D}(\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1}) = \mathfrak{P}_0 \, [\boldsymbol{D}(\phi \circ \phi'^{-1})] \, \mathfrak{I}_0. \tag{17}$$

میخاهم ثابت کنم مشتق ِ $(\tilde{\phi} \circ \tilde{\phi}'^{-1})$ وارونپذیر است. از

$$[\phi' \circ \phi^{-1} \circ \mathfrak{I}_0]^0 = 0, \tag{18}$$

معلوم میشود

$$\{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})] \, \mathfrak{I}_0\}^0 = 0, \tag{19}$$

که ترکیب ِ آن با (17) نتیجه میدهد

$$\{\mathsf{det}[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})]\}[\phi(x)] = \{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})]^0{}_0 \, \mathsf{det}[\boldsymbol{D}(\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1})]\}[\phi(x)]. \tag{20}$$

$\{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})]^0{}_0\}[\phi(x)]$ صفر نیست، چون اگر صفر باشد از (19) نتیجه میشود $\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})$ تکین است. از (20) معلوم میشود $[\boldsymbol{D}(\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1})]$ وجود دارد و هسته اَش بدیهی ست. این یعنی $[\boldsymbol{D}(\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1})]$ وارونپذیر است، و در نتیجه $(\tilde{\phi}' \circ \tilde{\phi}^{-1})$ وابرریختی ست.

پس $\tilde{\mathbb{A}}$ با

$$\tilde{\mathbb{A}} = \{\mathfrak{P}_0 \circ \mathsf{res}[\phi; \mathbf{b}(\mathbb{M})] \mid \phi \in \mathbb{A}\}, \tag{21}$$

(که $\mathbb{A}$ اتلسِ $\mathbb{M}$ است) یک اتلسِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ است. به این اتلس اتلسِ القاییده از $\mathbb{M}$ میگویم. دیده میشود

$$\mathsf{dim}[\mathbf{b}(\mathbb{M})] = \mathsf{dim}(\mathbb{M}) - 1. \tag{22}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. در این صورت $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ بیمرز است:

$$\mathbf{b}[\mathbf{b}(\mathbb{M})] = \varnothing. \tag{23}$$

برا یِ دیدنِ این کافی ست توجه شود تصویرِ هر نقشه یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ از اتلسِ القاییده از $\mathbb{M}$ یک مجموعه یِ باز در $\mathbb{R}^{m-1}$ است.

گیرم $\mathbb{M}$ و $\mathbb{N}$ دُ خمینه اند، f در $\mathsf{HF}(\mathbb{N}; \mathbb{M})$ است، و نقشِها یِ $\mathbb{M}$ ترکیبِ نقشِها یِ $\mathbb{N}$ با f اند. به سادِگی دیده میشود

$$\mathbf{b}(\mathbb{N}) = f[\mathbf{b}(\mathbb{M})],$$
$$\mathbf{int}(\mathbb{N}) = f[\mathbf{int}(\mathbb{M})]. \tag{24}$$

2 حاصل-ِ-ضربِ دِکَرتی یِ خمینِها

f_1 و f_2 تابعها یی با دامنه یِ $\mathbb{D}$ اند. (f_1, f_2) را تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{D}$ تعریف میکنم که

$$(f_1, f_2)(x) = [f_1(x), f_2(x)]. \tag{25}$$

f_1 و f_2 دُ تابع َند. f را تابع ی با دامنه یِ $[\mathsf{dom}(f_1)] \times [\mathsf{dom}(f_2)]$ تعریف میکنم که

$$f(x_1, x_2) = [f_1(x_1), f_2(x_2)]. \tag{26}$$

$\mathfrak{T}$ با دامنه یِ f را به شکلِ

$$\mathfrak{T}[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = [(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \tag{27}$$

تعریف میکنم. دیده میشود $\mathfrak{T}$ یک تناظر ِ یک-به-یک بین ِ f و $(f_1 \times f_2)$ است. برا یِ سادِگی این تناظر را با همانی نشان میدهم. به این ترتیب،

$$(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = [f_1(x_1), f_2(x_2)]. \tag{28}$$

به سادِگی دیده میشود اگر f_1' و f_2' چنان باشند که $f_i \circ f_i'$ خُش-تعریف باشد، آنگاه $(f_1 \times f_2) \circ (f_1' \times f_2')$ هم خُش-تعریف است و

$$(f_1 \times f_2) \circ (f_1' \times f_2') = (f_1 \circ f_1') \times (f_2 \circ f_2'). \tag{29}$$

همچنین، اگر f_1 و f_2 وارونپذیر باشند، $(f_1 \times f_2)$ هم چنین است و

$$(f_1 \times f_2)^{-1} = f_1^{-1} \times f_2^{-1}. \tag{30}$$

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ دُ خمینه یِ بیمرز َند. به سادِگی دیده میشود $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ یک خمینه یِ بیمرز است. برا یِ اثبات، تپُلژی یِ $\mathbb{M}_i$ را با $\mathbb{T}_i$ نشان میدهم و $\mathbb{A}_i$ را یک اتلس برا یِ $\mathbb{M}_i$ میگیرم. تعریف میکنم

$$\mathbb{T} = \left\{ \bigcup_{a,b} (\mathbb{U}_{1\,a} \times \mathbb{U}_{2\,b}) \;\middle|\; (\mathbb{U}_{1\,a}, \mathbb{U}_{2\,b}) \in (\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2) \right\},$$

$$\mathbb{A} = \{(\phi_{1\,a} \times \phi_{2\,b} \mid (\phi_{1\,a}, \phi_{2\,b}) \in (\mathbb{A}_1 \times \mathbb{A}_2)\}. \tag{31}$$

به سادِگی دیده میشود $\mathbb{T}$ یک تپُلژی برا یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$، و $\mathbb{A}$ یک اتلس برا یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ است. به شکل ِ مشابه ی دیده میشود اگر $\mathbb{M}_1$ یک خمینه و $\mathbb{M}_2$ یک خمینه یِ بیمرز باشد، $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ هم یک خمینه است. به علاوه،

$$\begin{aligned} \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) &= \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2), \\ \mathbf{int}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) &= [\mathbf{int}(\mathbb{M}_1)] \times \mathbb{M}_2, \\ \mathbf{b}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) &= [\mathbf{b}(\mathbb{M}_1)] \times \mathbb{M}_2. \end{aligned} \tag{32}$$

حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ دُ خمینه که مرز ِ هر-دُ ناتهی باشد، لزومَن خمینه نیست. این که تعمیم ِ استدلالها یِ بالا به این حالت بدیهی نیست، به خاطر ِ آن است که

$$\mathbb{R}^{m_1}_{-0} \times \mathbb{R}^{m_2}_{-0} \neq \mathbb{R}^{m_1+m_2}_{-0}. \tag{33}$$

در حال ی که

$$\mathbb{R}_{-0}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} = \mathbb{R}_{-0}^{m_1+m_2}. \tag{34}$$

$$\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} = \mathbb{R}^{m_1+m_2}. \tag{35}$$

در حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ دُ خمینه یِ مرزدار، بخش ِ جدید ی به جز درون و مرز ظاهر میشود، که که حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ مرزها ست. میشود آن را یال ِ مجموعه یِ جدید نامید. بُعد ِ این مجموعه 2 تا کمتر از بُعد ِ حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ دُ خمینه است. میشد خمینِها یی تعریف کرد، که در آنها به جا یِ $\mathbb{R}_{-0}^{m}$ در تعریف ِ خمینه یِ مرزدار ($\mathbb{R}_{-0}^{m_1} \times \mathbb{R}_{-0}^{m_2}$) به کار برود. اما در این صورت حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ دُ خمینه از آن گونه لزومَن یک خمینه یِ از آن گونه نمیشود. در حالت ِ کلی این حاصل- ِ-ضرب شامل ِ زیرمجموعِها یِ خاص ی خاهد بود که بُعد ِشان 3 تا یا 4 تا کمتر از بُعد ِ این حاصل- ِ-ضرب است.

میشود تعریف ِ خمینه را چنان گسترش داد که به جا یِ $\mathbb{R}_{-0}^{m}$ در تعریف ِ خمینه (یِ مرزدار) $(\mathbb{R}_{-0})^m$ به کار برود. به چیز ی که به این شکل به دست میئاید خمینه یِ یالدار میگویم. یک خمینه یِ m بُعدی از این گونه، در حالت ِ کلی شامل ِ زیرمجموعِها یِ خاص ی (وجه، یال، ...، و رئس) خاهد بود که بُعد ِشان به ترتیب $(m-1)$، $(m-2)$، ...، و 0 خاهد بود. یال ِ درجه-یِ-k ِ یک خمینه یِ $\mathbb{M}$ از این گونه را با $\mathbf{b}_k(\mathbb{M})$ نشان میدهم. $\mathbf{b}_k(\mathbb{M})$ مجموعه یِ نقاط ی از $\mathbb{M}$ است که $(m-k)$ تا از مختصِها یِشان صفر، و k تا از مختصِها یِشان ناصفر است. از جمله مجموعه یِ رئسها یِ $\mathbb{M}$ را $\mathbf{b}_0(\mathbb{M})$ تعریف میکنم. یعنی هر رئس ِ خمینه نقطه ای از آن است که همه یِ مختصات َش صفر است. درون ِ خمینه هم مجموعه یِ نقاط ی ست که همه یِ مختصات ِشان ناصفر است. به این ترتیب،

$$\mathbf{int}(\mathbb{M}) = \mathbf{b}_m(\mathbb{M}). \tag{36}$$

دیده میشود یالها یِ از درجِها یِ متفاوت با هم اشتراک ندارند،

$$[\mathbf{b}_k(\mathbb{M})] \cap [\mathbf{b}_l(\mathbb{M})] = \varnothing, \tag{37}$$

و اجتماع ِ همه یِ یالها خُد ِ خمینه است.

$$\mathbb{M} = \bigcup_{k=0}^{m} \mathbf{b}_m(\mathbb{M}). \tag{38}$$

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ دُ خمینه یِ یالدار َند. $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ هم خمینه ای از این گونه خاهد بود، و

$$\mathbf{b}_k(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = \bigcup_{k_1+k_2=k} [\mathbf{b}_{k_1}(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{b}_{k_2}(\mathbb{M}_2)]. \tag{39}$$

از جمله

$$\mathbf{int}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = [\mathbf{int}(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{int}(\mathbb{M}_2)]. \tag{40}$$

$$\mathbf{b}_0(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = [\mathbf{b}_0(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{b}_0(\mathbb{M}_2)]. \tag{41}$$

دیده میشود خمینه یِ یالدار ِ $\mathbb{M}$ یک خمینه (یِ مرزدار) است، اگر

$$\mathbf{b}_k(\mathbb{M}) = \varnothing, \quad k < [\mathsf{dim}(\mathbb{M}) - 1]. \tag{42}$$

میگویم $\mathbb{M}$ یک خمینه با یالی یِ c است، اگر

$$[\mathbf{b}_k(\mathbb{M}) = \varnothing] \;\Leftrightarrow\; \{k < [\mathsf{dim}(\mathbb{M}) - c]\}. \tag{43}$$

دیده میشود اگر $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ خمینِها یی با یالی یِ، به ترتیب، c_1 و c_2 باشند، $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ خمینه ای با یالی یِ $(c_1 + c_2)$ است. از جمله، خمینِها یِ مرزدار خمینِها یی با یالی یِ دست- ِ-بالا 1 اند، و حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ دُ خمینه یِ مرزدار خمینه ای با یالی یِ دست- ِ-بالا 2 است، که لزومَن یک خمینه یِ مرزدار نیست. اما حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ هر خمینه یِ بیمرز در یک خمینه با یالی یِ c، یک خمینه با یالی یِ c است.

از این پس همه جا منظور از خمینه هم ان خمینه یِ مرزدار (یعنی خمینه یِ با یالی یِ دست- ِ-بالا 1) است، مگر صریحَن خلاف َش گفته شود.

اگر $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ خمینه باشند،

$$\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2 = (\mathbb{M}_{1\,0} \times \mathbb{M}_{2\,0}) \cup (\mathbb{M}_{1\,0} \times \mathbb{M}_{2\,1}) \cup (\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,0}) \cup (\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,1}), \tag{44}$$

که

$$\mathbb{M}_{i\,0} = \mathbf{int}(\mathbb{M}_i),$$
$$\mathbb{M}_{i\,1} = \mathbf{b}(\mathbb{M}_i), \tag{45}$$

و البته رُشن است که اگر (c,d) با (a,b) برابر نباشد،

$$(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_{2\,b}) \cap (\mathbb{M}_{1\,c} \times \mathbb{M}_{2\,d}) = \varnothing. \tag{46}$$

هر یک از $(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_{2\,b})$ ها یک خمینه یِ بیمرز است، و

$$\mathsf{dim}(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_{2\,b}) = \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2) - (a+b). \tag{47}$$

چون هر یک از $\mathbb{M}_{2\,b}$ ها یک خمینه یِ بیمرز است، هر یک از $(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_2)$ ها و هر یک از $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_{2\,b})$ ها خمینه است و

$$\mathsf{dim}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_{2\,b}) = \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2) - b,$$
$$\mathbf{int}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_{2\,b}) = [\mathbf{int}(\mathbb{M}_1)] \times \mathbb{M}_{2\,b},$$
$$\mathbf{b}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_{2\,b}) = [\mathbf{b}(\mathbb{M}_1)] \times \mathbb{M}_{2\,b},$$
$$\mathsf{dim}(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_2) = \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2) - a,$$
$$\mathbf{int}(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_2) = \mathbb{M}_{1\,a} \times [\mathbf{int}(\mathbb{M}_2)],$$
$$\mathbf{b}(\mathbb{M}_{1\,a} \times \mathbb{M}_2) = \mathbb{M}_{1\,a} \times [\mathbf{b}(\mathbb{M}_2)]. \tag{48}$$

$[(\mathbb{M}_{1\,0} \times \mathbb{M}_{2\,1}) \cup (\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,0})]$ هم یک خمینه یِ بیمرز است و

$$\mathsf{dim}[(\mathbb{M}_{1\,0} \times \mathbb{M}_{2\,1}) \cup (\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,0})] = \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2) - 1. \tag{49}$$

در واقع $[(\mathbb{M}_{1\,0} \times \mathbb{M}_{2\,1}) \cup (\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,0})]$ اجتماع ِ دُ خمینه یِ بیمرز ِ با بُعد ِ یکسان است، که اشتراک ندارند.

سرانجام، $[(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)\backslash(\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,1})]$ هم خمینه است و

$$\begin{aligned}
\mathsf{dim}[(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)\backslash(\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,1})] &= \mathsf{dim}(\mathbb{M}_1) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}_2),\\
\mathbf{int}[(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)\backslash(\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,1})] &= [\mathbf{int}(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{int}(\mathbb{M}_2)],\\
\mathbf{b}[(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)\backslash(\mathbb{M}_{1\,1} \times \mathbb{M}_{2\,1})] &= \{[\mathbf{b}(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{int}(\mathbb{M}_2)]\}\\
&\quad \cup \{[\mathbf{int}(\mathbb{M}_1)] \times [\mathbf{b}(\mathbb{M}_2)]\}. \qquad (50)
\end{aligned}$$

3 خمینه یِ فشرده

مجموعه یِ $\mathbb{M}$ فشرده است، اگر متناظر با هر پوشش ِ باز ِ آن (یعنی هر دسته از مجموعِها یِ باز که اجتماع ِشان شامل ِ آن باشد) یک زیرپوشش ِ باپایان ِ $\mathbb{M}$ وجود داشته باشد، یعنی یک دسته یِ باپایان از آن مجموعِها یِ باز باشد که اجتماع ِشان شامل ِ $\mathbb{M}$ باشد. میگویم $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ فشرده است، اگر $\mathbb{M}$ خمینه و فشرده باشد.

اگر $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ فشرده باشد، آنگاه $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم یک خمینه یِ فشرده است. برا یِ اثبات، گیرم $\mathbb{U} = \{\mathbb{D}_a \mid a\}$ یک پوشش ِ باز برا یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ باشد. به ازا یِ هر a مجموعه یِ $\mathbb{D}_a$ برابر ِ $\mathbb{D}'_a \cap [\mathbf{b}(\mathbb{M})]$ است، که $\mathbb{D}'_a$ یک مجموعه یِ باز در $\mathbb{M}$ است. تعریف میکنم

$$\mathbb{U}' = \{\mathbb{D}'_a \mid a\} \cup \{\mathbf{int}(\mathbb{M})\}. \qquad (51)$$

دیده میشود $\mathbb{U}'$ یک پوشش ِ باز برا یِ $\mathbb{M}$ است. این پوشش ِ باز یک زیرپوشش ِ باپایان دارد، چون $\mathbb{M}$ فشرده است. این زیرپوشش را $\mathbb{U}''$ مینامم. به سادگی دیده میشود $\mathbb{U}'''$ با

$$\mathbb{U}''' = \{\mathbb{D}_a \mid \mathbb{D}'_a \in \mathbb{U}''\}, \qquad (52)$$

یک زیرپوشش ِ باپایان ِ $\mathbb{U}$ برا یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ است.

4 خمینه یِ سمتپذیر

$\mathbb{A}$ یک اتلس است و ϕ و ϕ' دُ نقشه در آن َند. دستیدِگی یِ ϕ' نسبت به ϕ را با $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ نشان میدهم. $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ را تابع ی تعریف میکنم که دامنه اَش $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ است و

$$[\mathsf{sgn}_\phi(\phi')](x) = \Big(\mathsf{sgn}\{\det[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})]\}\Big)[\phi(x)]. \tag{53}$$

رُشن است که

$$\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi) = \mathsf{sgn}_\phi(\phi'). \tag{54}$$

همچنین، رُشن است که $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ پیوسته است. پس اگر $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ همبند باشد تصویر ِ $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ هم همبند است. اگر $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ تهی نباشد، تصویر ِ $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ یا یک مجموعه یِ یک-نقطِئی ست ($\{1\}$ یا $\{-1\}$)، یا یک مجموعه یِ دُ-نقطِئی ($\{1, -1\}$). مجموعه یِ دُ-نقطِئی همبند نیست. پس اگر $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ همبند باشد، $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ یک تابع ِ ثابت است. میگویم نقشه یِ ϕ' نسبت به نقشه یِ ϕ همدستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ همواره 1 باشد. میگویم نقشه یِ ϕ' نسبت به نقشه یِ ϕ پاددستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_\phi(\phi')$ همواره -1 باشد. به این ترتیب معلوم میشود اگر ϕ و ϕ' دُ نقشه باشند که $[\mathsf{dom}(\phi) \cap \mathsf{dom}(\phi')]$ همبند و ناتهی باشد، یا ϕ' نسبت به ϕ همدستیده است یا ϕ' نسبت به ϕ پاددستیده است.

میگویم اتلس ِ $\mathbb{A}$ تکدست است، اگر هر دُ-نقشه یِ آن نسبت به هم همدستیده باشند. میگویم خمینه یِ $\mathbb{M}$ سمتپذیر است، اگر این خمینه یک اتلس ِ تکدست داشته باشد.

$\mathbb{A}$ یک اتلس ِ تکدست و ϕ و نقشه است، چنان که $\mathbb{A} \cup \{\phi\}$ هم یک اتلس است. به سادِگی دیده میشود اگر ϕ_1 و ϕ_2 دو نقشه در $\mathbb{A}$ باشند،

$$\forall\, x \in \{[\mathsf{dom}(\phi)] \cap [\mathsf{dom}(\phi_1)] \cap [\mathsf{dom}(\phi_2)]\} \;:\; [\mathsf{sgn}_{\phi_2}(\phi)](x) = [\mathsf{sgn}_{\phi_1}(\phi)](x). \tag{55}$$

از اینجا تابع ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ با دامنه یِ $\mathsf{dom}(\phi)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\Big[\Big(\forall\, x \in \{[\mathsf{dom}(\phi)] \cap [\mathsf{dom}(\phi')]\}\Big) \mid \phi' \in \mathbb{A}\Big] \;:$$
$$[\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)](x) = [\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi)](x). \tag{56}$$

رابطه یِ (55) تضمین میکند $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. به $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ دستیدِگی یِ نقشه یِ ϕ نسبت به اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}$ میگویم. با استدلال ی مشابه ِ آن چه در مُرد ِ $\mathsf{sgn}_{\phi}(\phi')$ به کار رفت، معلوم میشود اگر $\mathsf{dom}(\phi)$ همبند باشد، $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ یک تابع ِ ثابت است. میگویم نقشه یِ ϕ نسبت به اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}$ همدستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ همواره 1 باشد. میگویم نقشه یِ ϕ نسبت به اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}$ پاددستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ همواره -1 باشد. به این ترتیب معلوم میشود اگر $\mathbb{A}$ یک اتلس ِ تکدست و ϕ یک نقشهِ با دامنه ای همبند باشد و $\mathbb{A} \cup \{\phi\}$ هم یک اتلس باشد، یا ϕ نسبت به $\mathbb{A}$ همدستیده است یا ϕ نسبت به $\mathbb{A}$ پاددستیده است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتپذیر است، $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ دو اتلس ِ تکدست ِ آن َند، و $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$ هم یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ است. به سادِگی دیده میشود اگر ϕ_1 و ϕ_2 دُ-نقشه در $\mathbb{A}'$ باشند،

$$\forall\, x \in \{[\mathsf{dom}(\phi_1)] \cap [\mathsf{dom}(\phi_2)]\} \;:\; [\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi_2)](x) = [\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi_1)](x). \qquad (57)$$

از اینجا تابع ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ با دامنه یِ $\mathbb{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\{\forall\, x \in [\mathsf{dom}(\phi)] \mid \phi \in \mathbb{A}'\} \;:\; [\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')](x) = [\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)](x), \qquad (58)$$

اینجا هم (57) تضمین میکند $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ خُش-تعریف است. به $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ دستیدِگی یِ اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}'$ نسبت به اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}$ میگویم. با استدلال ی مشابه ِ آن چه در مُرد ِ $\mathsf{sgn}_{\phi}(\phi')$ و $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ به کار رفت، معلوم میشود اگر دامنه یِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ همبند باشد، تصویر ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ تک-نقطِئی ست. دامنه یِ این تابع $\mathbb{M}$ است. پس اگر $\mathbb{M}$ همبند باشد، $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ یک تابع ِ ثابت است. میگویم $\mathbb{A}$ نسبت به $\mathbb{A}'$ همدستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ همواره 1 باشد. میگویم $\mathbb{A}$ نسبت به $\mathbb{A}'$ پاددستیده است، اگر مقدار ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ همواره -1 باشد. رُشن است که این رابطه که یک اتلس ِ تکدست نسبت به یک اتلس ِ تکدست ِ دیگر همدستیده باشد یک رابطه یِ همئرزی ست. به علاوه، رُشن است که همدستیده-بودن ِ $\mathbb{A}$ نسبت به $\mathbb{A}'$ همئرز با این است که $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$ تکدست باشد. همچنین، رُشن است که اگر $\mathbb{A}_1$ و $\mathbb{A}_2$ نسبت به $\mathbb{A}$ پاددستیده باشند، $\mathbb{A}_1$ و $\mathbb{A}_2$ نسبت به هم همدستیده اند. سرانجام، دیده شد اگر $\mathbb{M}$ سمتپذیر و همبند باشد، $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ دو اتلس ِ تکدست ِ آن باشند، و $\mathbb{A} \cup \mathbb{A}'$ هم یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ باشد، $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}')$ یک تابع ِ ثابت است. پس $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ یا نسبت به هم همدستیده اند یا نسبت به هم پاددستیده اند. به این ترتیب، مجموعه یِ اتلسها یی از این نُع به دُ رده افراز میشود. به $\mathbb{M}$ همراه با یک ی از این دُ-رده یک خمینه یِ سمتدار میگویم. اگر یک اتلس ِ $\mathbb{M}$ در هم ین رده یِ همئرزی

باشد، میگویم آن اتلس با $\mathbb{M}$ همدستیده است. همچنین اگر یک نقشه با اتلسها یِ این رده همدستیده باشد، میگویم آن نقشه با خمینه همدستیده است. متناظر با نقشه یِ ϕ، با تغییردادن ِ $\mathbb{A}$ در اتلسها یِ این رده نگاشت ِ $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(\phi)$ تغییر نمیکند. پس شاخص ِ $\mathbb{A}$ را از آن بر میدارم. به $\mathsf{sgn}(\phi)$ دستیدِگی یِ ϕ میگویم. برا یِ یک اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}'$ هم به طُر ِ مشابه، دستیدِگی یِ $\mathbb{A}'$ را با $\mathsf{sgn}(\mathbb{A}')$ نشان میدهم.

نشان میدهم اگر $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتپذیر باشد، $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم سمتپذیر است. برا یِ این کار $\mathbb{A}$ را یک اتلس ِ $\mathbb{M}$، و $\tilde{\phi}$ و $\tilde{\phi}'$ را دُ نقشه میگیرم که از نقشِها یِ ϕ و ϕ' بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ القا شده اند، و اشتراک ِ دامنِها یِشان شامل ِ x است. (20) برقرار است و $\{[\boldsymbol{D}(\phi'\circ\phi^{-1})]^0{}_0\}[\phi(x)]$ صفر نیست. ضمنَن $[(\phi'\circ\phi^{-1})]^0$ در $X^0=0$ بیشینه (صفر) و در $X^0<0$ منفی ست. از این نتیجه میشود

$$\{[\boldsymbol{D}(\phi'\circ\phi^{-1})]^0{}_0\}[\phi(x)]>0. \tag{59}$$

به این ترتیب،

$$\Big(\mathsf{sgn}\{\mathsf{det}[\boldsymbol{D}(\tilde{\phi}'\circ\tilde{\phi}^{-1})]\}\Big)[\phi(x)]=\Big(\mathsf{sgn}\{\mathsf{det}[\boldsymbol{D}(\phi'\circ\phi^{-1})]\}\Big)[\phi(x)]. \tag{60}$$

پس اگر ϕ' نسبت به ϕ همدستیده (پاددستیده) باشد، نقشه یِ القاییده از ϕ' بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم نسبت به نقشه یِ القاییده از ϕ بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ همدستیده (پاددستیده) است. از جمله نتیجه میشود اگر $\mathbb{A}$ یک اتلس ِ تکدست برا یِ $\mathbb{M}$ باشد، اتلس ِ القاییده از $\mathbb{A}$ بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم یک اتلس ِ تکدست برا یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ است. به این ترتیب، اگر $\mathbb{M}$ سمتپذیر باشد $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم چنین است. سرانجام، اگر $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ دو اتلس ِ تکدست برا یِ $\mathbb{M}$ باشند، اگر $\mathbb{A}'$ نسبت به $\mathbb{A}$ همدستیده (پاددستیده) باشد، اتلس ِ القاییده از $\mathbb{A}'$ بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ هم نسبت به اتلس ِ القاییده از $\mathbb{A}$ بر $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ همدستیده (پاددستیده) است.

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{N}$ دُ خمینه اند و f در $\mathsf{HF}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ است. به سادِگی دیده میشود اگر یک ی از این خمینِها سمتدار باشد دیگری هم چنین است. مثلَن اگر $\mathbb{N}$ سمتدار باشد، متناظر با هر نقشه یِ ϕ در یک اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{N}$، تابع ِ $\phi\circ f$ یک نقشه برا یِ $\mathbb{M}$ است و به سادِگی دیده میشود مجموعه یِ شامل ِ این نقشِها یک اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{M}$ است.

5 مشتقپذیری یِ تابع

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است، که $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ خمینه اند. اتلسها یِ متناظر با این خمینِها را با به ترتیب $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ نشان میدهم. متناظر با ϕ_a در $\mathbb{A}$ و ϕ'_b در $\mathbb{A}'$ با دامنِها یِ به ترتیب $\mathbb{U}_a$ و $\mathbb{U}'_b$، میگویم f در

$x \in \{[f^{-1}(\mathbb{U}'_b)] \cap \mathbb{U}_a\}$، با نقشِها یِ ϕ_a و ϕ'_b هموار (k بار مشتقپذیر) است، اگر $[\phi'_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}]$ در $\phi_a(x)$ هموار (k بار مشتقپذیر) باشد. متناظر با ϕ_c در $\mathbb{A}$ و ϕ'_d در $\mathbb{A}'$،

$$\begin{aligned} &\mathsf{res}\{[\phi'_d \circ f \circ (\phi_c)^{-1}]; \mathbb{D}\}) \\ &= \mathsf{res}\Big(\{[\phi'_d \circ (\phi'_b)^{-1}] \circ [\phi'_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}] \circ [\phi_a \circ (\phi_c)^{-1}]\}; \mathbb{D}\Big), \end{aligned} \tag{61}$$

که

$$\mathbb{D} = \Big(\phi_c\{[f^{-1}(\mathbb{U}'_d)] \cap \mathbb{U}_c\}\Big) \cap \Big(\phi_c\{[f^{-1}(\mathbb{U}'_b)] \cap \mathbb{U}_a\}\Big). \tag{62}$$

اگر ضمنَن x در $\{[f^{-1}(\mathbb{U}'_d)] \cap \mathbb{U}_c\}$ باشد، آنگاه از (61)، هموار-بودن ِ $[\phi'_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}]$ در $\phi_a(x)$، این که تابعها یِ تغییر- ِ-مختصات وابرریختی یَند، و قاعده یِ زنجیرِئی یِ مشتقگیری نتیجه میشود $[\phi'_d \circ f \circ (\phi_c)^{-1}]$ در $\phi_c(x)$ هموار است. پس تعریف ِ هموار‌بودن (k بار مشتقپذیربودن) مستقل از نقشه است. میگویم f در یک مجموعه هموار (k بار مشتقپذیر) است، اگر f در همه یِ نقطِها یِ آن مجموعه هموار (k بار مشتقپذیر) باشد.

اینها یعنی برا یِ بررسی یِ هموار-بودن ِ یک تابع، از رو یِ آن تابع و نقشِها یک تابع ِ دیگر میسازم که از یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^m$ به یک زیرمجموعه از $\mathbb{R}^{m'}$ است، که m و m' بُعدها یِ به ترتیب $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ اند. هموار-بودن ِ تابع ِ اصلی را همئرز با هموار-بودن ِ این تابع تعریف میکنم. به خاطر ِ هموار-بودن ِ تابعها یِ تغییر- ِ-مختصات، این تعریف مستقل از نقشه است.

دُ حالت ِ خاص: به تابع ِ f در $\mathsf{F}(\mathbb{R}; \mathbb{M})$ یک تابع ِ حقیقی یا یک میدان ِ اسکالر میگویم. اگر $\mathbb{M}$ یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد، به تابع ِ $f \in \mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$ یک خم در $\mathbb{M}'$ میگویم.

$\mathbb{M}$ یک خمینه و $\mathbb{S}$ یک زیرمجموعه یِ آن است. میگویم $\mathbb{S}$ یک زیرخمینه یِ $\mathbb{M}$ است، اگر $\mathbb{S}$ با تپُلژی یِ القاییده از $\mathbb{M}$ خمینه باشد و تحدید ِ نقشِها یِ $\mathbb{M}$ به $\mathbb{S}$ هموار باشد. به این ترتیب معلوم میشود اگر $\mathbb{M}$ خمینه باشد $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ و $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ زیرخمینه یِ $\mathbb{M}$ اند.

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ خمینِها یی بیمرز َند. $\mathbb{M}_i$ زیرمجموعه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ نیست. اما با تعریفها یِ

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1(x_2) &= \mathbb{M}_1 \times \{x_2\}, \quad x_2 \in \mathbb{M}_2, \\ \mathbb{M}_2(x_1) &= \{x_1\} \times \mathbb{M}_2, \quad x_1 \in \mathbb{M}_1, \end{aligned} \tag{63}$$

دیده میشود $\mathbb{M}_1(x_2)$ و $\mathbb{M}_2(x_1)$ زیرمجموعه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ اند. تپُلژیها یِ القاییده از $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ بر $\mathbb{M}_1(x_2)$ و $\mathbb{M}_2(x_1)$ را با، به ترتیب، $\mathbb{T}_1(x_2)$ و $\mathbb{T}_2(x_1)$ نشان میدهم. به سادِگی دیده میشود

$$\mathbb{T}_1(x_2) = \mathbb{T}_1 \times \{\{x_2\}\},$$
$$\mathbb{T}_2(x_1) = \{\{x_1\}\} \times \mathbb{T}_2, \tag{64}$$

که $\mathbb{T}_i$ تپُلژی یِ $\mathbb{M}_i$ است. دیده میشود هر یک از مجموعِها یِ $\mathbb{M}_1(x_2)$ و $\mathbb{M}_2(x_1)$ یک زیرخمینه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ است.

تعریف میکنم

$$\overset{j}{\mathbf{\Pi}}_{i_1,\ldots i_k}(x_j,\ldots,x_n) = (x_{i_1},\ldots,x_{i_k}),$$
$$\mathbf{\Pi}_{i_1,\ldots i_k}(x_1,\ldots,x_n) = (x_{i_1},\ldots,x_{i_k}), \tag{65}$$

که تعریف ِ اخیر یعنی

$$\mathbf{\Pi} = \overset{1}{\mathbf{\Pi}}. \tag{66}$$

برا یِ تابعها یِ $\mathbf{\Pi}_i$ با دامنه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$،

$$[\mathbf{\Pi}_1(\centerdot, x_2)] \in \mathsf{F}[\mathbb{M}_1; \mathbb{M}_1(x_2)],$$
$$[\mathbf{\Pi}_2(x_1, \centerdot)] \in \mathsf{F}[\mathbb{M}_2; \mathbb{M}_2(x_1)], \tag{67}$$

و البته رُشن است که $[\mathbf{\Pi}_1(\centerdot, x_2)]$ در $\mathbb{M}_1$، و $[\mathbf{\Pi}_2(x_1, \centerdot)]$ در $\mathbb{M}_2$ پوشا ست. از اینجا معلوم میشود $\mathbb{M}_1$ با $\mathbb{M}_1(x_2)$، و $\mathbb{M}_2$ با $\mathbb{M}_2(x_1)$ همانریخت است. به جا یِ این که بگویم $\mathbb{M}_i$ با یک زیرخمینه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ همانریخت است، سادِتر میگویم $\mathbb{M}_i$ زیرخمینه یِ $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ است.

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'_1$ و $\mathbb{M}'_2$ خمینه اند و f_1 و f_2 تابع َند، چنان که f_i در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'_i; \mathbb{M})$ است. ϕ را نقشه ای برا یِ $\mathbb{M}$، و ϕ'_i را نقشه ای برا یِ $\mathbb{M}'_i$ میگیرم. دیده میشود

$$(\phi'_1 \times \phi'_2) \circ (f_1, f_2) \circ \phi^{-1} = [(\phi'_1 \circ f_1 \circ \phi^{-1}), (\phi'_2 \circ f_2 \circ \phi^{-1})]. \tag{68}$$

طرف ِ چپ در $\mathsf{F}[\mathbb{R}^{m'_1+m'_2}; \mathsf{dom}(\phi^{-1})]$ است، که m'_i بُعد ِ $\mathbb{M}'_i$ است. $(\phi'_i \circ f_i \circ \phi^{-1})$ هم در $\mathsf{F}[\mathbb{R}^{m'_i}; \mathsf{dom}(\phi^{-1})]$ است. پس (f_1, f_2) مشتقپذیر است، اگر و تنها اگر f_1 و f_2 هر-دُ مشتقپذیر

باشند. البته هر f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'_1 \times \mathbb{M}'_2; \mathbb{M})$ را میشود به شکل ِ (f_1, f_2) با $f_i \in \mathsf{F}(\mathbb{M}'_i; \mathbb{M})$ نوشت. کافی ست تعریف شود

$$f_i = \mathbf{\Pi}_i \circ f. \tag{69}$$

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ و $\mathbb{M}'$ خمینه اند و f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ است. $f(\cdot, x_2)$ در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M}_1)$، و $f(x_1, \cdot)$ در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M}_2)$ است. مشتقپذیر-بودن ِ f همئرز با مشتقپذیر-بودن ِ $\phi' \circ f \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})$ است، که ϕ_i نقشه ای برا یِ $\mathbb{M}_i$، و ϕ' نقشه ای برا یِ $\mathbb{M}'$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned} \phi' \circ [f(\cdot, x_2)] \circ \phi_1^{-1} &= [\phi' \circ f \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})][\cdot, \phi_2(x_2)], \\ \phi' \circ [f(x_1, \cdot)] \circ \phi_2^{-1} &= [\phi' \circ f \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})][\phi_2(x_2), \cdot]. \end{aligned} \tag{70}$$

پس اگر $\phi' \circ f \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})$ مشتقپذیر باشد، آنگاه $\phi' \circ [f(\cdot, x_2)] \circ \phi_1^{-1}$ و $\phi' \circ [f(x_1, \cdot)] \circ \phi_2^{-1}$ هم مشتقپذیر اند. پس اگر f مشتقپذیر باشد، $f(\cdot, x_2)$ و $f(x_1, \cdot)$ هم مشتقپذیر َند.

F در $\mathsf{F}(\mathbb{R}^{m'}; \mathbb{D}_1 \times \mathbb{D}_2)$ است، که $\mathbb{D}_i$ یک زیرمجموعه یِ باز ِ $\mathbb{R}^{m_i}$ است. از مشتقپذیر-بودن ِ $F(\cdot, X_2)$ و $F(X_1, \cdot)$ لزومَن نتیجه نمیشود F مشتقپذیر است. از مشتقپذیر-بودن ِ $F(\cdot, X_2)$ و $F(X_1, \cdot)$، همراه با پیوسته-بودن ِ این مشتقها در (X_1, X_2) نتیجه میشود F در (X_1, X_2) مشتقپذیر است و مشتق َش پیوسته است. پس F مشتقپذیر است و مشتق َش پیوسته است، اگر و تنها اگر $F(\cdot, X_2)$ و $F(X_1, \cdot)$ چنین باشند. حالت ِ خاص ِ این گذارها آن است که وجود ِ مشتقها یِ پارِئی یِ F مشتقپذیر-بودن ِ F را نتیجه نمیدهد. اما اگر مشتقها یِ پارِئی یِ F پیوسته باشند، F مشتقپذیر و مشتق َش پیوسته است. یعنی F مشتقپذیر است و مشتق َش پیوسته است، اگر و تنها اگر مشتقها یِ پارِئی یِ F وجود داشته باشند و پیوسته باشند.

به این ترتیب، از مشتقپذیر-بودن ِ $\phi' \circ [f(\cdot, x_2)] \circ \phi_1^{-1}$ و $\phi' \circ [f(x_1, \cdot)] \circ \phi_2^{-1}$ لزومَن نتیجه نمیشود $\phi' \circ f \circ (\phi_1^{-1} \times \phi_2^{-1})$ مشتقپذیر است. این یعنی از مشتقپذیر-بودن ِ $f(\cdot, x_2)$ و $f(x_1, \cdot)$ لزومَن نتیجه نمیشود f هم مشتقپذیر است. البته اگر $f(\cdot, x_2)$ و $f(x_1, \cdot)$ مشتقپذیر باشند، و این مشتقها (که بعدَن تعریف ِشان میکنم) پیوسته باشند، آنگاه f هم مشتقپذیر است (و مشتق َش پیوسته است).

6 پارشِ یک

$\mathbb{M}$ یک خمینه و $\mathbb{A} = \{\phi_a \mid a\}$ یک اتلس برا یِ آن است. به مجموعه یِ $\{p_a \mid a\}$ یک پارشِ (باپایانِ هموارِ) یک متناظر با $\mathbb{A}$ میگویند اگر این ویژگیها برقرار باشد.

b1 $\forall\, a \;:\; [p_a \in \mathsf{F}(\mathbb{R}_{0+}; \mathbb{M})].$

b2 $\forall\, a \;:\; \{[x \notin \mathsf{dom}(\phi_a)] \Rightarrow [p_a(x) = 0]\}.$

b3 متناظر با هر نقطه یک همسایگی یِ آن هست که در آن فقط تعدادِ باپایان ی از p_a ها ناصفر َند.

b4 $\sum_a p_a = 1.$

b5 همه یِ p_a ها هموار َند.

اگر $\mathbb{M}$ فشرده باشد، آنگاه یک اتلسِ $\mathbb{A}$ برا یِ $\mathbb{M}$ هست که متناظر با آن یک پارش-ِ-یک هست. برا یِ اثبات، $\mathbb{A}_0$ را یک اتلسِ $\mathbb{M}$ میگیرم. متناظر با هر $x \in \mathbb{M}$ یک $\phi_x \in \mathbb{A}_0$ هست که

$$x \in \mathsf{dom}(\phi_x). \tag{71}$$

در این صورت یک $r_x > 0$ هست که

$$\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)] \subseteq \mathsf{img}(\phi_x); \tag{72}$$

مجموعِها یِ بازِ $\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}$ شاملِ x اند. اجتماعِ این مجموعِها یک پوششِ بازِ برا یِ $\mathbb{M}$ است. چون $\mathbb{M}$ فشرده است، این پوششِ باز یک زیرپوششِ باپایان دارد. پس یک زیرمجموعه یِ باپایانِ $\mathbb{S}$ از $\mathbb{M}$ هست که

$$\bigcup_{x \in \mathbb{S}} \Big(\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\Big) = \mathbb{M}. \tag{73}$$

تصویرِ هر یک از اعضا یِ $\mathbb{S}$ تحتِ نقشه یِ متناظر، یک گوی در $\mathbb{R}^m_{-0}$ است، که m بُعدِ $\mathbb{M}$ است. تعریف میکنم

$$\mathbb{A} = \Big\{\mathsf{res}\Big(\phi_x; \phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\Big) \;\Big|\; x \in \mathbb{S}\Big\}. \tag{74}$$

دیده میشود $\mathbb{A}$ یک اتلسِ باپایانِ $\mathbb{M}$ است. متناظر با هر x در $\mathbb{S}$، تابعِ ρ_x در $\mathsf{F}(\mathbb{R}_{+0};\mathbb{M})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\rho_x(y)=\begin{cases} r_x-|\phi_x(y)-\phi_x(x)|, & y\in\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\\ 0, & y\notin\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\end{cases}. \tag{75}$$

اگر $\phi_x(y)$ بیرونِ گویِ متناظر با x باشد، $\rho_x(y)$ صفر است. در غیرِ این صورت $\rho_x(y)$ فاصله یِ $\phi_x(y)$ از مرزِ گو یِ متناظر با x (در $\mathbb{R}^m$) است. متناظر با هر x در $\mathbb{S}$، تابعِ $\mathfrak{p}_x$ در $\mathsf{F}(\mathbb{R}_{0+};\mathbb{M})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{p}_x(y)=\begin{cases} \exp\left[-\dfrac{1}{\rho_x(y)}\right], & y\in\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\\ 0, & y\notin\phi_x^{-1}\{\mathsf{nei}_{r_x}[\phi_x(x)]\}\end{cases}. \tag{76}$$

سرانجام متناظر با هر x در $\mathbb{S}$، تابعِ p_x در $\mathsf{F}(\mathbb{R}_{0+};\mathbb{M})$ را چنین تعریف میکنم.

$$p_x=\frac{\mathfrak{p}_x}{\mathfrak{p}}, \tag{77}$$

که

$$\mathfrak{p}=\sum_{x\in\mathbb{S}}\mathfrak{p}_x. \tag{78}$$

به سادگی دیده میشود تابعها یِ p_x با $x\in\mathbb{S}$ ویژگیها یِ **b1** تا **b5** را دارند. همچنین، به سادگی دیده میشود اگر $\mathbb{A}_0$ تکدست باشد، $\mathbb{A}$ هم تکدست و همدستیده با $\mathbb{A}_0$ است. پس یک خمینه یِ سمتدارِ فشرده هم یک اتلسِ باپایان و یک پارش-ِ-یک با مشخصاتِ بالا دارد.

همچنین به سادگی دیده میشود اگر $\{p_a\mid a\}$ یک پارش-ِ-یک برا یِ خمینه یِ $\mathbb{M}$ باشد، $\{\mathsf{res}[p_a;\mathbf{int}(\mathbb{M})]\mid a\}$ یک پارش-ِ-یک برا یِ $\mathbf{int}(\mathbb{M})$ و $\{\mathsf{res}[p_a;\mathbf{b}(\mathbb{M})]\mid a\}$ یک پارش-ِ-یک برا یِ $\mathbf{b}(\mathbb{M})$ است.

$\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ دُ اتلس برا یِ $\mathbb{M}$ اند و $\{p_a\mid a\}$ و $\{p'_b\mid b\}$ هم دُ پارش-ِ-یک متناظر با به ترتیب $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ اند. به سادگی دیده میشود اگر $\mathbb{A}\cup\mathbb{A}'$ هم یک اتلس باشد، یک پارش-ِ-یک متناظر با آن هم هست: $\{p_a\,p'_b\mid(a,b)\}$ یک پارش-ِ-یک متناظر با $\mathbb{A}\cup\mathbb{A}'$ است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ فشرده و ϕ یک نقشه از آن است، و p در $\mathcal{CF}(\mathbb{R}_{0+};\mathbb{M})$ است و بیرونِ $\mathsf{dom}(\phi)$ صفر است. نشان میدهم

$$\lim_{\mathfrak{s}(X)\to 0^+}(p\circ\phi^{-1})(X)=0, \tag{79}$$

که $\mathfrak{s}(X)$ فاصله یِ X از مرزِ $\mathsf{img}(\phi)$ است:

$$\mathfrak{s}(X)=\sup\{r\mid[\mathsf{nei}_r(X)]\subseteq[\mathsf{img}(\phi)]\}. \tag{80}$$

برا یِ اثبات یک εِ مثبت میگیرم. تعریف میکنم

$$\mathbb{B}_0=p^{-1}[0,\varepsilon), \tag{81}$$

$$\mathbb{B}_n=\phi^{-1}\left\{X\in\mathsf{img}(\phi)\;\middle|\;\mathfrak{s}(X)>\frac{S}{n}\right\},\quad n\in\mathbb{N}, \tag{82}$$

که S یک عددِ مثبتِ دلبخاه است. دیده میشود

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{B}_n=\mathsf{dom}(\phi), \tag{83}$$

و از آنجا،

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{B}_n\right)\bigcup\mathbb{B}_0=\mathbb{M}. \tag{84}$$

$\mathbb{B}_n$ ها (با nِ صحیحِ نامنفی) مجموعِها یی باز َند، چون اثرِ وارونِ تابعها یی پیوسته بر مجموعِها یی باز َند. پس $\{\mathbb{B}_n\mid 0\le n\}$ یک پوششِ باز برا یِ $\mathbb{M}$ است. چون $\mathbb{M}$ فشرده است، این پوشش شاملِ یک زیرپوششِ باپایان برا یِ $\mathbb{M}$ است. این یعنی یک N هست که $\{\mathbb{B}_n\mid 0\le n\le N\}$ یک پوششِ بازِ $\mathbb{M}$ است. از جمله،

$$\left(\bigcup_{1\le n\le N}\mathbb{B}_n\right)\supseteq p^{-1}[\varepsilon,\infty). \tag{85}$$

پس

$$\left[\mathfrak{s}(X)<\frac{S}{N}\right]\Rightarrow[0\le(p\circ\phi^{-1})(X)<\varepsilon], \tag{86}$$

که (79) را نشان میدهد.

7 کلاف

$\mathbb{E}$ و $\mathbb{Y}$ فضاها یی تپُلژیک َند، $\mathbb{M}$ خمینه است، و $\boldsymbol{\pi}$ در $\mathsf{CF}(\mathbb{M};\mathbb{E})$ است. میگویم اینها یک کلاف َند (یا سادِتر خُد ِ $\mathbb{E}$ یک کلاف است)، اگر این ویژِگیها برقرار باشد.

c1 تپُلژی یِ $\mathbb{M}$ همان تپُلژی یِ القا شده از $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{\pi}$ است.

c2 $\boldsymbol{\pi}^{-1}(x) \mathrel{\hat{=}} \mathbb{Y}.$

c3 متناظر با هر نقشه یِ ϕ از $\mathbb{M}$، یک U در $\mathsf{HF}[\mathbb{E};\mathsf{dom}(\phi)\times\mathbb{Y}]$ هست که

$U(\{x\}\times\mathbb{Y}) = \boldsymbol{\pi}^{-1}(x)$

به $\boldsymbol{\pi}^{-1}(x)$ تار در نقطه یِ x میگویم و آن را با $\mathbb{E}_x$ نمایش میدهم. به $\mathbb{M}$ خمینه یِ پایه، به $\mathbb{Y}$ تار ِ نُعی، و به $\boldsymbol{\pi}$ افکنش میگویم. به U بدیهیگر ِ متناظر با ϕ، و به $\boldsymbol{\pi}(z)$ مبنا یِ z میگویم. از **c3** دیده میشود اگر ϕ_a و ϕ_b دُ نقشه و U_a و U_b بدیهیگرها یِ متناظر با آنها باشند، یک تابع ِ $U_{a\,b}\in\mathsf{F}\{\mathbb{Y};[\mathsf{dom}(\phi_a)\cap\mathsf{dom}(\phi_b)]\times\mathbb{Y}\}$ هست که

$$\forall\, x\in[\mathsf{dom}(\phi_a)\cap\mathsf{dom}(\phi_b)]\ :\ [U_a^{-1}\circ U_b](x,\boldsymbol{.}) = [x, U_{a\,b}(x,\boldsymbol{.})], \tag{87}$$

چنان که

$$U_{a\,b}(x,\boldsymbol{.})\in\mathsf{HF}(\mathbb{Y};\mathbb{Y}),$$
$$U_{a\,b}(x,\mathbb{Y}) = \mathbb{Y}. \tag{88}$$

به $U_{a\,b}$ ها تابعها یِ گذار میگویم. دیده میشود (87) همئرز است با

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0\circ U_a^{-1}\circ U_b)(\boldsymbol{.},y) = \mathbf{1}, \tag{89}$$

و

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}\circ U_b = U_{a\,b}. \tag{90}$$

رابطه یِ اخیر را میشود چنین نوشت.

$$U_{a\,b}\circ(\boldsymbol{\pi},\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U_b^{-1}) = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}. \tag{91}$$

از جمله دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi} = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0 \circ U_a^{-1}, \tag{92}$$

که U_a یک بدیهیگر است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\pi} \circ U_a = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0. \tag{93}$$

تعریف ِ بالا برا یِ کلاف یعنی کلاف ِ $\mathbb{E}$ مُضعَن با $\mathbb{M} \times \mathbb{Y}$ همانریخت است. پس مُضعَن (متناظر با یک بدیهیگر ِ U برا یِ کلاف) میشود به جا یِ یک عضو ِ کلاف دُ-تایی یِ (x, y) را به کار برد، که x عضو ِ خمینه-یِ-پایه است و y عضو ِ تار- ِ-نُعی ست، به شرط ی که نتایج ی که با این نمایش به دست میئاید مستقل از نقشه و بدیهیگر باشد. از جمله افکنش $U(x, y)$ را بر x مینگارَد.

اما این همانریختی لزومَن سراسری نیست: برا یِ ساختن ِ یک کلاف، خمینه-یِ-پایه و تار- ِ-نُعی کافی نیستند، تابع- ِ-گذارها هم لازم َند. نشان میدهم با داشتن ِ اینها میشود کلاف را ساخت:

$\mathbb{M}$ یک خمینه و $\mathbb{Y}$ یک فضا یِ تپُلژیکی ست، چنان که متناظر با هر دُ-نقشه یِ ϕ_a و ϕ_b تابع ِ $U_{a\,b}$ در $\mathsf{F}\{\mathbb{Y}; [\mathsf{dom}(\phi_a) \cap \mathsf{dom}(\phi_b)] \times \mathbb{Y}\}$ است، با این ویژگیها که (88) برقرار است،

$$U_{a\,a}(x, \cdot) = \mathbf{1}_{\mathbb{Y}}, \tag{94}$$

و اگر x در $[\mathsf{dom}(\phi_a) \cap \mathsf{dom}(\phi_b) \cap \mathsf{dom}(\phi_c)]$ باشد،

$$[U_{a\,b}(x, \cdot)] \circ [U_{b\,c}(x, \cdot)] = U_{a\,c}(x, \cdot). \tag{95}$$

تعریف میکنم

$$\tilde{\mathbb{E}} = \bigcup_{\phi \in \mathbb{A}} \Big(\{\phi\} \times [\mathsf{dom}(\phi)] \times \mathbb{Y} \Big), \tag{96}$$

که $\mathbb{A}$ اتلس ِ $\mathbb{M}$ است. متناظر با (x_a, y_a) در $[\mathsf{dom}(\phi_a) \times \mathbb{Y}]$ و (x_b, y_b) در $[\mathsf{dom}(\phi_b) \times \mathbb{Y}]$، تعریف میکنم

$$(\phi_a, x_a, y_a) \doteqdot (\phi_b, x_b, y_b), \tag{97}$$

اگر

$$x_a = x_b, \tag{98}$$

$$y_a = U_{a\,b}(x_b, y_b). \tag{99}$$

به سادِگی دیده میشود $\doteqdot$ یک رابطه یِ همئرزی ست. تعریف میکنم

$$\mathbb{E} = \tilde{\mathbb{E}}/\doteqdot\,. \tag{100}$$

متناظر با هر عضو ِ حاصل- ِ-ضرب ِ دِکَرتی یِ تپُلژیها یِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{Y}$، خارج- ِ-قسمت ِ این عضو بر $\doteqdot$ را میگیرم. تپُلژی یِ $\mathbb{E}$ را مجموعه یِ اجتماعها یِ دلبخاه ِ این خارج- ِ-قسمتها میگیرم. همچنین برا یِ (x, y) در $[\mathsf{dom}(\phi) \times \mathbb{Y}]$ تعریف میکنم

$$\boldsymbol{\pi}[\mathsf{eq}_{\doteqdot}(\phi, x, y)] = x, \tag{101}$$

$$U(x, y) = \mathsf{eq}_{\doteqdot}(\phi, x, y). \tag{102}$$

به سادِگی دیده میشود $\mathbb{E}$ با $\mathbb{M}$ و $\boldsymbol{\pi}$ یک کلاف است (که U بدیهیگر ِ متناظر با ϕ است).

به عنوان ِ یک مثال ِ ساده که معلوم شود تابعها یِ گذار هم (علاوه بر $\mathbb{M}$ و $\mathbb{Y}$) لازم َند، $\mathbb{M}$ را یک دایره و $\mathbb{Y}$ را $\{0, 1\}$ (با تپُلژی یِ گسسته) میگیرم. هر نقطه یِ دایره را با زاویه یِ آن مشخص میکنم. دایره یک اتلس ِ دُ-عضوی دارد: $\{\phi_1, \phi_2\}$ که $\phi_i(x)$ زاویه یِ x است و

$$0 < \phi_1(x) < 2\,\pi,$$

$$-\pi < \phi_2(x) < \pi. \tag{103}$$

تابع- ِ-گذار ِ $U_{1\,2}$ چنان است که $U_{1\,2}(\cdot, y)$ به ازا یِ هر مقدار ِ y پیوسته است، پس هر ناحیه یِ همبند را به یک ناحیه یِ همبند مینگارد و اثر ِ آن بر یک ناحیه یِ همبند نمیتواند یک مجموعه یِ دُ-نقطِئی باشد. $[\mathsf{dom}(\phi_1) \cap \mathsf{dom}(\phi_2)]$ اجتماع ِ دُ ناحیه یِ باز ِ همبند است. پس تحدید ِ $U_{1\,2}(\cdot, y)$ به هر یک از این دُ-ناحیه ثابت است. $\mathbb{E}$ را مثل ِ بالا میسازم. دُ حالت پیش میئاید. حالت ِ اول این است که $U_{1\,2}(\cdot, y)$ ثابت است. نشان میدهم در این حالت $\mathbb{E}$ با $(\mathbb{M} \times \mathbb{Y})$ همانریخت است. برا یِ اثبات

تابع ِ $\mathfrak{f}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{f}[U_1(x,y)] = (x,y), \quad 0 < \phi_1(x) < 2\,\pi,$$
$$\mathfrak{f}\{U_2[\phi_2^{-1}(0),y]\} = \{\phi_2^{-1}(0), U[\phi_2^{-1}(0),y]\}, \tag{104}$$

که $U(\cdot,y)$ یک تابع ِ ثابت با دامنه یِ $\mathbb{M}$ است، که

$$\mathsf{res}[U;\mathsf{dom}(U_{1\,2})] = U_{1\,2}. \tag{105}$$

رُشن است که U پیوسته است، و $\mathfrak{f}$ هم جز احتمالَن در $[\phi_2(x)=0]$ پیوسته است. از (104) نتیجه میشود

$$\mathfrak{f}[U_2(x,y)] = [x, U(x,y)], \quad -\pi < \phi_2(x) < \pi, \tag{106}$$

که نشان میدهد $\mathfrak{f}$ در $[\phi_2(x)=0]$ هم پیوسته است. از اینجا به سادِگی دیده میشود $\mathfrak{f}$ یک همانریختی از $\mathbb{E}$ به $(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})$ است که در $(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})$ پوشا ست.

در حالت ِ دوم $U_{1\,2}(\cdot,y)$ دُ مقدار میگیرد. نشان میدهم در این حالت $\mathbb{E}$ با یک دایره همانریخت است. تابعها یِ U_- و U_+ با دامنه یِ $\mathbb{M}\times\mathbb{Y}$ را چنان تعریف میکنم که $U_-(\cdot,y)$ و $U_+(\cdot,y)$ ثابت َند و

$$\mathsf{res}[U_-(\cdot,y);\phi_2^{-1}(-\pi,0)] = \mathsf{res}[U_{1\,2}(\cdot,y);\phi_2^{-1}(-\pi,0)],$$
$$\mathsf{res}[U_+(\cdot,y);\phi_2^{-1}(0,\pi)] = \mathsf{res}[U_{1\,2}(\cdot,y);\phi_2^{-1}(0,\pi)], \tag{107}$$

از اینجا تابع ِ $\mathfrak{g}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{g}[U_1(x,y)] = \frac{1}{2}[\phi_1(x) + 2\,\pi\,y], \quad 0 < \phi_1(x) < 2\,\pi,$$
$$\mathfrak{g}\{U_2[\phi_2^{-1}(0),y]\} = \pi\,\{U_-[\phi_2^{-1}(0),y] + 1\}. \tag{108}$$

دیده میشود $\mathfrak{g}$ همه جا جز در $[\phi_2(x)=0]$ پیوسته است. همچنین،

$$\mathfrak{g}[U_2(x,y)] = \frac{1}{2}[\phi_2(x) + 2\,\pi\,U_+(x,y)], \qquad 0 < \phi_2(x) < \pi,$$
$$\mathfrak{g}[U_2(x,y)] = \frac{1}{2}[\phi_2(x) + 2\,\pi + 2\,\pi\,U_-(x,y)], \quad -\pi < \phi_2(x) \le 0. \tag{109}$$

با استفاده از

$$U_+ + U_- = 1, \tag{110}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}\{U_2[\phi_2^{-1}(0), y]\} &= \lim_{\phi_2(x)\to 0^-} \mathfrak{g}[U_2(x,y)],\\ &= 2\,\pi\, U_-[\phi_2^{-1}(0), y] + \lim_{\phi_2(x)\to 0^+} \mathfrak{g}[U_2(x,y)].\end{aligned} \tag{111}$$

$U_-[\phi_2^{-1}(0), y]$ به ازا یِ یک مقدار ِ y برابر با صفر و به ازا یِ یک مقدار ِ دیگر ِ y برابر با یک است. به این ترتیب، به سادِگی دیده میشود $\mathfrak{g}$ در $(0, 2\,\pi]$ مقدار میگیرد و در آن پوشا ست، و همه جا جز در یک نقطه پیوسته است. در آن نقطه هم، ناپیوستِگی از نُع ِ پرش به اندازه یِ $2\,\pi$ است. تابع ِ χ از یک دایره به $\mathbb{R}$ را زاویه ای تعریف میکنم که در $(0, 2\,\pi]$ مقدار میگیرد. به سادِگی دیده میشود $(\chi^{-1} \circ \mathfrak{g})$ یک همانریختی از $\mathbb{E}$ به دایره است که در دایره پوشا ست.

$\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathbb{B}$ یک زیرمجموعه یِ باز ِ $\mathbb{M}$ است. $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ را یک زیرکلاف ِ $\mathbb{E}$ مینامم. به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{B}$ است، که افکنش َش $\mathsf{res}[\boldsymbol{\pi}; \boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})]$ است. به علاوه دیده میشود تار- ِ-نُعی یِ $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ هم هم ان تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}$ است.

میگویم کلاف ِ $\mathbb{E}$ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ بدیهی ست، اگر یک تابع ِ $\boldsymbol{U}$ در $\mathsf{HF}(\mathbb{E}; \mathbb{M} \times \mathbb{Y})$ باشد که

$$\boldsymbol{U}(\{x\} \times \mathbb{Y}) = \boldsymbol{\pi}^{-1}(x). \tag{112}$$

اگر چنین باشد، متناظر با هر نقشه یِ ϕ_a برا یِ خمینه یِ $\mathbb{M}$ یک U_a در $\mathsf{F}\{\mathbb{Y}; [\mathsf{dom}(\phi_a) \times \mathbb{Y}]\}$ تعریف میکنم که

$$\mathrm{U}_a = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \boldsymbol{U}^{-1} \circ U_a. \tag{113}$$

دیده میشود

$$\mathrm{U}_a(x,\centerdot) \in \mathsf{HF}(\mathbb{Y};\mathbb{Y}), \tag{114}$$

$$\mathrm{U}_a(x,\mathbb{Y}) = \mathbb{Y}, \tag{115}$$

$$\mathrm{U}_a(x,\centerdot) = [\boldsymbol{U}(x,\centerdot)]^{-1} \circ [U_a(x,\centerdot)]. \tag{116}$$

همچنین،

$$(\boldsymbol{U}^{-1} \circ U_a)(x,y) = [x, \mathrm{U}_a(x,y)], \tag{117}$$

$$(U_a^{-1} \circ \boldsymbol{U})(x,y) = \{x, [\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}(y)\}. \tag{118}$$

از (116) نتیجه میشود اگر ϕ_a و ϕ_b دُ نقشه باشند،

$$U_{a\,b}(x,\centerdot) = [\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1} \circ [\mathrm{U}_b(x,\centerdot)]. \tag{119}$$

برعکس، گیرم به ازا یِ هر نقشه یِ ϕ_a تابع ِ U_a در $\mathsf{F}\{\mathbb{Y};[\mathsf{dom}(\phi_a)\times\mathbb{Y}]\}$ رابطه یِ (114) را برمیئاورد، و به ازا یِ هر دُ-نقشه یِ ϕ_a و ϕ_b رابطه یِ (119) برقرار است. متناظر با نقشه یِ ϕ_a تابع ِ $\boldsymbol{U}_a$ در $\mathsf{F}\{\mathbb{E};[\mathsf{dom}(\phi_a)\times\mathbb{Y}]\}$ را با

$$\boldsymbol{U}_a(x,\centerdot) = [U_a(x,\centerdot)] \circ [\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1} \tag{120}$$

تعریف میکنم. به سادِگی دیده میشود اگر ϕ_a و ϕ_b دُ نقشه باشند،

$$\mathsf{res}\{\boldsymbol{U}_a;[\mathsf{dom}(U_a)\cap\mathsf{dom}(U_b)]\} = \mathsf{res}\{\boldsymbol{U}_b;[\mathsf{dom}(U_a)\cap\mathsf{dom}(U_b)]\}. \tag{121}$$

از اینجا معلوم میشود $\boldsymbol{U}$ در $\mathsf{F}[\mathbb{E};(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})]$ با

$$\mathsf{res}[\boldsymbol{U};\mathsf{dom}(\phi_a)] = \boldsymbol{U}_a, \tag{122}$$

خُش-تعریف است. به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{U}$ یک همانریختی ست که (112) را برمیئاورد، و از آنجا معلوم میشود $\mathbb{E}$ با $(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})$ همانریخت است. به $\boldsymbol{U}$ (همانریختی یِ بین ِ $\mathbb{E}$ و $(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})$) یک بدیهیگر ِ سراسری یِ $\mathbb{E}$ میگویم. به U_a هم وابسته یِ بدیهیگر ِ U_a میگویم.

به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathbb{B}$ یک زیرمجموعه یِ باز ِ دامنه یِ یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ باشد، آنگاه $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ کلاف ی بدیهی ست.

$\mathbb{N}$ یک خمینه است و $\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ است. میشود $(\mathbb{N}\times\mathbb{E})$ را کلاف ی با خمینه-یِ-پایه یِ $(\mathbb{N}\times\mathbb{M})$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ کرد. برا یِ این کار، متناظر با بدیهیگر ِ U برا یِ $\mathbb{E}$ بدیهیگر ِ $U^{\mathbb{N}}$ برا یِ $(\mathbb{N}\times\mathbb{E})$ را چنین تعریف میکنم.

$$U^{\mathbb{N}}(t,x,y)=[t,U(x,y)]. \tag{123}$$

افکنش ِ $(\mathbb{N}\times\mathbb{E})$ را هم با $\boldsymbol{\pi}^{\mathbb{N}}$ نشان میدهم و آن را بر حسب ِ $\boldsymbol{\pi}$ (افکنش ِ $\mathbb{E}$) چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{\pi}^{\mathbb{N}}(t,z)=\boldsymbol{\pi}(z). \tag{124}$$

به سادِگی دیده میشود این افکنش و بدیهیگر ویژِگیها یِ لازم را دارند. $(\mathbb{N}\times\mathbb{E})$ را با $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ نشان میدهم و به آن گسترش-یافته یِ بدیهی یِ $\mathbb{E}$ با $\mathbb{N}$ میگویم.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ اند. با اینها یک کلاف میسازم که خمینه-یِ-پایه اَش هم ان $\mathbb{M}$، و تار- ِ-نُعی یَش $(\mathbb{Y}_1\times\mathbb{Y}_2)$ است، که $\mathbb{Y}_i$ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_i$ است. کافی ست تابع- ِ-گذارها را بدهم. متناظر با نقشِها یِ ϕ_a و ϕ_b تابع- ِ-گذار ِ $U_{i\,a\,b}$ برا یِ کلاف ِ $\mathbb{E}_i$، تابع ِ $U_{a\,b}$ را در $\mathsf{F}\{(\mathbb{Y}_1\times\mathbb{Y}_2);[\mathsf{dom}(\phi_a)\cap\mathsf{dom}(\phi_b)]\times(\mathbb{Y}_1\times\mathbb{Y}_2)\}$ میگیرم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$U_{a\,b}(x,y_1,y_2)=[U_{1\,a\,b}(x,y_1),U_{2\,a\,b}(x,y_2)]. \tag{125}$$

به سادِگی دیده میشود $U_{a\,b}$ ها (88) و (94) و (95) را برمیئاورند. به کلاف ی که به این شکل ساخته میشود حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم ِ کلافها یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ میگویم و آن را با $(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)$ نشان میدهم. مُضعَن میشود یک نقطه از $(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)$ را با (x,y_1,y_2) نمایش داد، که x در خمینه-یِ-پایه و y_i در تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_i$ است.

رابطه یِ (125) را میشود چنین نوشت.

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_{0\,i}\circ U_a^{-1}\circ U_b=U_{i\,a}^{-1}\circ U_{i\,b}\circ\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_{0\,i}, \tag{126}$$

که $U_{i\,a}$ بدیهیگر ِ $\mathbb{E}_i$ متناظر با نقشه یِ ϕ_a است. نتیجه میشود

$$U_{i\,a}\circ\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_{0\,i}\circ U_a^{-1}=U_{i\,b}\circ\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_{0\,i}\circ U_b^{-1}. \tag{127}$$

به این ترتیب تابع ِ $\boldsymbol{\varpi}_{i\,a}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_i;\mathbb{E})$ با

$$\boldsymbol{\varpi}_{i\,a}=U_{i\,a}\circ\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_{0\,i}\circ U_a^{-1}, \tag{128}$$

مستقل از نقشه یِ a است. پس شاخص ِ a را از آن بر میدارم و آن را با ϖ_i نمایش میدهم. دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi}_i \circ \varpi_i = \boldsymbol{\pi}, \tag{129}$$

که $\boldsymbol{\pi}_i$ و $\boldsymbol{\pi}$ افکنشها یِ به ترتیب $\mathbb{E}_i$ و کلاف ِ حاصل- ِ-جمع- ِ-مستقیم َند. ϖ_i تابع ی ست که یک عضو ِ حاصل- ِ-جمع- ِ-مستقیم را به $\mathbb{E}_i$ مینگارد. به $\mathbb{E}_i$ مئلفه یِ i ِ کلاف ِ حاصل- ِ-جمع، و به ϖ_i افکنش بر مئلفه یِ i ِ کلاف ِ حاصل- ِ-جمع میگویم. رُشن است که معادلات ِ

$$\forall\, i \ :\ \varpi_i(z) = z_i, \tag{130}$$

برا یِ z جواب دارند، اگر و تنها اگر مبنا یِ z_i ها یکسان باشد، و در این صورت جواب یکتا ست:

$$z = U_a(x, y_1, y_2), \tag{131}$$

که

$$(x, y_i) = U^{-1}_{i\,a}(z_i). \tag{132}$$

z_i ها با مبناها یِ یکسان را چنان میگیرم که z_i در $\mathbb{E}_i$ باشد. حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم z_1 و z_2 را با $(z_1 \oplus z_2)$ نمایش میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\varpi_i(z_1 \oplus z_2) = z_i. \tag{133}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi}(z_1 \oplus z_2) = \boldsymbol{\pi}_i(z_i). \tag{134}$$

همچنین رُشن است که

$$z = [\varpi_1(z)] \oplus [\varpi_2(z)]. \tag{135}$$

پس هر عضو ِ $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم ِ یک عضو ِ $\mathbb{E}_1$ و یک عضو ِ $\mathbb{E}_2$ است (و این دُ-عضو یکتا یند)، و البته برعکس هم حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم ِ هر عضو ِ $\mathbb{E}_1$ و هر عضو ِ $\mathbb{E}_2$ در $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ است.

تعمیم ِ این تعریفها به حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم چند کلاف هم بدیهی ست. از جمله،

$$\varpi_i\, U_a = U_{i\,a} \circ \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,i}. \tag{136}$$

$$U_a = \bigoplus_i U_{i\,a} \circ \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_{0\,i}. \tag{137}$$

$$\bigoplus_i \varpi_i = \mathbf{1}. \tag{138}$$

به سادِگی دیده میشود اگر کلافها یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ بدیهی باشند، $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ هم بدیهی ست. برا یِ دیدن ِ این کلافها یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ را میگیرم، که خمینه-یِ-پایه یِ هر-دُ $\mathbb{M}$ است، و $\mathbb{Y}_i$ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_i$ است. $\mathbb{E}_i$ را بدیهی با بدیهیگر ِ سراسری یِ $\boldsymbol{U}_i$ میگیرم. $\boldsymbol{U}$ در $\mathsf{F}[(\mathbb{E} \oplus \mathbb{E}_2); (\mathbb{M} \times \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{Y}_2)]$ را چنین تعریف میکنم

$$\boldsymbol{U}(x, y_1, y_2) := [\boldsymbol{U}_1(x, y_1)] \oplus [\boldsymbol{U}_2(x, y_2)]. \tag{139}$$

دیده میشود $\boldsymbol{U}$ یک بدیهیگر ِ سراسری برا یِ $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ است.

$\mathbb{E}$ کلاف ی با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. میگویم $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار است اگر $\mathbb{E}$ خمینه باشد، همه یِ تارها یِ $\mathbb{E}$ زیرخمینه یِ $\mathbb{E}$ باشند، و افکنش و بدیهیگر ها و وارون ِ بدیهیگرها (و در نتیجه تابعها یِ گذار) هموار باشند. به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار باشد که $\mathbb{M}$ خمینه-یِ-پایه و $\mathbb{Y}$ تار- ِ-نُعی یِ آن َند،

$$\mathsf{dim}(\mathbb{E}) = \mathsf{dim}(\mathbb{M}) + \mathsf{dim}(\mathbb{Y}). \tag{140}$$

همچنین، به سادِگی دیده میشود حاصل- ِ-جمع- ِ-مستقیم چند کلاف ِ هموار یک کلاف ِ هموار است، افکنش بر هر یک از مئلفِها یِ حاصل- ِ-جمع- ِ-مستقیم ِ چند کلاف ِ هموار یک تابع ِ هموار است، تابع ِ حاصل- ِ-جمع ِ مستقیم هموار است، و اگر $\mathbb{E}_i$ ها کلافها یی هموار باشند که خمینه-یِ-پایه یِشان $\mathbb{M}$ است،

$$\mathsf{dim}\left(\bigoplus_i \mathbb{E}_i\right) = -(n-1)\mathsf{dim}(\mathbb{M}) + \sum_i \mathsf{dim}(\mathbb{E}_i), \tag{141}$$

که n تعداد ِ $\mathbb{E}_i$ ها ست.

با خمینه یِ $\mathbb{M}$ میشود دُ کلاف ساخت. کلاف ِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ را چنان تعریف میکنم که π_0 (افکنش ِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$) همانی باشد. این یعنی اگر U_0 یک بدیهیگر باشد،

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0 \circ U_0^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbb{M}}. \tag{142}$$

$(x,\mathfrak{y})$ را در $(\mathbb{M}\times\mathbb{Y}_0)$ میگیرم، که $\mathbb{Y}_0$ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ است. دیده میشود

$$U_0(x,\mathfrak{y}) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0(x,\mathfrak{y}),$$
$$= x, \tag{143}$$

که نشان میدهد اگر $\mathfrak{y}'$ هم در $\mathbb{Y}_0$ باشد، $U_0(x,\mathfrak{y}')$ با $U_0(x,\mathfrak{y})$ برابر است. پس چون U_0 یک-به-یک است، $\mathfrak{y}'$ با $\mathfrak{y}$ برابر است. این یعنی $\mathbb{Y}_0$ یک مجموعه یِ یک-عضوی ست. این عضو را با $\mathfrak{y}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{Y}_0 = \{\mathfrak{y}\}. \tag{144}$$

رُشن است که $(\mathbb{M}\times\{\mathfrak{y}\})$ با $\mathbb{M}$ همانریخت است. در واقع همانریختی هم ان بدیهیگر ِ U_0 است، که دیده میشود یک بدیهیگر ِ سراسری است. به این ترتیب $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ یک کلاف ِ بدیهی با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، تار- ِ-نُعی یِ $\{\mathfrak{y}\}$، و افکنش ِ همانی ست.

با هم ان خمینه یِ $\mathbb{M}$ میشود یک کلاف ِ $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ ساخت، که این بار تار- ِ-نُعی یَش هم ان $\mathbb{M}$ است، و اگر U_1 یک بدیهیگر باشد،

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U_1^{-1} = \mathbf{1}_{\mathbb{M}}. \tag{145}$$

این نشان میدهد اگر $(\mathfrak{x},x)$ در $(\mathbb{M}_1\times\mathbb{M})$ باشد، که $\mathbb{M}_1$ خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ است،

$$U_1(\mathfrak{x},x) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1(\mathfrak{x},x),$$
$$= x, \tag{146}$$

که نشان میدهد اگر $\mathfrak{x}'$ هم در $\mathbb{M}_1$ باشد، $U_1(\mathfrak{x}',x)$ با $U_1(\mathfrak{x},x)$ برابر است. پس چون U_1 یک-به-یک است، $\mathfrak{x}'$ با $\mathfrak{x}$ برابر است. این یعنی $\mathbb{M}_1$ یک مجموعه یِ یک-عضوی ست. این عضو را با $\mathfrak{x}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{M}_1 = \{\mathfrak{x}\}. \tag{147}$$

رُشن است که $(\{\mathfrak{x}\}\times\mathbb{M})$ با $\mathbb{M}$ همانریخت است. در واقع همانریختی هم ان بدیهیگر ِ U_1 است، که دیده میشود یک بدیهیگر ِ سراسری ست. به این ترتیب $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ یک کلاف ِ بدیهی با خمینه-یِ-پایه یِ $\{\mathfrak{x}\}$، تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{M}$، و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}_1$ است، که

$$\boldsymbol{\pi}_1(x) = \mathfrak{x}, \tag{148}$$

یعنی تصویرِ $\boldsymbol{\pi}_1$ یک مجموعه یِ یک-نقطِئی ست.

$\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ و $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$، به معنی یِ مجموعه در واقع خُدِ $\mathbb{M}$ اند؛ اما به عنوانِ کلاف، خمینه-یِ-پایِها یِشان یکسان نیست، تارها یِشان هم یکسان نیست. میشود به جا یِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ و $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ خُدِ $\mathbb{M}$ را هم به کار برد، وقت ی از متن معلوم باشد کدام یک از این کلافها مُردِ نظر َند.

$\mathbb{E}$ یک کلاف با افکنشِ $\boldsymbol{\pi}$ و خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. پس $\{[\mathbf{B}_0(\mathbb{M})] \oplus \mathbb{E}\}$ و $\{\mathbb{E} \oplus [\mathbf{B}_0(\mathbb{M})]\}$ خُش-تعریف َند. دیده میشود هر یک از $(x \oplus z)$ و $(z \oplus x)$ با (x, z) در $(\mathbb{M} \times \mathbb{E})$ خُش-تعریف َند، اگر و تنها اگر $\boldsymbol{\pi}(z)$ هم ان x باشد. به این ترتیب، $(\boldsymbol{\pi} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{E}})$ یک همانریختی از $\mathbb{E}$ به $\{[\mathbf{B}_0(\mathbb{M})] \oplus \mathbb{E}\}$ است. به هم ین ترتیب، $(\mathbf{1}_{\mathbb{E}} \oplus \boldsymbol{\pi})$ یک همانریختی از $\mathbb{E}$ به $\{\mathbb{E} \oplus [\mathbf{B}_0(\mathbb{M})]\}$ است. رُشن است که اگر $\mathbb{E}$ هموار باشد، $(\boldsymbol{\pi} \oplus \mathbf{1}_{\mathbb{E}})$ و $(\mathbf{1}_{\mathbb{E}} \oplus \boldsymbol{\pi})$ هم هموار َند. تناظرِ $\{[\mathbf{B}_0(\mathbb{M})] \oplus \mathbb{E}\}$ با $\mathbb{E}$ و $\{\mathbb{E} \oplus [\mathbf{B}_0(\mathbb{M})]\}$ با $\mathbb{E}$ را سادِتر به شکلِ تساوی مینویسم:

$$[\mathbf{B}_0(\mathbb{M})] \oplus \mathbb{E} = \mathbb{E}, \tag{149}$$

$$\mathbb{E} \oplus [\mathbf{B}_0(\mathbb{M})] = \mathbb{E}, \tag{150}$$

یا باز هم سادِتر،

$$\mathbb{M} \oplus \mathbb{E} = \mathbb{E}. \tag{151}$$

$$\mathbb{E} \oplus \mathbb{M} = \mathbb{E}. \tag{152}$$

رُشن است که

$$\mathsf{dim}(\mathbb{E}) = -(2-1)\mathsf{dim}(\mathbb{M}) + \mathsf{dim}(\mathbb{M}) + \mathsf{dim}(\mathbb{E}), \tag{153}$$

که با توجه به (141) نشان میدهد

$$\mathsf{dim}(\mathbb{E}) = \mathsf{dim}(\mathbb{M} \oplus \mathbb{E}), \tag{154}$$

$$= \mathsf{dim}(\mathbb{E} \oplus \mathbb{M}), \tag{155}$$

چنان که انتظار میرفت.

8 کلاف ِ برداری

کلاف ِ برداری (یا خطی) کلاف ی ست که تار- ِ-نُعی ی ِ آن یک فضا ی ِ خطی ست و تابع- ِ-گذارها یَش نسبت به متغیر ِ تار- ِ-نُعی خطی یَند. متناظر با تابع- ِ-گذار ِ U، تابع ِ $U(x,\bullet)$ را با $\check{U}(x)$ نشان میدهم. دیده میشود $\check{U}(x)$ یک تابع ِ خطی ی ِ وارونپذیر از تار- ِ-نُعی به تار- ِ-نُعی ست. به $\check{U}_{a\,b}$ با

$$\check{U}_{a\,b}(x) = (U_a^{-1} \circ U_b)(x,\bullet) \tag{156}$$

تابع- ِ-گذار ِ خطی ی ِ (یا سادِتر هم ان تابع- ِ-گذار ِ) متناظر با بدیهیگرها ی ِ U_a و U_b میگویم. دیده میشود

$$\check{U}_{a\,a}(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Y}}, \tag{157}$$

$$[\check{U}_{a\,b}(x)][\check{U}_{b\,c}(x)] = [\check{U}_{a\,c}(x)]. \tag{158}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-ی-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ است. $\mathbb{E}_x$ (که x در $\mathbb{M}$ است) را میشود یک فضا ی ِ خطی کرد. برا ی ِ این کار باید ترکیب ِ خطی ی ِ دُ عضو ِ دلبخاه ِ آن را تعریف کرد، و نشان داد این ترکیب ویژِگیها ی ِ ترکیب ِ خطی در فضاها ی ِ خطی را دارد. متناظر با بدیهیگر ِ U_a، ترکیب ِ خطی از بردارها ی ِ u و v (هر-دُ در $\mathbb{E}_x$) با اسکالرها ی ِ α و β را چنین تعریف میکنم.

$$(\alpha\, u + \beta\, v)_a = U_a\{x, \alpha\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)] + \beta\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_a^{-1}(v)]\}. \tag{159}$$

یک بدیهیگر ِ دیگر (U_b) را میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
(\alpha\, u + \beta\, v)_b &= U_b\{x, \alpha\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(u)] + \beta\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(v)]\},\\
&= U_a\Big(x, [\check{U}_{a\,b}(x)]\, \{\alpha\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(u)] + \beta\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(v)]\}\Big),\\
&= U_a\Big(x, \alpha\, [\check{U}_{a\,b}(x)]\, \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(u)]\} + \beta\, [\check{U}_{a\,b}(x)]\, \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_b^{-1}(v)]\}\Big),\\
&= U_a\{x, \alpha\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)] + \beta\, \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U_a^{-1}(v)]\},\\
&= (\alpha\, u + \beta\, v)_a,
\end{aligned} \tag{160}$$

که $\check{U}_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها ی ِ U_a و U_b است. پس تعریف ِ (159) برا ی ِ ترکیب ِ خطی مستقل از نقشه است. به هم ین خاطر شاخص ِ نقشه را از ترکیب ِ خطی برمیدارم. به سادِگی

دیده میشود این تعریف ویژگیها یِ ترکیب ِ خطی در فضاها یِ خطی را دارد. ضمنَن دیده میشود اگر $\boldsymbol{\pi}$ افکنش ِ کلاف باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}(\alpha u+\beta v) &= \boldsymbol{\pi}(u),\\ &= \boldsymbol{\pi}(v).\end{aligned} \tag{161}$$

تعریف ِ (159) را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}U[x,\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(u)+\beta(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(v)] &= \alpha\, U[x,(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(u)]\\ &\quad+\beta\, U[x,(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(v)],\end{aligned} \tag{162}$$

که نشان میدهد $[U(x,\cdot)]$ خطی ست. متناظر با بدیهیگر ِ U_a، تابع ِ $\check{U}_a(x)$ در $\mathsf{LF}[\mathbb{E}_x;\mathbb{Y}]$ را چنین تعریف میکنم.

$$\check{U}_a(x)=U_a(x,\cdot). \tag{163}$$

$\check{U}_a$ را بدیهیگر- ِ-خطی (یِ متناظر با U_a) مینامم. یا سادِتر، خُد ِ $\check{U}_a$ را بدیهیگر مینامم. با این تعریف به سادِگی دیده میشود اگر U_b یک بدیهیگر و $\check{U}_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار- ِ-خطی یِ متناظر با U_a و U_b باشد،

$$\check{U}_{a\,b}=\check{U}_a^{-1}\,\check{U}_b, \tag{164}$$

که

$$\check{U}^{-1}(x):=[\check{U}(x)]^{-1}. \tag{165}$$

از (159) ضمنَن نتیجه میشود

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(\alpha\, u+\beta\, v)=\alpha(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(u)+\beta(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(v), \tag{166}$$

که نشان میدهد $(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})$ خطی ست (تحدید َش به هر تار خطی ست). در واقع دیده میشود

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})(z)=\{\check{U}^{-1}[\boldsymbol{\pi}(z)]\}\,z. \tag{167}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ بدیهی با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ است. نشان میدهم این کلاف یک بدیهیگر ِ سراسری یِ $\boldsymbol{U}$ دارد که $\boldsymbol{U}(x,\cdot)$ خطی ست. برا یِ این کار بدیهیگر ِ سراسری یِ

$\tilde{\boldsymbol{U}}$ را میگیرم. تعریف میکنم

$$\boldsymbol{U}(x,y) = y^\alpha\, \tilde{\boldsymbol{U}}(x, f_\alpha), \tag{168}$$

که $\{(\alpha, f_\alpha) \mid \alpha\}$ یک پایه یِ $\mathbb{Y}$ است. به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{U}$ ویژِگیها یِ مُرد- ِ-نظر را دارد. از این پس بدیهیگر ِ سراسری یِ یک کلاف ِ برداری یِ بدیهی را چنین میگیرم. $[\check{U}_a(x)]$ در $\mathsf{LF}(\mathbb{E}_x;\mathbb{Y})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\check{U}_a(x) = U_a(x, \centerdot). \tag{169}$$

همچنین، متناظر با بدیهیگر ِ سراسری یِ (خطی یِ) $\boldsymbol{U}$ تعریف میکنم

$$\check{\boldsymbol{U}}(x) = \boldsymbol{U}(x, \centerdot). \tag{170}$$

از خطی-بودن ِ $\check{U}_a(x)$ و $\check{\boldsymbol{U}}(x)$ دیده میشود $\check{U}_a^{-1}(x)$ و $\check{\boldsymbol{U}}^{-1}(x)$ هم خطی یَند. پس تابع ِ U_a (وابسته یِ بدیهیگر ِ U_a) هم چنان است که $\mathrm{U}_a(x, \centerdot)$ خطی ست. $[\check{\mathrm{U}}_a(x)]$ در $\mathsf{LF}(\mathbb{Y};\mathbb{Y})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\check{\mathrm{U}}_a(x) = \mathrm{U}_a(x, \centerdot). \tag{171}$$

دیده میشود

$$\check{\mathrm{U}}_a = \check{\boldsymbol{U}}^{-1}\, \check{U}_a, \tag{172}$$

$$\check{U}_{a\,b} = \check{\mathrm{U}}_a^{-1}\, \check{\mathrm{U}}_b. \tag{173}$$

سرانجام، به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ دُ کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ یکسان باشند، $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ را هم میشود یک کلاف ِ برداری کرد. کافی ست تعریف شود

$$\alpha(u_1 \oplus u_2) + \beta(v_1 \oplus v_2) = (\alpha\, u_1 + \beta\, v_1) \oplus (\alpha\, u_2 + \beta\, v_2). \tag{174}$$

همچنین دیده میشود اگر کلافها یِ برداری یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ بدیهی باشند و $\boldsymbol{U}_i$ بدیهیگر ِ سراسری یِ خطی یِ $\mathbb{E}_i$ باشد، $\boldsymbol{U}$ با

$$\boldsymbol{U}(x, y_1, y_2) = [\boldsymbol{U}_1(x, y_1)] \oplus [\boldsymbol{U}_2(x, y_2)], \tag{139}$$

یک بدیهیگر ِ سراسری ی ِ خطی ی ِ $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ است، و

$$\check{\boldsymbol{U}}(x) = \{[\check{\boldsymbol{U}}_1(x)]\,\boldsymbol{\Pi}_1\} \oplus \{[\check{\boldsymbol{U}}_2(x)]\,\boldsymbol{\Pi}_2\}. \tag{175}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ است. یک کلاف ِ برداری میسازم که خمینه-ی ِ-پایه اَش هم ان $\mathbb{M}$، و تار- ِ-نُعی یَش $\mathbb{Y}^*$ (دُگان ِ $\mathbb{Y}$) است، که $\mathbb{Y}$ تار- ِ-نُعی ی ِ $\mathbb{E}$ است. کافی ست تابع- ِ-گذارها را بدهم. متناظر با نقشِها ی ِ ϕ_a و ϕ_b تابع- ِ-گذار ِ $U_{a\,b}$ برا ی ِ کلاف ِ $\mathbb{E}$ را میگیرم و $U^*_{a\,b}$ را تابع ی در $\mathsf{F}\{\mathbb{Y}^*; [\mathsf{dom}(\phi_a) \cap \mathsf{dom}(\phi_b)] \times \mathbb{Y}^*\}$ تعریف میکنم که

$$U^*_{a\,b}(x, \cdot) = [U_{b\,a}(x, \cdot)]^*. \tag{176}$$

به سادِگی دیده میشود $U^*_{a\,b}$ ها (88) و (94) و (95) را برمیثاورند. به کلاف ی که به این شکل ساخته میشود دُگان ِ کلاف ِ $\mathbb{E}$ میگویم و آن را با $\mathbb{E}^*$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\check{U}^*_{a\,b}(x) = [\check{U}_{b\,a}(x)]^*, \tag{177}$$

که $\check{U}^*_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار ِ متناظر با نقشِها ی ِ ϕ_a و ϕ_b بر $\mathbb{E}^*$ است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ است، u در $\mathbb{E}_x$ است، و σ در $(\mathbb{E}^*)_x$ است، که x در $\mathbb{M}$ است. بدیهیگر ِ متناظر با نقشه ی ِ ϕ_a برا ی ِ $\mathbb{E}$ و $\mathbb{E}^*$ را با به ترتیب U_a و $\tilde{U}_a$ نشان میدهم. اثر ِ σ بر u متناظر با نقشه ی ِ ϕ_a را چنین تعریف میکنم.

$$[\sigma(u)]_a = \{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[\tilde{U}_a^{-1}(\sigma)]\}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)]\}. \tag{178}$$

ϕ_b را یک نقشه ی ِ دیگر، و $\check{U}_{a\,b}$ را تابع- ِ-گذار ِ متناظر با این دُ-نقشه میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\sigma(u)]_b &= \{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[\tilde{U}_b^{-1}(\sigma)]\}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[U_b^{-1}(u)]\},\\
&= \Big([\check{U}_{a\,b}(x)]^*\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[\tilde{U}_a^{-1}(\sigma)]\}\Big)\Big([\check{U}_{b\,a}(x)]\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)]\}\Big),\\
&= \{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[\tilde{U}_a^{-1}(\sigma)]\}\Big([\check{U}_{a\,b}(x)][\check{U}_{b\,a}(x)]\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)]\}\Big),\\
&= \{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[\tilde{U}_a^{-1}(\sigma)]\}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1[U_a^{-1}(u)]\},\\
&= [\sigma(u)]_a.
\end{aligned} \tag{179}$$

پس اثر ِ σ بر u مستقل از نقشه است. به هم ین خاطر شاخص ِ نقشه را از آن بر میدارم. به سادِگی میتوان دید این اثر خطی ست. به این ترتیب،

$$(\mathbb{E}^*)_x = (\mathbb{E}_x)^*. \tag{180}$$

پس میشود پرانتزها را برداشت و دُ-طرف را با $\mathbb{E}^*_x$ نشان داد. ضمنَن دیده میشود

$$\begin{aligned}\tilde{U}_a(x,\cdot) &= [U_a(x,\cdot)]^* \\ &= [\check{U}_a(x)]^*. \end{aligned} \tag{181}$$

به این ترتیب بدیهیگر ِ متناظر با نقشه یِ ϕ_a برا یِ $\mathbb{E}^*$ را با U^*_a نشان میدهم، که

$$U^*_a(x,\cdot) = [U_a(x,\cdot)]^*, \tag{182}$$

یا

$$\check{U}^*_a(x) = [\check{U}_a(x)]^*. \tag{183}$$

سرانجام، به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ بدیهی باشد، کلاف ِ $\mathbb{E}^*$ هم بدیهی ست. برا یِ دیدن ِ این کافی ست توجه شود که اگر $\boldsymbol{U}$ یک بدیهیگر ِ سراسری یِ خطی یِ $\mathbb{E}$ باشد، $\boldsymbol{U}^*$ با

$$\boldsymbol{U}^*(x,\cdot) = [\boldsymbol{U}(x,\cdot)]^*, \tag{184}$$

یا

$$\check{\boldsymbol{U}}^*(x) = [\check{\boldsymbol{U}}(x)]^*, \tag{185}$$

یک بدیهیگر ِ سراسری یِ خطی یِ $\mathbb{E}^*$ است.

به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ هموار باشد، $\mathbb{E}^*$ هم یک کلاف ِ برداری یِ هموار است، و اثر ِ یک عضو ِ $\mathbb{E}^*$ بر یک عضو ِ $\mathbb{E}$ هم نسبت به هر-دُ-عضو هموار است.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ اند. یک کلاف میسازم که خمینه-یِ-پایه اَش هم ان $\mathbb{M}$، و تار- ِ-نُعی یَش $(\mathbb{Y}_1 \otimes \mathbb{Y}_2)$ است، که $\mathbb{Y}_i$ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_i$ است. کافی ست تابع- ِ-گذارها را بدهم. متناظر با نقشِها یِ ϕ_a و ϕ_b تابع- ِ-گذار ِ $U_{i\,a\,b}$ برا یِ کلاف ِ $\mathbb{E}_i$ را میگیرم و $U_{a\,b}$ را تابع ی در $\mathsf{F}\{(\mathbb{Y}_1 \otimes \mathbb{Y}_2); [\mathsf{dom}(\phi_a) \cap \mathsf{dom}(\phi_b)] \times (\mathbb{Y}_1 \otimes \mathbb{Y}_2)\}$ تعریف میکنم که

$$U_{a\,b}(x,\cdot) = [U_{1\,a\,b}(x,\cdot)] \otimes [U_{2\,a\,b}(x,\cdot)]. \tag{186}$$

به سادِگی دیده میشود $U_{a\,b}$ ها (88) و (94) و (95) را برمیئاورند. به کلاف ی که به این شکل ساخته میشود حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ کلافها یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ میگویم و آن را با $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\check{U}_{a\,b}(x) = [\check{U}_{1\,a\,b}(x)] \otimes [\check{U}_{2\,a\,b}(x)]. \tag{187}$$

مُضعَن میشود یک نقطه از $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ را با $(x, y_1 \otimes y_2)$ نمایش داد، که x در خمینه-یِ-پایه و y_i در تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_i$ است. z_i ها را چنان میگیرم که z_i در $\mathbb{E}_{i\,x}$ باشد. حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ z_1 و z_2 متناظر با نقشه یِ ϕ_a را با $(z_1 \otimes z_2)_a$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$(z_1 \otimes z_2)_a = U_a\Big(x, \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{1\,a}(z_1)]\} \otimes \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{2\,a}(z_2)]\}\Big), \tag{188}$$

که $U_{i\,a}$ و U_a بدیهیگرها یِ متناظر با نقشه یِ ϕ_a برا یِ به ترتیب کلاف ِ $\mathbb{E}_i$ و کلاف ِ حاصل- ِ-ضرب- ِ-تانسری یَند. ϕ_b را یک نقشه یِ دیگر میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
(z_1 \otimes z_2)_b &= U_b\Big(x, \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{1\,b}(z_1)]\} \otimes \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{2\,b}(z_2)]\}\Big),\\
&= U_a\Big[x, [\check{U}_{a\,b}(x)]\Big(\{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{1\,b}(z_1)]\} \otimes \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{2\,b}(z_2)]\}\Big)\Big],\\
&= U_a\Big[x, \Big([\check{U}_{1\,a\,b}(x)]\{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{1\,b}(z_1)]\}\Big) \otimes \Big([\check{U}_{2\,a\,b}(x)]\{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{2\,b}(z_2)]\}\Big)\Big],\\
&= U_a\Big(x, \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{1\,a}(z_1)]\} \otimes \{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[U^{-1}_{2\,a}(z_2)]\}\Big),\\
&= (z_1 \otimes z_2)_a.
\end{aligned} \tag{189}$$

پس حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ z_1 و z_2 مستقل از نقشه (ϕ_a) است. به این ترتیب شاخص ِ نقشه را از حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری بر میدارم. به سادِگی میتوان دید این حاصل- ِ-ضرب نسبت به مئلفِها یَش خطی ست. همچنین، به سادِگی دیده میشود اگر $\boldsymbol{\pi}_i$ افکنش ِ $\mathbb{E}_i$، و $\boldsymbol{\pi}$ افکنش ِ $\mathbb{E}$ باشد،

$$\boldsymbol{\pi}(z_1 \otimes z_2) = \boldsymbol{\pi}_i(z_i). \tag{190}$$

با تعریف ِ $(z_1 \otimes z_2)$، ضمنَن به سادِگی دیده میشود اگر $U_{i\,a}$ بدیهیگر ِ متناظر با نقشه یِ ϕ_a برا یِ کلاف ِ برداری یِ $\mathbb{E}_i$ باشد، U_a هم بدیهیگر ِ متناظر با نقشه یِ ϕ_a برا یِ $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ است، که $U_a(x, \cdot)$ تابع ی خطی ست که

$$U_a(x, y_1 \otimes y_2) = [U_{1\,a}(x, y_1)] \otimes [U_{2\,a}(x, y_2)], \tag{191}$$

یا

$$\check{U}_a(x) = [\check{U}_{1\,a}(x)] \otimes [\check{U}_{2\,a}(x)]. \tag{192}$$

سرانجام، به سادِگی دیده میشود اگر کلافها یِ برداری یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ بدیهی باشند، $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ هم بدیهی ست. کافی ست توجه شود که اگر $\boldsymbol{U}_i$ یک بدیهیگر- ِ-سراسری یِ خطی یِ $\mathbb{E}_i$ باشد، $\boldsymbol{U}$ با

$$\boldsymbol{U}(x,\boldsymbol{\cdot}) = [\boldsymbol{U}_1(x,\boldsymbol{\cdot})] \otimes [\boldsymbol{U}_2(x,\boldsymbol{\cdot})], \tag{193}$$

یا

$$\check{\boldsymbol{U}}(x) = [\check{\boldsymbol{U}}_1(x)] \otimes [\check{\boldsymbol{U}}_2(x)], \tag{194}$$

یک بدیهیگر- ِ-سراسری یِ خطی یِ $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ است.

تعمیم ِ این تعریفها به حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ چند کلاف هم بدیهی ست. از جمله،

$$\bigotimes_i [U_{i\,a}(x, y_i)] = U_a\left(x, \bigotimes_i y_i\right). \tag{195}$$

به سادِگی دیده میشود حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ چند کلاف ِ برداری یک کلاف ِ برداری ست. همچنین، به سادِگی دیده میشود حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ چند کلاف ِ برداری یِ هموار یک کلاف ِ برداری یِ هموار است، تابع ِ حاصل- ِ-ضرب- ِ-تانسری هموار است، و اگر $\mathbb{E}_i$ ها کلافها یی برداری و هموار باشند که خمینه-یِ-پایه یِشان $\mathbb{M}$ است،

$$\mathsf{dim}\left(\bigotimes_i \mathbb{E}_i\right) = \mathsf{dim}(\mathbb{M}) + \prod_i [\mathsf{dim}(\mathbb{E}_i) - \mathsf{dim}(\mathbb{M})]. \tag{196}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. $(\mathbb{M} \times \mathbb{R})$ یک کلاف ِ برداری یِ بدیهی ست. به سادِگی دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ باشد،

$$(\mathbb{M} \times \mathbb{R}) \otimes \mathbb{E} = \mathbb{E}. \tag{197}$$

یک حالت ِ خاص ِ این میشود

$$(\mathbb{M} \times \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{M} \times \mathbb{R}) = (\mathbb{M} \times \mathbb{R}). \tag{198}$$

همچنین دیده میشود اگر z در $\boldsymbol{\pi}^{-1}(x)$ باشد، که $\boldsymbol{\pi}$ افکنش ِ $\mathbb{E}$ است،

$$(x, s) \otimes z = [x, (s\, z)], \tag{199}$$

که s اسکالر است. سرانجام، اگر x در $\mathbb{M}$ باشد،

$$(x, s_1) \otimes (x, s_2) = [x, (s_1\, s_2)], \tag{200}$$

که s_1 و s_2 اسکالر َند.

9 فضا یِ مماس در یک نقطه

γ_1 و γ_2 خمها یی یک-به-یک َند که γ_i در t_i مشتقپذیر و مقدار َش x است. ϕ نقشه ای ست که دامنه اَش شامل ِ x است. میگویم در نقشه یِ ϕ، مماس بر γ_2 در x مماس بر γ_1 در x است، اگر

$$[\boldsymbol{D}(\phi \circ \gamma_2)](t_2) = [\boldsymbol{D}(\phi \circ \gamma_1)](t_1). \tag{201}$$

ϕ' یک نقشه یِ دیگر است که دامنه یِ آن هم شامل ِ x است. از هموار-بودن ِ تابعها یِ تغییر- ِ- مختصات نتیجه میشود اگر در نقشه یِ ϕ مماس بر γ_2 در x مماس بر γ_1 در x باشد، در نقشه یِ ϕ' هم مماس بر γ_2 در x مماس بر γ_1 در x است. پس این که مماس بر γ_2 در x مماس بر γ_1 در x باشد مستقل از نقشه است. به سادگی دیده میشود این رابطه بین ِ خمها که مماس بر یک خم در یک نقطه مماس بر یک خم ِ دیگر در آن نقطه باشد یک رابطه یِ همئرزی ست. از این پس این رابطه را به این شکل میگویم که مماس بر دُ- خم در یک نقطه یکسان است.

به رده یِ همئرزی یِ همه یِ خمها یی که از نقطه یِ x میگذرند و مماس ِشان در آن نقطه یکسان است یک بردار در نقطه یِ x میگویم. به این بردار مماس بر آن خمها در نقطه یِ x هم میگویم. رده یِ همئرزی یِ شامل ِ خم ِ γ را با $\mathsf{et}_x(\gamma)$ نشان میدهم.

نقطه یِ x در خمینه یِ $\mathbb{M}$ است که بُعد َش m است، و دامنه یِ نقشه یِ ϕ شامل ِ x است. تابع ِ $\phi_{\mathrm{s}}(x)$ از بردارها یِ نقطه یِ x به $\mathbb{R}^m$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\phi_{\mathrm{s}}(x)][\mathsf{et}_x(\gamma)] = [\boldsymbol{D}(\phi \circ \gamma)][\gamma^{-1}(x)]. \tag{202}$$

از تعریف ِ بردار در نقطه یِ x دیده میشود $\phi_{\rm s}(x)$ به شکل ِ بالا خُش-تعریف و یک-به-یک است. متناظر با هر بردار ِ V در $\mathbb{R}^m$، خم ِ $\mathsf{cu}_x(V)$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathsf{cu}_x(V)](t) = \phi^{-1}[\phi(x) + V\,t]. \tag{203}$$

با این تعریف به سادِگی دیده میشود

$$[\phi_{\rm s}(x)]\{\mathsf{et}_x[\mathsf{cu}_x(V)]\} = V. \tag{204}$$

از این‌جا نتیجه میشود $\phi_{\rm s}(x)$ در $\mathbb{R}^m$ پوشا، و در نتیجه وارونپذیر است.

ϕ' یک نقشه یِ دیگر است، که دامنه یِ آن هم شامل ِ x است. $\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ است، در $\mathbb{R}^m$ وارونپذیر است، و

$$\begin{aligned}
\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}(V) &= [\phi'_{\rm s}(x)]\{\mathsf{et}_x[\mathsf{cu}_x(V)]\},\\
&= \Big(\boldsymbol{D}\{\phi' \circ [\mathsf{cu}_x(V)]\}\Big)\{[\mathsf{cu}_x(V)]^{-1}(x)\},\\
&= \{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\}\\
&\quad \Big[\Big(\boldsymbol{D}\{\phi \circ [\mathsf{cu}_x(V)]\}\Big)\{[\mathsf{cu}_x(V)]^{-1}(x)\}\Big],\\
&= \{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\}V.
\end{aligned} \tag{205}$$

پس

$$[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1} = [\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)]. \tag{206}$$

از اینجا نتیجه میشود $\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}$ خطی ست.

$\phi_{\rm s}$ یک تناظر ِ یک-به-یک بین ِ $\mathbb{R}^m$ و مجموعه یِ بردارها یِ نقطه یِ x است. با استفاده از این تابع (که به نقشه وابسته است)، ترکیب ِ خطی از بردارها یِ u و v با اسکالرها یِ α و β را چنین تعریف میکنم.

$$(\alpha\,u + \beta\,v)_\phi = [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\{\alpha[\phi_{\rm s}(x)](u) + \beta[\phi_{\rm s}(x)](v)\}. \tag{207}$$

ϕ' یک نقشه یِ دیگر است. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
(\alpha\, u + \beta\, v)_{\phi'} &= [\phi'_{\rm s}(x)]^{-1}\{\alpha[\phi'_{\rm s}(x)](u) + \beta[\phi'_{\rm s}(x)](v)]\},\\
&= [\phi'_{\rm s}(x)]^{-1}\Big(\alpha\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}\{[\phi_{\rm s}(x)](u)\}\\
&\quad + \beta\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}\{[\phi_{\rm s}(x)](v)\}\Big),\\
&= [\phi'_{\rm s}(x)]^{-1}\Big(\{[\phi'_{\rm s}(x)] \circ [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\}\{\alpha[\phi_{\rm s}(x)](u) + \beta[\phi_{\rm s}(x)](v)\}\Big),\\
&= [\phi_{\rm s}(x)]^{-1}\{\alpha[\phi_{\rm s}(x)](u) + \beta[\phi_{\rm s}(x)](v)\},\\
&= (\alpha\, u + \beta\, v)_{\phi}. \qquad (208)
\end{aligned}
$$

پس تعریف ِ (207) برا یِ ترکیب ِ خطی مستقل از نقشه است. به هم ین خاطر شاخص ِ نقشه را از ترکیب ِ خطی برمیدارم. به سادِگی دیده میشود این تعریف ویژِگیها یِ ترکیب ِ خطی در فضاها یِ خطی را دارد.

به این ترتیب مجموعه یِ بردارها یِ نقطه یِ x، همراه با هیئت ِ $\mathbb{R}$ و تعریف ِ (207) برا یِ ترکیب ِ خطی یک فضا یِ خطی ست. به این فضا فضا یِ مماس بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ در نقطه یِ x میگویند. این فضا را با $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ نشان میدهم. به سادِگی دیده میشود با این تعریف، $\phi_{\rm s}(x)$ هم یک تابع ِ خطی از $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ به $\mathbb{R}^m$ است.

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ خمینه اند، چنان که $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ هم خمینه است، و x_i در $\mathbb{M}_i$ است. ϕ_i و ϕ'_i نقشِها یی برا یِ $\mathbb{M}_i$ اند، که دامنه یِشان شامل ِ x_i است. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
&[(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\rm s}(x_1, x_2)]\,[(\phi_1 \times \phi_2)_{\rm s}(x_1, x_2)]^{-1},\\
&= \{\boldsymbol{D}[(\phi'_1 \times \phi'_2) \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1}]\}[(\phi_1 \times \phi_2)(x_1, x_2)],\\
&= \{\boldsymbol{D}[(\phi'_1 \circ \phi_1^{-1}) \times (\phi'_2 \circ \phi_2^{-1})]\}[\phi_1(x_1), \phi_2(x_2)],\\
&= \{[\boldsymbol{D}(\phi'_1 \circ \phi_1^{-1})][\phi_1(x_1)]\} \times \{[\boldsymbol{D}(\phi'_2 \circ \phi_2^{-1})][\phi_2(x_2)]\} \qquad (209)
\end{aligned}
$$

تعریف میکنم

$$
\mathfrak{T} = [(\phi_1 \times \phi_2)_{\rm s}(x_1, x_2)]^{-1}\,\{[(\phi_1)_{\rm s}(x_1)] \times [(\phi_2)_{\rm s}(x_2)]\}. \qquad (210)
$$

به سادِگی دیده میشود تابع ِ $\mathfrak{T}$ یک یکریختی یِ خطی از $[(\mathrm{T}_{x_1}\mathbb{M}_1) \times (\mathrm{T}_{x_2}\mathbb{M}_2)]$ است، که در $\mathrm{T}_{(x_1,x_2)}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ پوشا ست. $\mathfrak{T}'$ را متناظر با ϕ'_1 و ϕ'_2 تعریف میکنم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= [(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1}\,[(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]\,[(\phi_1 \times \phi_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1} \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \times [(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= [(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1} \\
&\quad \Big(\{[\boldsymbol{D}(\phi'_1 \circ \phi_1^{-1})][\phi_1(x_1)]\} \times \{[\boldsymbol{D}(\phi'_2 \circ \phi_2^{-1})][\phi_2(x_2)]\}\Big) \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \times [(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= [(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1} \\
&\quad \Big(\{[(\phi'_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \circ [(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]^{-1}\} \times \{[(\phi'_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \circ [(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]^{-1}\}\Big) \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \times [(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= [(\phi'_1 \times \phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1}\,\{[(\phi'_1)_{\mathrm{s}}](x_1)] \times [(\phi'_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= \mathfrak{T}'.
\end{aligned} \tag{211}$$

پس $\mathfrak{T}$ به نقشه بستِگی ندارد. برا یِ سادِگی $\mathfrak{T}$ را همانی میگیرم. این یعنی

$$(\phi_1 \times \phi_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2) = [(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)] \times [(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)], \tag{212}$$

و البته

$$\mathrm{T}_{(x_1,x_2)}(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2) = (\mathrm{T}_{x_1}\mathbb{M}_1) \times (\mathrm{T}_{x_2}\mathbb{M}_2). \tag{213}$$

به سادِگی دیده میشود اگر V_1 در $\mathbb{R}^{m_1}$ باشد و V_2 در $\mathbb{R}^{m_2}$ باشد، که m_i بُعد ِ $\mathbb{M}_i$ است،

$$[(\phi_1 \times \phi_2)_{\mathrm{s}}(x_1,x_2)]^{-1}\,(V_1,V_2) = \Big(\{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]^{-1}\,V_1\}, \{[(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]^{-1}\,V_2\}\Big), \tag{214}$$

که x_i در $\mathbb{M}_i$ است. همچنین اگر γ_i خم ی در $\mathbb{M}_i$ باشد، چنان که $\gamma_i(t_0)$ برابر با x_i باشد، آنگاه

$$\mathsf{et}_{(x_1,x_2)}(\gamma_1,\gamma_2) = [\mathsf{et}_{x_1}(\gamma_1), \mathsf{et}_{x_2}(\gamma_2)]. \tag{215}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست، x در $\mathbb{M}$ است، و ϕ نقشه ای برا یِ $\mathbb{M}$ است که دامنه اَش شامل ِ x است. میگویم تابع ِ برداری یِ $v = \{(i, v_i) \mid i\}$، که دامنه یِ v یک مجموعه یِ مرتب ِ m عضوی ست و v_i در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است، یک کنج ِ راستدست نسبت به ϕ است، اگر

$$\mathsf{det}(V) > 0, \tag{216}$$

که V یک تابع ِ خطی در $\mathbb{R}^m$ است که عنصر- ِ-ماتریسیها یَش چنین َند.

$$V^i{}_j = \{[\phi_{\mathrm{s}}(x)]\, v_j\}^i. \tag{217}$$

همچنین، میگویم v یک کنج ِ چپدست نسبت به ϕ است، اگر

$$\mathsf{det}(V) < 0. \tag{218}$$

به طُر ِ کلی، دستیدِگی یِ v نسبت به ϕ را با $\mathsf{sgn}_\phi(v)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}_\phi(v) = \mathsf{sgn}[\mathsf{det}(V)]. \tag{219}$$

دیده میشود اگر ماتریس ِ V' مثل ِ V ولی با نقشه یِ ϕ' تعریف شود،

$$\begin{aligned} V' &= [\phi'_{\mathrm{s}}\,(\phi_{\mathrm{s}})^{-1}]\, V, \\ &= \{[\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\}V. \end{aligned} \tag{220}$$

پس اگر ϕ' با ϕ همدستیده باشد، v یک کنج ِ راستدست نسبت به ϕ' است اگر و تنها اگر v یک کنج ِ راستدست نسبت به ϕ باشد، و v یک کنج ِ چپدست نسبت به ϕ' است اگر و تنها اگر v یک کنج ِ چپدست نسبت به ϕ باشد. به طُر ِ کلی،

$$\mathsf{sgn}_{\phi'}(v) = \mathsf{sgn}_\phi(v), \tag{221}$$

و اگر شرط ِ همدستیده- بودن ِ ϕ' با ϕ هم برداشته شود،

$$\mathsf{sgn}_{\phi'}(v) = [\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi)][\mathsf{sgn}_\phi(v)]. \tag{222}$$

البته ممکن است $[\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi)]$ خُش- تعریف نباشد. در این صورت باید $[\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi)](x)$ به کار برود.

به این ترتیب، برا یِ خمینِها یِ سمتدار راستدست- بودن و چپدست- بودن ِ کنج مستقل از نقشه است. پس اگر $\mathbb{M}$ سمتدار باشد، تعریف میکنم v یک کنج ِ راستدست (چپدست) است، اگر v یک کنج ِ

راستدست (چپدست) نسبت به یک نقشه باشد. در واقع اگر $\mathbb{A}$ یک اتلس ِ تکدست باشد، دستیدِگی یِ v نسبت به $\mathbb{A}$ را با $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(v)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(v) = \mathsf{sgn}_{\phi}(v), \quad \phi \in \mathbb{A}. \tag{223}$$

رُشن است که با تغییردادن ِ نقشه یِ ϕ در $\mathbb{A}$، مقدار ِ $\mathsf{sgn}_{\phi}(v)$ عوض نمیشود. پس $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(v)$ به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. همچنین، برا یِ یک خمینه یِ سمتدار شاخص ِ $\mathbb{A}$ را هم از $\mathsf{sgn}_{\mathbb{A}}(v)$ بر میدارم و دستیده‌گی یِ v (نسبت به خمینه یِ سمتدار) را با $\mathsf{sgn}(v)$ نشان میدهم.

$\mathbb{M}$ یک خمینه و $\mathbb{S}$ یک زیرخمینه یِ آن است، که شامل ِ x است. خم ِ γ که از x میگذرد و در $\mathbb{S}$ مقدار میگیرد، یک بردار در $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ را مشخص میکند، که آن را با $\mathsf{et}_{x,\mathbb{S}}(\gamma)$ نشان میدهم. علت ِ افزودن ِ شاخص ِ $\mathbb{S}$ این است که ممکن است خمها یی باشند که از x میگذرند و در این نقطه بر γ مماس َند، ولی تصویر ِشان زیرمجموعه یِ $\mathbb{S}$ نیست. در واقع اگر بُعد ِ $\mathbb{S}$ از بُعد ِ $\mathbb{M}$ کوچکتر باشد، حتمَن چنین-خمها یی هستند. به این ترتیب $\mathsf{et}_{x,\mathbb{S}}(\gamma)$ زیرمجموعه یِ $\mathsf{et}_x(\gamma)$ (یا $\mathsf{et}_{x,\mathbb{M}}(\gamma)$) است، اما ممکن است با $\mathsf{et}_x(\gamma)$ برابر نباشد. پس $\mathsf{et}_{x,\mathbb{S}}(\gamma)$ عضو ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ است، اما لزومَن عضو ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ نیست. به این ترتیب، به طُر ِ دقیق $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ زیرمجموعه یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ نیست. اما هر عضو ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ زیرمجموعه یِ دقیقَن یک عضو ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. به این ترتیب یک زیرمجموعه یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ هست که بین ِ آن و $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ یک تناظر ِ یک-به-یک هست. این زیرمجموعه را با $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ نشان میدهم.

$$\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}} := \{\mathsf{et}_{x,\mathbb{M}}(\gamma) \mid \mathsf{img}(\gamma) \subseteq \mathbb{S}\}. \tag{224}$$

تابع ِ $\mathfrak{T}$ در $\mathsf{F}(\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}; \mathrm{T}_x\mathbb{S})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{T}[\mathsf{et}_{x,\mathbb{S}}(\gamma)] = \mathsf{et}_{x,\mathbb{M}}(\gamma). \tag{225}$$

به سادِگی دیده میشود $\mathfrak{T}$ یک تناظر- ِ-یک-به-یک ِ خطی بین ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ و $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ است. رُشن است که $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ زیرمجموعه یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. از این پس برا یِ سادِگی $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ را با $\mathrm{T}_x\mathbb{S}$ یکی میگیرم و به اعضا یِ $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ بردارها یِ مماس بر $\mathbb{S}$ در x میگویم. به $\widetilde{\mathrm{T}_x\mathbb{S}}$ زیرفضا یِ مماس بر $\mathbb{S}$ در x هم میگویم.

10 مشتق ِ تابع

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و در x مشتق‌پذیر است. مشتق ِ f در x با نقشِها یِ ϕ_a و ϕ'_b را با $(\mathbf{D}\,f)_{b\,a}(x)$ نشان میدهم و آن را عضو ی از $\mathsf{F}[\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{M}';\mathrm{T}_x\mathbb{M}]$ تعریف میکنم که

$$(\mathbf{D}\,f)_{b\,a}(x)=\{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b\circ f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)]. \quad (226)$$

برا یِ مشتق ِ تابعها یِ از یک فضا یِ خطی به یک فضا یِ خطی نماد ِ $\boldsymbol{D}$، و برا یِ مشتق ِ تابعها یِ از یک خمینه به یک خمینه نماد ِ $\mathbf{D}$ به کار رفته است. علت این است که مشتق ِ تابعها یِ از یک فضا یِ خطی به یک فضا یِ خطی، بر یک بردار در فضا یِ مبدئ اثر میکند و یک بردار در فضا یِ مقصد میدهد: اگر f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ باشد، که $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ خطی یَند، $(\boldsymbol{D}\,f)$ در $\mathsf{LF}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است. در حال ی که مشتق ِ تابعها یِ از یک خمینه به یک خمینه بر یک بردار در فضا یِ مماس در مبدئ اثر میکند و یک بردار در فضا یِ مماس در مقصد میدهد. حتا وقت ی خمینه خطی ست، $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ (فضا یِ مماس بر خمینه در یک نقطه) خُد ِ $\mathbb{M}$ (خمینه) نیست. اما بعدَن نشان خاهم داد بین ِ این دُ-فضا یک تناظر ِ ساده (یِ هموار ِ خطی یِ مستقل-از-نقشه) هست، و تمایز ِ $\boldsymbol{D}$ و $\mathbf{D}$ را برمیدارم.

از تعریف ِ (226) معلوم میشود $(\mathbf{D}\,f)_{b\,a}(x)$ خطی ست. با نقشِها یِ ϕ_c و ϕ'_d،

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}\,f)_{d\,c}(x)&=\{(\phi'_d)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_d\circ f\circ(\phi_c)^{-1}]\}[\phi_c(x)]\Big)[(\phi_c)_{\mathrm{s}}(x)],\\
&=\{(\phi'_d)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi'_d\circ(\phi'_b)^{-1}]\}\{\phi'_b[f(x)]\}\Big)\\
&\quad\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b\circ f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_a\circ(\phi_c)^{-1}]\}[\phi_c(x)]\Big)\\
&\quad[(\phi_c)_{\mathrm{s}}(x)],\\
&=\{(\phi'_d)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\{(\phi'_d)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}\{(\phi'_b)_{\mathrm{s}})[f(x)]\}^{-1}\\
&\quad\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b\circ f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)][(\phi_c)_{\mathrm{s}}(x)]^{-1}\,[(\phi_c)_{\mathrm{s}}(x)],\\
&=\{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b\circ f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)],\\
&=(\mathbf{D}\,f)_{b\,a}(x). \qquad (227)
\end{aligned}$$

پس تعریف ِ (226) برا یِ مشتق ِ تابع مستقل از نقشه است. به این ترتیب، مشتق ِ f در x را هم ان $(\mathbf{D}\,f)_{b\,a}(x)$ میگیرم و آن را با $(\mathbf{D}\,f)(x)$ نشان میدهم:

$$(\mathbf{D}\,f)(x) = \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)], \quad (228)$$

γ خم ی یک-به-یک است که از x میگذرد. با استفاده از (228)،

$$\begin{aligned}
[(\mathbf{D}\,f)(x)][\mathsf{et}_x(\gamma)] &= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)] \\
&\quad [\mathsf{et}_x(\gamma)], \\
&= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\Big(\{\boldsymbol{D}[\phi_b \circ f \circ (\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big) \\
&\quad \{[\boldsymbol{D}(\phi_a \circ \gamma)][\gamma^{-1}(x)]\}, \\
&= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi'_b \circ f \circ \gamma)][\gamma^{-1}(x)]\}, \\
&= \mathsf{et}_{f(x)}(f \circ \gamma), \qquad (229)
\end{aligned}$$

که نشان میدهد اگر γ خم ی در $\mathbb{M}$ باشد که از x میگذرد، اثر ِ $(\mathbf{D}\,f)(x)$ بر $\mathsf{et}_x(\gamma)$ برابر ِ $\mathsf{et}_{f(x)}(f\circ\gamma)$ است.

با استفاده از

$$[\phi'_{\mathrm{s}}(x)] \circ [\phi_{\mathrm{s}}(x)]^{-1} = [\boldsymbol{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)] \qquad (206)$$

و (228)، معلوم میشود مشتق ِ تابعها قاعده یِ زنجیرئی یِ مشتقگیری را بر میئاورد. یعنی اگر تابع ِ f در x مشتقپذیر باشد و تابع ِ g در $f(x)$ مشتقپذیر باشد، $(g \circ f)$ در x مشتقپذیر است و

$$[\mathbf{D}(g \circ f)](x) = \{(\mathbf{D}\,g)[f(x)]\}[(\mathbf{D}\,f)(x)]. \qquad (230)$$

سرانجام، اگر Σ_1 و Σ_2 دو میدان ِ اسکالر باشند که هر-دُ در x مشتقپذیر َند، حاصل- ِ-ضرب ِ آنها هم در x مشتقپذیر است و

$$[\mathbf{D}(\Sigma_1\,\Sigma_2)](x) = [(\mathbf{D}\,\Sigma_1)(x)][\Sigma_2(x)] + [\Sigma_1(x)][(\mathbf{D}\,\Sigma_2)(x), \qquad (231)$$

که هم ان قاعده یِ لَیبنیتس است.

وقت ی خمینه یِ $\mathbb{M}$ خطی باشد، رابطه یِ خمینه با فضا یِ مماس بر آن در یک نقطه ساده میشود. در این حالت بینِ این دُ-فضا یک یکریختی یِ خطی (یِ پوشا) هست. این یکریختی را با $[\mathfrak{T}(x)]$ نشان میدهم، که در $\mathsf{LF}(\mathbb{M};\mathrm{T}_x\mathbb{M})$ است و

$$[\mathfrak{T}(x)]\,[\mathsf{et}_x(\gamma)] = (\boldsymbol{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)], \tag{232}$$

که γ خم ی در $\mathbb{M}$ است که از x میگذرد. اگر خمینه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ خطی باشد، یک یکریختی یِ خطی از آن به $\mathbb{R}^m$ هست که آن را با ψ نشان میدهیم. البته رُشن است که این تابع یکتا نیست. ترکیبِ هر یکریختی در $\mathsf{LF}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^m)$ با ψ هم یک یکریختی در $\mathsf{LF}(\mathbb{R}^m;\mathbb{M})$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)] &= \psi^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\psi\circ\gamma)][\gamma^{-1}(x)]\},\\ &= \psi^{-1}[\psi_{\mathrm{s}}(x)][\mathsf{et}_x(\gamma)],\end{aligned} \tag{233}$$

که نشان میدهد

$$\mathfrak{T}(x) = \psi^{-1}[\psi_{\mathrm{s}}(x)]. \tag{234}$$

از جمله وقت ی $\mathbb{M}$ خُدِ $\mathbb{R}^n$ است،

$$\mathfrak{T} = \mathbf{1}_{\mathrm{s}}. \tag{235}$$

تناظرِ $\mathfrak{T}(x)$ بینِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}$ چنین است. برا یِ $\mathbb{M}$ یک پایه یِ f میگیرم و مختصاتِ هر x در $\mathbb{M}$ را ضریبها یِ بسطِ x بر حسبِ f میگیرم. به این مختصات مختصاتِ دِکَرتی (به نقشه یِ متناظر نقشه یِ دِکَرتی) میگویم. رده یِ همئرزی یِ $\mathsf{et}_x(\gamma)$ را، که γ با $(\gamma^i\,f_i)$ برابر است، با $(\dot\gamma^i\,f_i)[\gamma^{-1}(x)]$ نظیر میکنم:

$$[\mathfrak{T}(x)][\mathsf{et}_x(\gamma)] = \{\dot\gamma^i[\gamma^{-1}(x)]\}f_i, \tag{236}$$

که $\dot\gamma^i$ مشتقِ γ^i است. این یعنی از یک ی از خمها یِ رده مثلِ بردار ی مشتق میگیرم که در پایه ای نوشته شده که مقدارها یَش ثابت َند، و کلِ رده را با بردارِ حاصل نظیر میکنم.

البته لازم نیست برا یِ $\mathbb{M}$ مختصات ِ دِکَرتی انتخاب شود. مثلَن در صفحه با مختصات ِ قطبی یِ $\chi = (\rho, \varphi)$ ، برا یِ خم ِ γ با

$$(\chi \circ \gamma)(t) = [\rho(t), \varphi(t)], \tag{237}$$

با استفاده از

$$\gamma(t) = \rho(t)\, \hat{\boldsymbol{\rho}}[\varphi(t)], \tag{238}$$

و

$$(\boldsymbol{D}\, \hat{\boldsymbol{\rho}})(\varphi) = \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{239}$$

دیده میشود

$$\{\mathfrak{T}[\gamma(t)]\}[\mathsf{et}_{\gamma(t)}(\gamma)] = \dot{\rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho\, \dot{\varphi}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \tag{240}$$

که نتیجه میدهد

$$\chi\Big(\{\mathfrak{T}[\gamma(t)]\}[\mathsf{et}_{\gamma(t)}(\gamma)]\Big) = [\sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)\, \dot{\varphi}^2(t)}, \varphi(t) + \alpha(t)], \tag{241}$$

که

$$\dot{\rho} + \mathrm{i}\, \rho\, \dot{\varphi} =: \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\varphi}^2}\, \exp(\mathrm{i}\, \alpha). \tag{242}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \{\chi_{\mathrm{s}}[\gamma(t)]\}[\mathsf{et}_{\gamma(t)}(\gamma)] &= [\boldsymbol{D}(\chi \circ \gamma)](t), \\ &= (\dot{\rho}, \dot{\varphi}). \end{aligned} \tag{243}$$

دیده میشود (234) با χ به جا یِ ψ برقرار نیست.

البته تعریف ِ $\mathfrak{T}(x)$ مستقل از مختصات (نقشه) است. این که (234) به ازا ی ِ همه ی ِ نقشِها برقرار نیست، به این خاطر است که طرف ِ راست ِ (234) مستقل از مختصات نیست، مگر به ازا ی ِ مختصات ِ دِکَرتی (نقشِها یی که یکریختی ی ِ خطی یَند).

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ خمینه اند، f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است، ϕ_a یک نقشه برا ی ِ $\mathbb{M}$، و ϕ'_b یک نقشه برا ی ِ $\mathbb{M}'$ است.

گیرم $\mathbb{M}$ خطی ست. در این صورت ϕ_a را خطی میگیرم. از (228) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,f)(x) &= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi_b\circ f)](x)\}(\phi_a)^{-1}[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)],\\ &= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi_b\circ f)](x)\}[\mathfrak{T}(x)],\end{aligned}\tag{244}$$

که $[\mathfrak{T}(x)]$ یکریختی ی ِ پوشا ی ِ (مستقل-از-نقشه ی ِ) بین ِ $\mathbb{M}$ و $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است.

اگر $\mathbb{M}'$ خطی بود، ϕ'_b را خطی میگیرم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,f)(x) &= \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\phi'_b\Big(\{[\boldsymbol{D}[f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)],\\ &= \{\mathfrak{T}'[f(x)]\}^{-1}\Big(\{[\boldsymbol{D}[f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)],\end{aligned}\tag{245}$$

که $\{\mathfrak{T}'[f(x)]\}$ یکریختی ی ِ پوشا ی ِ (مستقل-از-نقشه ی ِ) بین ِ $\mathbb{M}'$ و $\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{M}$ است.

اگر $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ هر-دُ خطی باشند،

$$(\mathbf{D}\,f)(x) = \{\mathfrak{T}'[f(x)]\}^{-1}[(\boldsymbol{D}\,f)(x)][\mathfrak{T}(x)].\tag{246}$$

دیده میشود بین ِ مشتق ِ f به عنوان ِ تابع ی از خمینه به خمینه، و مشتق ِ f به عنوان ِ تابع ی از یک فضا ی ِ خطی به یک فضا ی ِ خطی تناظر ِ ساده ای هست که مستقل از نقشه است. از این پس تناظرها ی ِ $\mathfrak{T}$ را با همانی جایگزین میکنم. با این کار تمایز ِ بین ِ $\mathbf{D}$ و $\boldsymbol{D}$ (وقت ی $\boldsymbol{D}$ تعریف شده) از بین میرود. به این ترتیب، اگر $\mathbb{M}$ خطی باشد،

$$(\mathbf{D}\,f)(x) = \{(\phi'_b)_{\mathrm{s}}[f(x)]\}^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi_b\circ f)](x)\}.\tag{247}$$

اگر $\mathbb{M}'$ خطی باشد،

$$(\mathbf{D}\,f)(x) = \Big(\{[\boldsymbol{D}[f\circ(\phi_a)^{-1}]\}[\phi_a(x)]\Big)[(\phi_a)_{\mathrm{s}}(x)].\tag{248}$$

اگر $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ هردُ خطی باشند،

$$\mathbf{D}\, f = \boldsymbol{D}\, f. \tag{249}$$

از کاربرد ِ تعریف ِ مشتق ِ تابع برا یِ خُد ِ γ (یک خم) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)] &= [\phi_{\mathrm{s}}(x)]^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi\circ\gamma)][\gamma^{-1}(x)]\}\{\mathbf{1}_{\mathrm{s}}[\gamma^{-1}(x)]\},\\ &= [\mathsf{et}_x(\gamma)]\{\mathbf{1}_{\mathrm{s}}[\gamma^{-1}(x)]\},\end{aligned} \tag{250}$$

یا سادِتر،

$$\mathsf{et}_x(\gamma) = (\mathbf{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)]. \tag{251}$$

همچنین، اگر ϕ نقشه ای باشد که دامنه اَش شامل ِ x است،

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\phi)(x) &= [\mathbf{1}_{\mathrm{s}}(x)]^{-1}\{[\boldsymbol{D}(\phi\circ\phi^{-1})](x)\}[\phi_{\mathrm{s}}(x)],\\ &= [\mathbf{1}_{\mathrm{s}}(x)]^{-1}[\phi_{\mathrm{s}}(x)],\end{aligned} \tag{252}$$

یا سادِتر،

$$\phi_{\mathrm{s}}(x) = (\mathbf{D}\,\phi)(x). \tag{253}$$

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}_1'$ و $\mathbb{M}_2'$ خمینه اند، $(\mathbb{M}_1'\times\mathbb{M}_2')$ هم خمینه است، و f_i در $\mathsf{F}(\mathbb{M}_i';\mathbb{M})$ است. به سادِگی دیده میشود اگر f_1 و f_2 در x مشتقپذیر باشند، (f_1,f_2) هم چنین است، و

$$[\mathbf{D}(f_1,f_2)](x) = \{[(\mathbf{D}\,f_1)(x)],[(\mathbf{D}\,f_2)(x)]\}. \tag{254}$$

از جمله اگر γ_i خم ی در خمینه یِ $\mathbb{M}_i$ باشد،

$$\mathbf{D}(\gamma_1,\gamma_2) = [(\mathbf{D}\,\gamma_1),(\mathbf{D}\,\gamma_2)]. \tag{255}$$

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ و $\mathbb{M}'$ و $(\mathbb{M}_1\times\mathbb{M}_2)$ خمینه اند. x_i در $\mathbb{M}_i$ است، و f در $\mathsf{F}[\mathbb{M}';(\mathbb{M}_1\times\mathbb{M}_2)]$ است و در (x_1,x_2) مشتقپذیر است. ϕ_1 و ϕ_2 و ϕ' نقشِها یی در به ترتیب $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ و $\mathbb{M}'$ اند، که

دامنِها یِشان شامل ِ به ترتیب x_1 و x_2 و $f(x_1,x_2)$ است. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}\,f)(x_1,x_2) &= \{(\phi')_{\mathrm{s}}[f(x_1,x_2)]\}^{-1} \\
&\quad \Big(\{\mathbf{D}[\phi'\circ f\circ(\phi_1\times\phi_2)^{-1}]\}[\phi_1(x_1),\phi_2(x_2)]\Big) \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]\times[(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= \{(\phi')_{\mathrm{s}}[f(x_1,x_2)]\}^{-1} \\
&\quad \Big\{\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\phi'\circ f\circ(\phi_1\times\phi_2)^{-1}][\boldsymbol{.},\phi_2(x_2)]\}\Big)[\phi_1(x_1)]\Big]\mathbf{\Pi}_1 \\
&\quad +\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\phi'\circ f\circ(\phi_1\times\phi_2)^{-1}][\phi_1(x_1),\boldsymbol{.}]\}\Big)[\phi_2(x_2)]\Big]\mathbf{\Pi}_2\Big\} \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]\times[(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= \{(\phi')_{\mathrm{s}}[f(x_1,x_2)]\}^{-1} \\
&\quad \Big\{\Big[\Big(\mathbf{D}\{\phi'\circ[f(\boldsymbol{.},x_2)]\circ(\phi_1)^{-1}\}\Big)[\phi_1(x_1)]\Big]\mathbf{\Pi}_1 \\
&\quad +\Big[\Big(\mathbf{D}\{\phi'\circ[f(x_1,\boldsymbol{.})]\circ(\phi_2)^{-1}\}\Big)[\phi_2(x_2)]\Big]\mathbf{\Pi}_2\Big\} \\
&\quad \{[(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]\times[(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\}, \\
&= \Big((\phi')_{\mathrm{s}}\{[f(\boldsymbol{.},x_2)](x_1)\}\Big)^{-1} \\
&\quad \Big[\Big(\mathbf{D}\{\phi'\circ[f(\boldsymbol{.},x_2)]\circ(\phi_1)^{-1}\}\Big)[\phi_1(x_1)]\Big][(\phi_1)_{\mathrm{s}}(x_1)]\mathbf{\Pi}_1 \\
&\quad +\Big((\phi')_{\mathrm{s}}\{[f(x_1,\boldsymbol{.})](x_2)\}\Big)^{-1} \\
&\quad \Big[\Big(\mathbf{D}\{\phi'\circ[f(x_1,\boldsymbol{.})]\circ(\phi_2)^{-1}\}\Big)[\phi_2(x_2)]\Big][(\phi_2)_{\mathrm{s}}(x_2)]\mathbf{\Pi}_2, \qquad (256)
\end{aligned}
$$

که نتیجه میدهد

$$
(\mathbf{D}\,f)(x_1,x_2) = \Big(\{\mathbf{D}[f(\boldsymbol{.},x_2)]\}(x_1)\Big)\mathbf{\Pi}_1 + \Big(\{\mathbf{D}[f(x_1,\boldsymbol{.})]\}(x_2)\Big)\mathbf{\Pi}_2, \qquad (257)
$$

که با تعریفها یِ

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{D}_{(1)}f](x_1,x_2) &= \{\mathbf{D}[f(\boldsymbol{.},x_2)]\}(x_1), \\
[\mathbf{D}_{(2)}f](x_1,x_2) &= \{\mathbf{D}[f(x_1,\boldsymbol{.})]\}(x_2), \qquad (258)
\end{aligned}
$$

میشود

$$(\mathbf{D}\, f)(x_1, x_2) = \{[\mathbf{D}_{(1)} f](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_1 + \{[\mathbf{D}_{(2)} f](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_2. \tag{259}$$

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ و $\mathbb{M}'_1$ و $\mathbb{M}'_2$ خمینه اند، و $(\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)$ و $(\mathbb{M}'_1 \times \mathbb{M}'_2)$ هم خمینه اند. f_1 و f_2 چنان َند که f_i در $\mathsf{F}[\mathbb{M}'_i; (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_2)]$ است و در (x_1, x_2) مشتقپذیر است. دیده میشود (f_1, f_2) در (x_1, x_2) مشتقپذیر است، و از ترکیب ِ (254) و (259) هم نتیجه میشود

$$[\mathbf{D}(f_1, f_2)](x_1, x_2) = \Big[\Big(\{[\mathbf{D}_{(1)} f_1](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_1 + \{[\mathbf{D}_{(2)} f_1](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_2\Big), \\ \Big(\{[\mathbf{D}_{(1)} f_2](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_1 + \{[\mathbf{D}_{(2)} f_2](x_1, x_2)\}\mathbf{\Pi}_2\Big)\Big]. \tag{260}$$

تعمیم ِ اینها به حاصل- ِ-ضرب ِ دکَرتی یِ چند خمینه هم بدیهی ست.

$\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ خمینِها یی خطی یَند، و x_i در $\mathbb{M}_i$ است. از تناظر (یکی-بودن) ِ $\mathrm{T}_{x_i}\mathbb{M}_i$ با $\mathbb{M}_i$ نتیجه میشود

$$\mathrm{T}_{(x_1 \otimes x_2)}(\mathbb{M}_1 \otimes \mathbb{M}_2) = (\mathrm{T}_{x_1}\mathbb{M}_1) \otimes (\mathrm{T}_{x_2}\mathbb{M}_2). \tag{261}$$

ضمنَن دیده میشود اگر γ_i خم ی در $\mathbb{M}_i$ باشد،

$$\mathbf{D}(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = (\mathbf{D}\, \gamma_1) \otimes \gamma_2 + \gamma_1 \otimes (\mathbf{D}\, \gamma_2). \tag{262}$$

$\mathbb{M}$ خمینه است، $\mathbb{M}'_1$ و $\mathbb{M}'_2$ خمینِها یی خطی یَند، و f_1 و f_2 چنان َند که f_i در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'_i, \mathbb{M})$ است. دیده میشود اگر f_1 و f_2 مشتقپذیر باشند، آنگاه $(f_1 \otimes f_2)$ هم مشتقپذیر است و

$$[\mathbf{D}(f_1 \otimes f_2)](x) = [(\mathbf{D}\, f_1)(x)] \otimes [f_2(x)] + [f_1(x)] \otimes [(\mathbf{D}\, f_2)(x)]. \tag{263}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. دیده میشود

$$(\mathbf{D}\, \boldsymbol{\pi})(z) \in \mathsf{LF}[\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}; \mathrm{T}_z\mathbb{E}], \tag{264}$$

که یعنی $(\mathbf{D}\, \pi)(z)$ یک بردار ِ فضا یِ مماس ِ $\mathbb{E}$ در z را به یک بردار ِ فضا یِ مماس ِ $\mathbb{M}$ در $\boldsymbol{\pi}(z)$ مینگارد.

$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ یک زیرخمینه یِ $\mathbb{E}$ است. نشان میدهم

$$\mathsf{ker}[(\mathbf{D}\, \boldsymbol{\pi})(z)] = \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{265}$$

برا یِ این کار ξ را در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ میگیرم. متناظر با این بردار یک خم ِ γ هست که

$$\gamma(0) = z,$$
$$(\mathbf{D}\,\gamma)(0) = \xi. \tag{266}$$

دیده میشود

$$\gamma(t) = U[(\pi \circ \gamma)(t), y(t)], \tag{267}$$

که U بدیهیگر ِ متناظر با یک نقشه یِ ϕ است که دامنه یِ ϕ شامل ِ $\boldsymbol{\pi}(z)$ است، و y خم ی با مقدار در تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}$ است. خم ِ $\tilde{\gamma}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\gamma}(t) = U[\boldsymbol{\pi}(z), y(t)]. \tag{268}$$

رُشن است که

$$\mathsf{img}(\tilde{\gamma}) \in \mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}, \tag{269}$$

و از آنجا

$$(\mathbf{D}\,\tilde{\gamma})(0) \in \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{270}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{D}\,\gamma)(0) = (\mathbf{D}\,\tilde{\gamma})(0) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U][\boldsymbol{\pi}(z), y(0)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi, \tag{271}$$

یا

$$\xi = (\mathbf{D}\,\tilde{\gamma})(0) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U][\boldsymbol{\pi}(z), y(0)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi \tag{272}$$

این یعنی درستی یِ

$$\xi \in \mathsf{ker}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)] \tag{273}$$

درستی یِ

$$\xi \in \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)} \tag{274}$$

را نتیجه میدهد. بر عکس، اگر (274) برقرار باشد میشود γ را چنان گرفت که تصویر َش در $\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ باشد. در این صورت $(\boldsymbol{\pi} \circ \gamma)$ ثابت و در نتیجه مشتق َش صفر میشود، که این هم (273) را نتیجه میدهد. پس (273) و (274) همئرز َند، که این هم ان (265) است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. بین ِ $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ و $\mathrm{T}_{U_a(x,y)}\mathbb{E}_x$ (که U_a یک بدیهیگر است) یک تناظر ِ خطی هست. این تناظر را با $\mathsf{I}_a(x,y)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{I}_a(x,\boldsymbol{\cdot}) = \mathbf{D}[U_a(x,\boldsymbol{\cdot})]. \tag{275}$$

دیده میشود

$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a](x,y)\} \in \mathsf{LF}[\mathrm{T}_{U_a(x,y)}\mathbb{E}; \mathrm{T}_y\mathbb{Y}]. \tag{276}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U_a(x,y)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a](x,y)\} &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\boldsymbol{\pi} \circ U_a)](x,y),\\ &= 0,\end{aligned} \tag{277}$$

که نتیجه میدهد

$$\Big(\mathsf{img}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a](x,y)\}\Big) \subseteq \Big(\mathsf{ker}\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U_a(x,y)]\}\Big). \tag{278}$$

پس

$$[\mathsf{I}_a(x,y)] \in \mathsf{LF}[\mathrm{T}_{U_a(x,y)}\mathbb{E}_x; \mathrm{T}_y\mathbb{Y}]. \tag{279}$$

به سادِگی میشود دید $\mathsf{I}_a(x,y)$ یک-به-یک هم هست.

$\tilde{\mathsf{I}}_a(x,y)$ را در $\mathsf{LF}\{\mathrm{T}_{U_a(x,y)}\mathbb{E}_x; [(\mathrm{T}_x\mathbb{M}) \times (\mathrm{T}_y\mathbb{Y})]\}$ میگیرم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\mathsf{I}}_a(x,y) = [\mathsf{I}_a(x,y)] \circ \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1. \tag{280}$$

$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1[(\mathrm{T}_x\mathbb{M})\times(\mathrm{T}_y\mathbb{Y})]$ با $[\{0\}\times(\mathrm{T}_y\mathbb{Y})]$ یکریخت است. با تبدیل ِ این یکریختی به تساوی، معلوم میشود $\mathsf{I}_a(x,y)$ تحدید ِ $\tilde{\mathsf{I}}_a(x,y)$ به $[\{0\}\times(\mathrm{T}_y\mathbb{Y})]$ است. البته $\tilde{\mathsf{I}}_a(x,y)$ به مئلفه یِ صفر ِ متغیر َش (یعنی آن بخش که از $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ میئاید) هم بستِگی ندارد:

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\tilde{\mathsf{I}}_a(x,y)]=0. \tag{281}$$

از این پس $\tilde{\mathsf{I}}_a$ را با خُد ِ I_a نشان میدهم. با این نمادگذاری، $\mathsf{I}_a(x,y)$ فقط نسبت به متغیر ِ اول َش (یعنی آن بخش که از $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ میئاید) یک-به-یک است.

$\mathsf{I}_a(x,y)$ به بدیهیگر بستِگی دارد. U_a و U_b را دُ بدیهیگر، و $U_{a\,b}$ را تابع- ِ-گذار ِ متناظر میگیرم. از

$$U_b(x,y)=U_a[x,U_{a\,b}(x,y)], \tag{282}$$

نتیجه میشود

$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_b](x,y)\}=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][x,U_{a\,b}(x,y)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}, \tag{283}$$

که نشان میدهد

$$\mathsf{I}_b(x,y)=\{\mathsf{I}_a[x,U_{a\,b}(x,y)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}, \tag{284}$$

که I_a و I_b تناظرها یی اند که با به ترتیب U_a و U_b ساخته شده اند. با $z=U_b(x,y)$، رابطه یِ بالا را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}(\mathsf{I}_b\circ U_b^{-1})(z)&=[(\mathsf{I}_a\circ U_a^{-1})(z)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\},\\&=[(\mathsf{I}_a\circ U_a^{-1})(z)]\Big(\{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_a^{-1}\circ U_b)]\}[U_b^{-1}(z)]\Big),\\&=[(\mathsf{I}_a\circ U_a^{-1})(z)]\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_a^{-1}\circ U_b)]\}[U_b^{-1}(z)]\Big).\end{aligned} \tag{285}$$

اگر کلاف بدیهی باشد، میشود رابطه یِ بالا را به شکل ی مستقل از بدیهیگر نوشت. دیده میشود

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_a^{-1}\circ U_b)]\}[U_b^{-1}(z)]&=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathrm{U}_a^{-1}\circ \mathrm{U}_b)]\}[U_b^{-1}(z)],\\&=\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\boldsymbol{.})]^{-1}\circ[\mathrm{U}_b(x,\boldsymbol{.})]\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_b^{-1})(z)],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\mathrm{U}_b\circ U_b^{-1})(z)]\Big]\\
&\quad \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_b(x,\centerdot)]\}\Big)[\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_b^{-1})(z)]\Big]\\
&= \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \boldsymbol{U}^{-1})(z)]\Big]\\
&\quad \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_b(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[\mathrm{U}_b\circ U_b^{-1})(z)]\Big]^{-1}\\
&= \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \boldsymbol{U}^{-1})(z)]\Big]\\
&\quad \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_b(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \boldsymbol{U}^{-1})(z)]\Big]^{-1}, \qquad (286)
\end{aligned}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\begin{aligned}
&[(\mathsf{I}_b\circ U_b^{-1})(z)]\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_b(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \boldsymbol{U}^{-1})(z)]\Big]\\
&= [(\mathsf{I}_a\circ U_a^{-1})(z)]\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \boldsymbol{U}^{-1})(z)]\Big], \qquad (287)
\end{aligned}
$$

که $\boldsymbol{U}$ بدیهیگر ِ سراسری یِ $\mathbb{E}$ است. پس میشود یک تناظر ِ مستقل-از-بدیهیگر بین ِ $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ و $\mathrm{T}_{\boldsymbol{U}(x,y)}\mathbb{E}_x$، یا بین ِ $[(\mathrm{T}_x\mathbb{M})\times(\mathrm{T}_y\mathbb{Y})]$ و $\mathrm{T}_{\boldsymbol{U}(x,y)}\mathbb{E}_x$، ساخت، این تناظر را با $\mathsf{I}(x,y)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$
\mathsf{I}(x,y) = [(\mathsf{I}_a\circ U_a^{-1}\circ \boldsymbol{U})(x,y)]\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)(y)\Big]. \qquad (288)
$$

دیده میشود

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I}(x,y) &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][(U_a^{-1}\circ \boldsymbol{U})(x,y)]\}\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)(y)\Big],\\
&= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a]\{x,[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}(y)\}\Big)\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)(y)\Big],\\
&= \Big(\{\mathbf{D}[U_a(x,\centerdot)]\}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}(y)\}\Big)\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)(y)\Big],\\
&= \Big(\mathbf{D}\{[U_a(x,\centerdot)]\circ[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]^{-1}\}\Big)(y), \qquad (289)
\end{aligned}
$$

که نشان میدهد

$$
\mathsf{I}(x,\centerdot) = \mathbf{D}[\boldsymbol{U}(x,\centerdot)]. \qquad (290)
$$

به سادگی دیده میشود

$$
\mathsf{I}_a(x,\centerdot) = \{[\mathsf{I}(x,\centerdot)]\circ[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]\}\{\mathbf{D}[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]\}, \qquad (291)
$$

یا

$$[\mathsf{I}_a(x,\centerdot)]\Big(\{\mathbf{D}[\mathrm{U}_a^{-1}(x,\centerdot)]\}[\mathrm{U}_a(x,\centerdot)]\Big)\circ[U_a^{-1}(x,\centerdot)]=\mathsf{I}(x,\centerdot). \tag{292}$$

$\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار با بدیهیگرِ U است و $\check{U}$ بدیهیگر-ِ-خطی یِ متناظر با U است. به سادگی دیده میشود

$$\mathbf{D}[U(x,\centerdot)]=\check{U}(x), \tag{293}$$

یا

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]=\check{U}[\boldsymbol{\pi}(z)]. \tag{294}$$

$\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. با بدیهیگرِ U_a (متناظر با بدیهیگر-ِ-خطی یِ $\check{U}_a$) میشود بین $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ و $[\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}]\times[\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}]$ یک تناظرِ یک-به-یک ساخت. این تناظر را با $\mathsf{K}\!\mathsf{I}_a$ نشان میدهم و آن را، بر حسبِ $x=\boldsymbol{\pi}(z)$، چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{K}\!\mathsf{I}_a=[\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}},\check{U}_a(x)]\circ\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}. \tag{295}$$

از

$$\begin{aligned}\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}&=[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ U_a^{-1})](z),\\&=(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z),\end{aligned} \tag{296}$$

دیده میشود مئلفه یِ صفرِ $\mathsf{K}\!\mathsf{I}_a$ مستقل از بدیهیگر است. برا یِ مئلفه یِ دیگر،

$$\begin{aligned}\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\mathsf{K}\!\mathsf{I}_a&=[\check{U}_a(x)]\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}\Big),\\&=[\check{U}_a(x)]\{[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_a^{-1})](z)\},\\&=[\check{U}_a(x)]\{[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},\\&=[\check{U}_a(x)]\{(\mathbf{D}\,U_{a\,b})[U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},\\&=[\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\Big)\\&\quad+[\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\Big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [\check{U}_a(x)]\{\check{U}_{a\,b}[U_b^{-1}(z)]\}\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\Big)\\
&\quad + [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ U_b^{-1})](z)\},\\
&= [\check{U}_b(x)]\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\Big)\\
&\quad + [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\,[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)],
\end{aligned}
\tag{297}
$$

که $\check{U}_{a\,b}$ تابع- ِگذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b است. به این ترتیب،

$$
\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_b = [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)],
\tag{298}
$$

که از آن نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_b &= [\check{U}_a(x)]\{[(\mathbf{D}\,\check{U}_{a\,b})(x)][(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_b^{-1})(z)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)],\\
&= \{[\check{U}_a(x)][(\mathbf{D}\,\check{U}_{a\,b})(x)][\check{U}_b^{-1}(x)]\,z\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)],
\end{aligned}
\tag{299}
$$

دیده میشود این مئلفه یِ $\mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_a$ به بدیهیگر بستِگی دارد. این بستِگی از آنجا میئاید که تابع- ِ-گذارها، علاوه بر این که به متغیر ِ تارُنُعی بستِگی دارند به متغیر ِ خمینه هم وابسته اند.

اگر کلاف بدیهی باشد، میشود (299) را مستقل از بدیهیگر نوشت. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
\check{U}_a(\mathbf{D}\,\check{U}_{a\,b})\check{U}_b^{-1} &= \check{\boldsymbol{U}}\,\check{\mathrm{U}}_a[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_a^{-1}\,\check{\mathrm{U}}_b)]\check{\mathrm{U}}_b^{-1}\,\check{\boldsymbol{U}}^{-1},\\
&= \check{\boldsymbol{U}}\,\check{\mathrm{U}}_a[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_a^{-1})]\check{\boldsymbol{U}}^{-1} + \check{\boldsymbol{U}}(\mathbf{D}\,\check{\mathrm{U}}_b)\check{\mathrm{U}}_b^{-1}\,\check{\boldsymbol{U}}^{-1},\\
&= \check{\boldsymbol{U}}\,\check{\mathrm{U}}_a[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_a^{-1})]\check{\boldsymbol{U}}^{-1} - \check{\boldsymbol{U}}\,\check{\mathrm{U}}_b[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_b^{-1})]\check{\boldsymbol{U}}^{-1},
\end{aligned}
\tag{300}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\begin{aligned}
&\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_a - [\check{\boldsymbol{U}}(x)][\check{\mathrm{U}}_a(x)]\{[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_a^{-1})](x)\}[\check{\boldsymbol{U}}^{-1}(x)],\\
&= \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ \mathsf{K}\!\!\mathsf{l}_b - [\check{\boldsymbol{U}}(x)][\check{\mathrm{U}}_b(x)]\{[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_b^{-1})](x)\}[\check{\boldsymbol{U}}^{-1}(x)].
\end{aligned}
\tag{301}
$$

در واقع با تعریف ِ

$$
\mathsf{K}\!\!\mathsf{l} = [\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}, \check{\boldsymbol{U}}(x)]\circ\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{U}^{-1}](z)\},
\tag{302}
$$

دیده میشود

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K} = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a - [\check{\boldsymbol{U}}(x)][\check{\mathrm{U}}_a(x)]\{[\mathbf{D}(\check{\mathrm{U}}_a^{-1})](x)\}[\check{\boldsymbol{U}}^{-1}(x)]. \tag{303}$$

11 مشتق ِ سویی

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و در x مشتقپذیر است. v در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. مشتق ِ f در سو ی ِ v (یا مشتق ِ سویی ی ِ f با v) را با $(\mathbf{D}_v\, f)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{D}_v\, f = [(\mathbf{D}\, f)(x)]\, v. \tag{304}$$

به هر تابع ِ $(\mathbf{D}_v\, f)$ از این نُع یک مشتق ِ سویی میگویم. γ یک خم ِ یک-به-یک است که از نقطه ی ِ x میگذرد و در آن نقطه مشتقپذیر است. از قاعده ی ِ زنجیرِئی ی ِ مشتقگیری نتیجه میشود

$$\mathbf{D}_{\mathsf{et}_x(\gamma)}\, f = [\mathbf{D}(f \circ \gamma)][\gamma^{-1}(x)]. \tag{305}$$

اگر g هم تابع ی باشد که در $f(x)$ مشتقپذیر است،

$$\mathbf{D}_v(g \circ f) = \mathbf{D}_w\, g, \tag{306}$$

که w در $\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{M}'$ است و

$$w = [(\mathbf{D}\, f)(x)]v. \tag{307}$$

از این که مشتق برا ی ِ میدانها ی ِ اسکالر لَیبنیتسی ست، نتیجه میشود مشتق ِ سویی هم برا ی ِ میدانها ی ِ اسکالر لَیبنیتسی ست، یعنی اگر Σ_1 و Σ_2 دو میدان ِ اسکالر باشند که در x مشتقپذیر اند،

$$\mathbf{D}_v(\Sigma_1\, \Sigma_2) = (\mathbf{D}_v\, \Sigma_1)[\Sigma_2(x)] + [\Sigma_1(x)](\mathbf{D}_v\, \Sigma_2). \tag{308}$$

در واقع برا ی ِ درستی ی ِ این رابطه لازم نیست Σ_1 و Σ_2 هر-دُ اسکالر باشند. کافی ست یک ی از آنها اسکالر باشد و دیگری در یک خمینه ی ِ خطی مقدار بگیرد.

بر عکس، گیرم $\mathfrak{O}$ تابع ی خطی ست که بر میدانها یِ اسکالر ِ هموار-در-x اثر میکند، مقدار َش حقیقی ست، و به ازا یِ هر دُ-میدان ِ اسکالر ِ Σ_1 و Σ_2

$$\mathfrak{O}\,(\Sigma_1\,\Sigma_2) = (\mathfrak{O}\,\Sigma_1)[\Sigma_2(x)] + [\Sigma_1(x)](\mathfrak{O}\,\Sigma_2). \tag{309}$$

نشان میدهم چنین-تابع ی یک مشتق ِ سویی ست. از (309) نتیجه میشود

$$\mathfrak{O}\,1 = 0. \tag{310}$$

برا یِ دیدن ِ این کافی ست Σ_2 در (309) برابر با 1 گرفته شود. همچنین، گیرم h یک میدان ِ اسکالر است که خُد َش و مشتق َش در x صفر َند. نشان میدهم در این صورت

$$\mathfrak{O}\,h = 0. \tag{311}$$

علت این است که اگر میدان ِ اسکالر ِ h چنان باشد که خُد َش و مشتق َش در x صفر باشند، متناظر با یک نقشه یِ ϕ که دامنه اَش x را در بر دارد، تابعها یِ هموار ِ $H_{i\,j}$ ی هستند که

$$h(y) = [\phi^i(y) - \phi^i(x)][\phi^j(y) - \phi^j(x)]H_{i\,j}(y), \tag{312}$$

که ϕ^i مئلفه یِ i ِ ϕ است. اینجا از هموار-بودن ِ h (این که $h \circ \phi^{-1}$ به تعداد ِ کافی بار مشتقپذیر است) استفاده شده. تعریف میکنم

$$\begin{aligned} \Sigma_{1\,i}(y) &= [\phi^j(y) - \phi^j(x)]H_{i\,j}(y), \\ {\Sigma_2}^i(y) &= \phi^i(y) - \phi^i(x), \end{aligned} \tag{313}$$

دیده میشود

$$h = \Sigma_{1\,i}\,{\Sigma_2}^i, \tag{314}$$

که از آن (311) نتیجه میشود.

متناظر با میدان ِ اسکالر ِ Σ، میدان ِ اسکالر ِ h را چنین تعریف میکنم.

$$h(y) = \Sigma(y) - \Sigma(x) - \{[\mathbf{D}(\Sigma \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\}[\phi(y) - \phi(x)]. \tag{315}$$

دیده میشود h و مشتق ِ آن در x صفر َند. پس (311) برقرار است. از این‌جا نتیجه میشود

$$\mathfrak{O}\,\Sigma = \{[\mathbf{D}(\Sigma \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\}(\mathfrak{O}\,\phi), \tag{316}$$

که $\mathfrak{D}\,\phi$ بردار ی در $\mathbb{R}^m$ است (m بُعد ِ دامنه یِ Σ است) که مئلفه یِ i ِ آن $\mathfrak{D}\,\phi^i$ است. تعریف میکنم

$$v = [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}(\mathfrak{D}\,\phi). \tag{317}$$

نتیجه میشود

$$\mathfrak{D}\,\Sigma = \mathbf{D}_v\,\Sigma, \tag{318}$$

که هم ان حکم است.

12 فضا یِ تانسرها در یک نقطه

$\mathbb{M}$ یک خمینه است و x در $\mathbb{M}$ است. پس $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ یک فضا یِ خطی ست. فضا یِ دُگان ِ این فضا $(\mathrm{T}_x\mathbb{M})^*$ است. به این فضا فضا یِ هممماس در نقطه یِ x میگویم و آن را با $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ نشان میدهم. از تعریف ِ فضا یِ دُگان رُشن است که اگر Σ در $\mathsf{F}(\mathbb{R};\mathbb{M})$ باشد، آنگاه $(\mathbf{D}\,\Sigma)(x)$ عضو ِ $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ است. اثر ِ $(\mathbf{D}\,\Sigma)(x)$ بر بردار ِ v هم برابر با $(\mathbf{D}_v\,\Sigma)$ است.

فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) در نقطه یِ x را با $\mathrm{T}^{(r,s)}_x\mathbb{M}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{T}^{(r,s)}_x\mathbb{M} = (\mathrm{T}_x\mathbb{M})^{\otimes r} \otimes (\mathrm{T}^*_x\mathbb{M})^{\otimes s}. \tag{319}$$

البته ترتیب ِ هر یک از $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ ها و $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ ها در حاصل- ِ-ضرب ِ بالا را هم میشود تغییر داد. رُشن است که با تعریف ِ بالا

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}^{(0,0)}_x\mathbb{M} &= \mathbb{R},\\
\mathrm{T}^{(1,0)}_x\mathbb{M} &= \mathrm{T}_x\mathbb{M},\\
\mathrm{T}^{(0,1)}_x\mathbb{M} &= \mathrm{T}^*_x\mathbb{M}.
\end{aligned} \tag{320}$$

همچنین،

$$\mathsf{dim}[\mathrm{T}^{(r,s)}_x\mathbb{M}] = [\mathsf{dim}(\mathbb{M})]^{r+s}. \tag{321}$$

13 پایه یِ مختصاتی

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست و x در آن است. متناظر با نقشه یِ ϕ که دامنه اَش شامل ِ x است، یک پایه یِ e برا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ هست که

$$e_i = [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1} E_i, \tag{322}$$

که E_i یک عضو ِ $\mathbb{R}^m$ است که

$$(E_i)^j = \delta_i^j. \tag{323}$$

رُشن است که

$$e_i = (\mathbf{D}\,\gamma_i)(0), \tag{324}$$

که

$$\phi^j \circ \gamma_i(t) = \phi^j(x) + \delta_i^j\, t. \tag{325}$$

به γ_i ها خمها یِ مختصاتی میگویم. این خمها چنان َند که با حرکت بر خم ِ i، فقط مختصه یِ i با آهنگ ِ یک تغییر میکند و بقیه یِ مختصِها ثابت میمانند.

f تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{M}$، و در x مشتقپذیر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{e_i} f &= \{[\mathbf{D}(f \circ \phi^{-1})][\phi(x)]\} E_i,\\ &= [\partial_i (f \circ \phi^{-1})][\phi(x)],\end{aligned} \tag{326}$$

که ∂_i مشتق ِ پارِئی نسبت به مختصه یِ i است. از اینجا معلوم میشود

$$\mathbf{D}_{e_i}\, \phi^j = \delta_i^j, \tag{327}$$

یا

$$e_i(\mathbf{D}\,\phi^j) = \delta_i^j. \tag{328}$$

به این ترتیب مقدارها یِ پایه-یِ-دُگان ِ $e^* = \{(i, e^i) \mid i\}$ مشتق ِ تابعها یِ مختصاتی یَند:

$$e^i = (\mathbf{D}\,\phi^i)(x). \tag{329}$$

به e و e^* و پایِها یی که از ضرب ِ تانسری یِ e و e^* ساخته میشوند پایه یِ مختصاتی میگویم. اگر $\{(i, E^i) \mid i\}$ دُگان ِ پایه یِ $\{(i, E_i) \mid i\}$ باشد، از (323) نتیجه میشود

$$(E^i)_j = \delta^i_j. \tag{330}$$

همچنین، از (322) نتیجه میشود

$$E^i = \{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^*\}^{-1} e^i. \tag{331}$$

با هر نقشه یک پایه یِ مختصاتی ساخته میشود. بر عکس، نشان میدهم متناظر با هر پایه یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ یک نقشه هست که این پایه را مختصاتی میکند، یعنی مماس بر خمها یِ مختصاتی یِ متناظر با این نقشه مقدارها یِ آن پایه است. برا یِ اثبات، پایه یِ e و نقشه یِ ϕ را میگیرم. $\{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]e\}$ یک پایه یِ $\mathbb{R}^m$ است، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. پس یک یکریختی یِ Λ در $\mathsf{LF}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ هست که

$$[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]e_i = \Lambda\, E_i, \tag{332}$$

که E_i ها (323) را بر میاورند. نقشه یِ ψ با دامنه یِ $\mathrm{dom}(\phi)$ را به چنین تعریف میکنم.

$$\psi = \Lambda^{-1} \circ \phi. \tag{333}$$

دیده میشود

$$[(\mathbf{D}\,\psi)(x)]e_i = E_i, \tag{334}$$

که نشان میدهد پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ψ هم ان e است.

ϕ و ϕ' دُ نقشه اند که دامنه یِ هر-دُ x را در بر دارد. پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر با به ترتیب ϕ و ϕ' را با e و e' نشان میدهم. رُشن است که این دُ-پایه را تابع- ِ-تغییر- ِ-پایه یِ M به هم مربوط میکند:

$$e'_i = \mathrm{M}\, e_i, \tag{335}$$

که

$$\mathrm{M} = [(\mathbf{D}\,\phi')(x)]^{-1}[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]. \tag{336}$$

برا یِ عنصرها یِ ماتریسی یِ M، دیده میشود

$$\begin{aligned} e'_i &= [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}[(\mathbf{D}\,\phi)(x)][(\mathbf{D}\,\phi')(x)]^{-1}\,E_i, \\ &= [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}\tilde{\mathrm{M}}^j{}_i\,E_j, \\ &= \tilde{\mathrm{M}}^j{}_i\,e_j, \end{aligned} \tag{337}$$

که

$$\tilde{M} = [(\mathbf{D}\,\phi)(x)][(\mathbf{D}\,\phi')(x)]^{-1}. \tag{338}$$

از (335) و (337) دیده میشود

$$\mathrm{M}^j{}_i = \tilde{\mathrm{M}}^j{}_i. \tag{339}$$

البته M بر $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و $\tilde{\mathrm{M}}$ بر $\mathbb{R}^m$ اثر میکند (که m بُعد ِ خمینه است)، و عنصرها یِ ماتریسی یِ M و $\tilde{\mathrm{M}}$ در پایِها یِ به ترتیب e و E نوشته شده اند. با

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} X'^0 \\ \vdots \\ X'^{m-1} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

دیده میشود

$$\tilde{\mathrm{M}}^j{}_i = \frac{\partial\,X^j}{\partial\,X'^i}. \tag{340}$$

به این ترتیب، از (335)، (338)، و (339) نتیجه میشود

$$e'_i = \frac{\partial X^j}{\partial X'^i} e_j, \tag{341}$$

که رابطه یِ X' با X از

$$\begin{pmatrix} X'^0 \\ \vdots \\ X'^{m-1} \end{pmatrix} = (\phi' \circ \phi^{-1}) \begin{pmatrix} X^0 \\ \vdots \\ X^{m-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

به دست میئاید. همچنین

$$e'^i = \frac{\partial X'^i}{\partial X^j} e^j, \tag{342}$$

ضریبها یِ بسط ِ بردار ِ v و همبردار ِ σ در نقطه یِ x بر حسب ِ به ترتیب پایه یِ مختصاتی یِ e و دُگان َش را با به ترتیب v^i و σ_i نشان میدهم. اگر e' یک پایه یِ مختصاتی یِ دیگر برا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد، آنگاه رابطه یِ $v^{\imath'}$ ها و $\sigma_{\imath'}$ ها (مئلفِها در پایه یِ e' و دُگان َش) با مئلفِها در پایه یِ قبلی چنین است.

$$\begin{aligned} v^{\imath'} &= \frac{\partial X'^i}{\partial X^j} v^j, \\ \sigma_{\imath'} &= \frac{\partial X^j}{\partial X'^i} \sigma_j. \end{aligned} \tag{343}$$

به سادِگی دیده میشود اگر f یک تابع با دامنه یِ $\mathbb{M}$، و در x مشتقپذیر باشد،

$$(\mathbf{D}\, f)(x) = [(\mathbf{D}_i\, f)(x)] \otimes e^i, \tag{344}$$

که

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_i\, f)(x) &= [\partial_i (f \circ \phi^{-1})][\phi(x)], \\ &= \mathbf{D}_{e_i}\, f. \end{aligned} \tag{345}$$

همچنین،

$$\mathbf{D}_v\, f = v^i (\mathbf{D}_i\, f)(x). \tag{346}$$

از جمله اگر ϕ یک نقشه باشد،

$$\mathbf{D}_v\,\phi^i = v^i. \tag{347}$$

یک نتیجه یِ این رابطه آن است که v صفر است اگر و تنها اگر اثر ِ $\mathbf{D}_v$ بر همه یِ میدانها یِ اسکالر صفر باشد. یا این که v با u برابر است اگر و تنها اگر اثر ِ $\mathbf{D}_v$ بر هر میدان ِ اسکالر با اثر ِ $\mathbf{D}_u$ بر آن میدان برابر باشد.

سرانجام، اگر f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ باشد و در x مشتقپذیر باشد،

$$(\mathbf{D}\,f)^i{}_\alpha(x) = [\mathbf{D}_\alpha(\phi\circ f)^i](x), \tag{348}$$

که ϕ یک نقشه در $\mathbb{N}$ است که دامنه اَش شامل ِ $f(x)$ است.

از (347) دیده میشود

$$\mathbf{D}_j\,\phi^i = \delta^i_j, \tag{349}$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_j\,\phi &= \mathbf{D}_j(\phi^i\,E_i),\\ &= \delta^i_j\,E_i,\end{aligned} \tag{350}$$

که ثابت-بودن ِ E_i به کار رفته. به این ترتیب،

$$\mathbf{D}_j\,\phi = E_j. \tag{351}$$

پس پایه یِ مختصاتی یِ e بر حسب ِ نقشه چنین میشود.

$$e_j = [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}[(\mathbf{D}_j\,\phi)(x)]. \tag{352}$$

رُشن است که این رابطه را میشود به شکل ِ

$$e_j = [\mathbf{D}_{E_j}(\phi^{-1})][\phi(x)] \tag{353}$$

هم نوشت، که در واقع هم ان (322)، رابطه یِ تعریف-کننده یِ پایه یِ مختصاتی یِ e، است. یک شکل ِ سادِتر ِ رابطه یِ بالا

$$e_j = [\mathbf{D}_j(\phi^{-1})][\phi(x)] \tag{354}$$

است، که در آن $\mathbf{D}_j$ به معنی یِ مشتقگیری با بردار ِ پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصه یِ j در دامنه یِ ϕ^{-1} است. دامنه یِ ϕ^{-1} بخش ی از $\mathbb{R}^m$ است، که m بُعد ِ خمینه است. و البته مختصه یِ j در دامنه یِ ϕ^{-1} به ازا یِ نقطه یِ $\phi(x)$، هم ان $\phi^j(x)$ است. سادِتر، میگویند e_j مشتق ِ مکان (نقطه در خمینه) نسبت به مختصه یِ j ِ نقطه است.

سرانجام، از (352) دیده میشود

$$\begin{aligned} e_j &= \{[\mathbf{D}(\phi^{-1})][\phi(x)]\}E_j, \\ &= \{[\mathbf{D}(\phi^{-1})][\phi(x)]\}[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]e_j. \end{aligned} \tag{355}$$

البته این اتحاد ِ

$$e_j = \mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}\, e_j \tag{356}$$

است. اما میشود آن را چنین نوشت.

$$e_j = [\mathbf{D}_{e_j}(\phi^{-1} \circ \phi)](x), \tag{357}$$

یا

$$e_j = (\mathbf{D}_j\, \mathbf{1}_{\mathbb{M}})(x). \tag{358}$$

یعنی e_j مشتق ِ سویی یِ مکان (خُد ِ نقطه در خمینه) با بردار ِ مختصاتی یِ j (یعنی خُد ِ e_j) است.

با استفاده از (344) و (352) دیده میشود

$$\begin{aligned} e_j \otimes e^j &= \{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}[(\mathbf{D}_j\,\phi)(x)]\} \otimes e^j, \\ &= [(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}[(\mathbf{D}\,\phi)(x)], \end{aligned} \tag{359}$$

که یک اتحاد است: دُ-طرف ِ رابطه $\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}$ اند.

برا یِ خم ِ γ،

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}\,\gamma)(t) &= [\mathbf{D}(\phi^{-1}\circ\phi\circ\gamma)](t),\\
&= \{([\mathbf{D}(\phi^{-1})][(\phi\circ\gamma)(t)]\}\{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)](t)\},\\
&= \{(\mathbf{D}\,\phi)[\gamma(t)]\}^{-1}\{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)^j](t)\}E_j,\\
&= \{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)^j](t)\}\{(\mathbf{D}\,\phi)[\gamma(t)]\}^{-1}E_j, \qquad (360)
\end{aligned}
$$

که نتیجه میدهد

$$
(\mathbf{D}\,\gamma)(t) = \{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)^j](t)\}e_j. \qquad (361)
$$

به یک شکل ِ دیگر، برابری یِ دوم در (360) را چنین ادامه میدهم.

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}\,\gamma)(t) &= \{[\mathbf{D}_j(\phi^{-1})][(\phi\circ\gamma)(t)]\}\{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)^j](t)\},\\
&= e_j\{[\mathbf{D}(\phi\circ\gamma)^j](t)\}, \qquad (362)
\end{aligned}
$$

که البته هم ان (361) است، اما به این شکل که مشتق ِ خم به شکل ِ مشتق ِ خم نسبت به مختصات ضرب در مشتق ِ مختصات نسبت به پارامتر نوشته شده. مشتق ِ خم (مکان) نسبت به هر مختصه هم بردار- ِ-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن مختصه است.

2

میدان

14 فضا یِ تانسرها

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) متناظر با این خمینه را با $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} \mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}. \tag{363}$$

این فضا برخلاف ِ فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) در یک نقطه یک فضا یِ خطی نیست، چون مجموع ِ یک تانسر در نقطه یِ x و یک تانسر در نقطه یِ x' (با $x' \neq x$) تعریف نشده است. به تانسرها یِ نُع ِ $(r,0)$ تانسرها یِ پادوردا، و به تانسرها یِ نُع ِ $(0,s)$ تانسرها یِ هموردا میگویم. به یک تانسر ِ کاملَن پادمتقارن ِ نُع ِ $(0,s)$ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل میگویم. اگر σ یک تانسر ِ پادمتقارن ِ نُع ِ s باشد (یعنی عضو ِ حاصل- ِ-ضرب ِ تانسُری یِ s فضا باشد و پادمتقارن باشد)، گونه یِ σ را s تعریف میکنم. گونه یِ σ را با $\mathrm{ty}(\sigma)$ نشان میدهم.

$\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ یک خمینه است. برا یِ اثبات، توجه میکنم که اجتماعها یِ اعضا یِ $\{\mathbb{U}_a\times\mathbb{V}_b \mid (a,b)\}$ که $\mathbb{U}_a$ ها زیرمجموعِها یِ باز ِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{V}_b$ ها زیرمجموعِها یِ باز ِ $(\mathbb{R}^m)^{\otimes r}\otimes[(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}$ اند، یک تپُلژی یِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ است، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. اثبات ِ هاؤسدُرف-بودن ِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ هم فقط نیازمند ِ

نوشتن است. میمانَد این که برا یِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ یک اتلس ساخته شود. اتلس را با هم ان اتلس ِ $\mathbb{M}$ میسازم. برا یِ این کار نقشه یِ ϕ را به کار میبرم. از این نقشه یک تابع ِ $\phi^{(r,s)}$ میسازم که

$$\mathsf{dom}[\phi^{(r,s)}] = \bigcup_{x\in\mathsf{dom}(\phi)} \mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}. \tag{364}$$

$e(x)$ را پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ برا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$، و $[e(x)]^* = \{[i, e^i(x)] \mid i\}$ را دُ-گان ِ $e(x)$ میگیرم. اگر T در $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ باشد، یک x هست که

$$T = T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\, e_i(x) \otimes \cdots \otimes e^j(x). \tag{365}$$

تعریف میکنم

$$\phi^{(r,s)}(T) = [\phi(x), T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\, E_i \otimes \cdots \otimes E^j], \tag{366}$$

که

$$\begin{aligned} E_i &= [(\mathbf{D}\,\phi)(x)][e_i(x)], \\ E^j &= \{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^*\}^{-1}[e^j(x)]. \end{aligned} \tag{367}$$

به این ترتیب،

$$\phi^{(r,s)}(T) = \Big[\phi(x), \Big([(\mathbf{D}\,\phi)(x)] \otimes \cdots \otimes \{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^*\}^{-1}\Big)(T)\Big]. \tag{368}$$

اگر ϕ' یک نقشه یِ دیگر باشد که دامنه اَش شامل ِ x است، $\phi'^{(r,s)}$ را هم مثل ِ $\phi^{(r,s)}$ میسازم. نتیجه میشود

$$\phi'^{(r,s)}(T) = \Big[\phi'(x), \Big([(\mathbf{D}\,\phi')(x)] \otimes \cdots \otimes \{[(\mathbf{D}\,\phi')(x)]^*\}^{-1}\Big)(T)\Big]. \tag{369}$$

دیده میشود

$$[\mathbf{D}(\phi' \circ \phi^{-1})][\phi(x)] = [(\mathbf{D}\,\phi')(x)]\,[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]^{-1}. \tag{370}$$

به این ترتیب، با تعریفها یِ

$$\psi = \phi' \circ \phi^{-1}, \tag{371}$$

$$\psi^{(r,s)} = \phi'^{(r,s)} \circ [\phi^{(r,s)}]^{-1}, \tag{372}$$

از (368) و (369) نتیجه میشود

$$[\psi^{(r,s)}]\{[\phi(x)], S\} = \Big[\psi[\phi(x)], \Big([(\mathbf{D}\,\psi)(x)] \otimes \cdots \otimes \{[(\mathbf{D}\,\psi)(x)]^*\}^{-1}\Big)(S)\Big], \quad (373)$$

که S عضو ِ $(\mathbb{R}^m)^{\otimes r} \otimes [(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}$ است. از هموار-بودن ِ تابع ِ تغییر- ِ-مختصات ِ ψ نتیجه میشود $\{\phi'^{(r,s)} \circ [\phi^{(r,s)}]^{-1}\}$ هموار است.

به این ترتیب معلوم میشود اگر ϕ یک نقشه برا یِ $\mathbb{M}$ باشد، $\phi^{(r,s)}$ یک نقشه برا یِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ است؛ و اگر $\{\phi_a \mid a\}$ یک اتلس برا یِ $\mathbb{M}$ باشد، $\{(\phi_a)^{(r,s)} \mid a\}$ یک اتلس برا یِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ است. ضمنَن دیده میشود

$$\mathsf{dim}[\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}] = [\mathsf{dim}(\mathbb{M})] + [\mathsf{dim}(\mathbb{M})]^{r+s}. \quad (374)$$

هر عضو ِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ عضو ِ یک و تنها یک ی از $\mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}$ ها ست:

$$\{\forall\, T \in [\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}]\} \;:\; \{\exists!\, x \in \mathbb{M} \mid T \in [\mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}]\}. \quad (375)$$

متناظر با هر $T \in \mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$، به x ی که T در $T_x^{(r,s)}\mathbb{M}$ است مبنا یِ T میگویم. مبنا یِ T را با $\boldsymbol{\pi}(T)$ نشان میدهم:

$$\{\forall\, T \in [\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}]\} \;:\; \{T \in [\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(T)}^{(r,s)}\mathbb{M}]\}. \quad (376)$$

رُشن است که

$$\boldsymbol{\pi}[\mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}] = \{x\}, \quad (377)$$

و

$$\boldsymbol{\pi}[\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}] = \mathbb{M}. \quad (378)$$

با یک دسته مختصات ِ دِکَرتی بر خمینه یِ خطی یِ $\mathbb{M}$، یک دسته مختصات بر $\mathrm{T}\mathbb{M}$ القا میشود که شامل ِ مختصات ِ دِکَرتی یِ مبنا و مئلفِها یِ بردار در فضا یِ مماس در مبنا در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر است. به این مختصات ِ $\mathrm{T}\mathbb{M}$ (که شامل ِ دُ دسته متغیر است)، مختصات ِ دِکَرتی یِ وابسته میگویم. مشابه ِ این برا یِ فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) هم هست: اگر ϕ یک نقشه یِ دِکَرتی برا یِ

خمینه یِ خطی یِ $\mathbb{M}$ باشد، به $\phi^{(r,s)}$ نقشه یِ دِکَرتی یِ وابسته میگویم. این نقشه شامل ِ مختصات ِ دِکَرتی یِ مبنا، و مئلفِها یِ تانسر در فضا یِ مماس در مبنا در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر است.

فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) یک کلاف است. برا یِ دیدن ِ این، از نقشه یِ ϕ بدیهیگر ِ $U^{(r,s)}$ را میسازم:

$$U^{(r,s)}(x,y) = [\phi^{(r,s)}]^{-1}[\phi(x),y], \tag{379}$$

که $\phi^{(r,s)}$ با (366) تعریف شده است. افکنش را هم هم ان $\boldsymbol{\pi}$ با (377) میگیرم. به سادِگی دیده میشود این افکنش و بدیهیگرها ویژِگیها یِ افکنش و بدیهیگرها یِ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $(\mathbb{R}^m)^{\otimes r}\otimes[(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}$ را دارند (m بُعد ِ خمینه است). در واقع به سادِگی دیده میشود این فضا یک کلاف ِ برداری یِ هموار است. به این ترتیب، مُضعَن میشود یک نقطه یِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ را با (x,T) نمایش داد، که x در خمینه و T در $(\mathbb{R}^m)^{\otimes r}\otimes[(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}$ است. همچنین به سادِگی دیده میشود کلاف ِ $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ دُگان ِ کلاف ِ $\mathrm{T}\mathbb{M}$ است، و کلاف ِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ $(r+s)$ کلاف است:

$$\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M} = (\mathrm{T}\mathbb{M})^{\otimes r}\otimes(\mathrm{T}^*\mathbb{M})^{\otimes s}, \tag{380}$$

که

$$\mathrm{T}\mathbb{M} = \mathrm{T}^{(1,0)}\mathbb{M},$$
$$\mathrm{T}^*\mathbb{M} = T^{(0,1)}\mathbb{M}. \tag{381}$$

به $\mathrm{T}\mathbb{M}$ و $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ به ترتیب فضا یِ (کلاف ِ) مماس و فضا یِ (کلاف ِ) هممماس هم میگویند.

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است، اما لزومَن یک کلاف ِ بدیهی نیست. کلاف بدیهی ست، اگر $\mathbb{M}$ یک نقشه داشته باشد که دامنه اَش کل ِ $\mathbb{M}$ باشد. به این ترتیب رُشن است که $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ بدیهی ست، اگر $\mathrm{T}\mathbb{M}$ بدیهی باشد. در این حالت $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ با $\mathbb{M}\times\{(\mathbb{R}^m)^{\otimes r}\otimes[(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}\}$ همانریخت است، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است.

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و مشتقپذیر است. تابع- ِ-مشتق ِ f را با $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\,f)$ نشان میدهم، که $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\,f)$ در $\mathsf{F}(\mathrm{T}\mathbb{M}';\mathrm{T}\mathbb{M})$ است و

$$(\boldsymbol{\mathcal{D}}\,f)(u) = \{(\mathbf{D}\,f)[\boldsymbol{\pi}(u)]\}u. \tag{382}$$

$(\boldsymbol{\mathcal{D}} f)$ خطی نیست، اصولُن دامنه اَش هم یک فضا یِ خطی نیست، بر خلاف ِ مشتق ِ f در یک نقطه، که خطی ست. دیده میشود

$$(\mathbf{D}\, f)(x) = \mathsf{res}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f; \mathrm{T}_x\mathbb{M}), \tag{383}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}'\to\mathbb{M}'} \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f) = f \circ \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}\to\mathbb{M}}. \tag{384}$$

دیده میشود اگر بُعد ِ $\mathbb{M}$ برابر ِ m باشد، $[(\mathbf{D}\, f)(x)]$ یک تابع ِ m متغیره است، اما $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)$ یک تابع ِ $(2\,m)$ متغیره است. در واقع،

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,i}\, \boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)(u) = \{(\mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_j\, f)[\boldsymbol{\pi}(u)]\}u^j, \tag{385}$$

$$(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,i}\, \boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)(u) = (\mathbf{D}_i\, f)[\boldsymbol{\pi}(u)], \tag{386}$$

که دسته-بندی یِ متغیرها یِ u چنین است که دسته یِ صفرم مختصات ِ $\boldsymbol{\pi}(u)$ و دسته یِ اول مئلفِها یِ u در فضا یِ $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(u)}\mathbb{M}$ در پایه یِ مختصاتی یَند.

$(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)$ خطی نیست، اما تحدید َش به فضا یِ مماس در یک نقطه خطی ست. از اینجا $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^*$ را تابع ی در $\mathsf{F}(\mathrm{T}^*\mathbb{M}; \mathrm{T}^*\mathbb{M}')$ تعریف میکنم که

$$\mathsf{res}[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^*; \mathrm{T}^*_x\mathbb{M}'] = [(\mathbf{D}\, f)(x)]^*, \tag{387}$$

یا

$$\mathsf{res}[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^*; \mathrm{T}^*_x\mathbb{M}'] = [\mathsf{res}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f; \mathrm{T}_x\mathbb{M})]^*. \tag{388}$$

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$ و g در $\mathsf{F}(\mathbb{M}''; \mathbb{M}')$ است، و f و g مشتقپذیر َند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\mathcal{D}}(g \circ f)](u) &= \{[\mathbf{D}(g \circ f)][\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}\to\mathbb{M}}(u)]\}u, \\
&= \{(\mathbf{D}\, g)[f \circ \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}\to\mathbb{M}}(u)]\}\{(\mathbf{D}\, f)[\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}\to\mathbb{M}}(u)]\}u, \\
&= \Big((\mathbf{D}\, g)\{[\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{M}'\to\mathbb{M}'} \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)](u)\}\Big)[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)(u)], \\
&= (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, g)[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)(u)],
\end{aligned} \tag{389}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(g \circ f) = (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, g) \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f). \tag{390}$$

از جمله اگر f مشتقپذیر باشد و خُد َش و مشتق َش وارونپذیر باشند،

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}(f^{-1}) = (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^{-1}. \tag{391}$$

همچنین،

$$[\boldsymbol{\mathcal{D}}(g \circ f)]^* = (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^* \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, g)^*, \tag{392}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{D}}(f^{-1})]^* = [(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, f)^*]^{-1}. \tag{393}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}}$، و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ است. نشان میدهم $\mathrm{T}\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathrm{T}\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathrm{T}\mathbb{Y}$ است. برا یِ این کار، متناظر با بدیهیگر ِ U_a برا یِ $\mathbb{E}$، بدیهیگر ِ $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_a)$ را برا یِ $\mathrm{T}\mathbb{E}$ میگیرم. افکنش برا یِ $\mathrm{T}\mathbb{E}$ را هم $[\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}})]$ میگیرم. نشان میدهم اینها ویژگیها یِ لازم را دارند. (u, q) را در $(\mathrm{T}_x\mathbb{M} \times \mathrm{T}_y\mathbb{Y})$ میگیرم. دیده میشود

$$(\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}} \circ U_a)(x, y) = x, \tag{394}$$

که نتیجه میدهد

$$\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}} \circ U_a)](x, y)\}(u, q) = u, \tag{395}$$

یا

$$[\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}} \circ U_a)](u, q) = u. \tag{396}$$

به این ترتیب،

$$[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, \boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}}) \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_a)](u, q) = u. \tag{397}$$

همچنین، اگر U_b یک بدیهیگر ِ دیگر برا یِ $\mathbb{E}$ باشد،

$$(U_a^{-1} \circ U_b)(x, y) = [x, U_{a\,b}(x, y)]. \tag{398}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\mathcal{D}}(U_a^{-1} \circ U_b)](u, q) &= \{[\mathbf{D}(U_a^{-1} \circ U_b)](x, y)\}(u, q),\\ &= \{u, [(\mathbf{D}\, U_{a\,b})(x, y)](u, q)\},\\ &= [u, (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_{a\,b})(u, q)],\end{aligned} \tag{399}$$

یا

$$[(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_a)^{-1} \circ (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_b)](u, q) = [u, (\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_{a\,b})(u, q)]. \tag{400}$$

از جمله دیده میشود تابع- ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_a)$ و $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_b)$ تابع ِ $(\boldsymbol{\mathcal{D}}\, U_{a\,b})$ است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}_{\mathbb{E}\to\mathbb{M}}$، و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ است. تعریف میکنم

$$\text{Ŧ}\mathbb{E} = \bigcup_{x\in\mathbb{M}} (\mathrm{T}\mathbb{E}_x). \tag{401}$$

نشان میدهم $\text{Ŧ}\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathrm{T}\mathbb{Y}$ است. برا یِ این کار، متناظر با بدیهیگر ِ U_a برا یِ $\mathbb{E}$، بدیهیگر ِ Ʊ_a را برا یِ $\text{Ŧ}\mathbb{E}$ میگیرم، که چنین تعریف میشود که اگر (x, q) در $(\mathbb{M} \times \mathrm{T}_y\mathbb{Y})$ باشد،

$$\text{Ʊ}_a(x, q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a](x, y)\}q. \tag{402}$$

در واقع دیده میشود

$$\text{Ʊ}_a = \overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\, U_a. \tag{403}$$

افکنش برا یِ $\text{Ŧ}\mathbb{E}$ را هم $\boldsymbol{\pi}$ میگیرم، که با ƶ در $\mathrm{T}\mathbb{E}_x$،

$$\boldsymbol{\pi}(\text{ƶ}) = x, \tag{404}$$

یعنی

$$\boldsymbol{\pi}(\mathrm{T}\mathbb{E}_x) = \{x\}. \tag{405}$$

نشان میدهم اینها ویژگیها یِ لازم را دارند. (x,q) را در $(\mathbb{M}\times\mathrm{T}_y\mathbb{Y})$ میگیرم. دیده میشود

$$[\mathcal{U}_a(x,q)] \in \mathrm{T}\mathbb{E}_x, \tag{406}$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\pi}\circ\mathcal{U}_a)(x,q) = x. \tag{407}$$

همچنین، اگر U_b یک بدیهیگر ِ دیگر برا یِ $\mathbb{E}$ باشد،

$$\begin{aligned}
&\{[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]^{-1}\circ[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_b]\}(x,q),\\
&=[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]^{-1}\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_b](x,y)]\}q\Big),\\
&=[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]^{-1}\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][(U_a^{-1}\circ U_b)(x,y)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_a^{-1}\circ U_b)](x,y)\}\,q\Big),\\
&=[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]^{-1}\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][x,U_{a\,b}(x,y)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}q\Big),\\
&=[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]^{-1}\Big[[\overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_a]\Big(x,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}q\Big)\Big],\\
&=\Big(x,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}q\Big).
\end{aligned} \tag{408}$$

به این ترتیب، تابع- ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ $\mathcal{U}_a$ و $\mathcal{U}_b$ برابر با $\mathcal{U}_{a\,b}$ است، که

$$\mathcal{U}_{a\,b}(x,q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y)\}q, \tag{409}$$

یا

$$\mathcal{U}_{a\,b} = \overset{0}{\boldsymbol{\mathcal{D}}}_{(1)}\,U_{a\,b}. \tag{410}$$

اینجا هم معلوم است که اگر بُعدها یِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{Y}$ به ترتیب m و n باشد، $\mathcal{U}$ (که U یک بدیهیگر است) یک تابع ِ $(m+2\,n)$ متغیره است. متغیرها یِ متناظر با (x,q) را سه دسته میکنم: دسته یِ صفر متناظر

با x، و دستِها یِ یک و دُ متناظر با q. دیده میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\mho](x,q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U](x,y)\}q^{\beta}, \tag{411}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\mho](x,q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U](x,y)\}q^{\beta}, \tag{412}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\alpha}\,\mho](x,q) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U](x,y). \tag{413}$$

اینجا هم مختصات ِ q را مختصات ِ y (دسته یِ اول) و مئلفِها یِ q در $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ در پایه یِ مختصاتی (دسته یِ دوم) گرفته ام. رُشن است که اگر $U_{a\,b}$ یک تابع- ِ-گذار باشد هم رابطِها یِ مشابه ی برقرار َند:

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\mho_{a\,b}](x,q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U_{a\,b}](x,y)\}q^{\beta}, \tag{414}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\mho_{a\,b}](x,q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U_{a\,b}](x,y)\}q^{\beta}, \tag{415}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\alpha}\,\mho_{a\,b}](x,q) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U_{a\,b}](x,y). \tag{416}$$

اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری باشد (و در نتیجه بدیهیگرها خطی باشند)، $[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U](x,y)$ به y بستِگی ندارد. در این حالت،

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U](x,y)\}\,q &= [\check{U}(x)]q,\\ &= U(x,q).\end{aligned} \tag{417}$$

البته در این رابطه تناظر ِ $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ با $\mathbb{Y}$ به کار رفته. به شکل ِ صریحتر،

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U](x,y)\}q &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U](x,y)\}q^{\alpha},\\ &= [\check{U}_{\alpha}(x)]q^{\alpha}.\end{aligned} \tag{418}$$

از مقایسه یِ این با

$$\begin{aligned}U(x,y) &= [\check{U}(x)]y,\\ &= [\check{U}_{\alpha}(x)]y^{\alpha},\end{aligned} \tag{419}$$

(که در آن برا یِ $\mathbb{Y}$ مختصات ِ دِکَرتی به کار رفته) به نظر میرسد $\mho$ هم ان U است، چون

$$\mho(x,q) = [\check{U}_{\alpha}(x)]q^{\alpha}. \tag{420}$$

اما این یاداوری بد نیست که دامنه یِ $\mathcal{U}$ با دامنه یِ U فرق دارد، در واقع تعداد ِ متغیرها یِ $\mathcal{U}$ و U به ترتیب $(m+2\,n)$ و $(m+n)$ است. اگر مختصات ِ q را مختصات ِ دِکَرتی یِ وابسته بگیرم (دسته یِ اول و دوم ِ مختصات ِ q را به ترتیب مختصات ِ دِکَرتی یِ y و مئلفِها یِ q در $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر بگیرم)،

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\mathcal{U}](x,q) = [(\mathbf{D}_i\,\check{U}_\beta)(x)]q^\beta, \tag{421}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{U}](x,q) = 0, \tag{422}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\alpha}\,\mathcal{U}](x,q) = \check{U}_\alpha(x). \tag{423}$$

این یعنی $\mathcal{U}$ به دسته یِ دوم ِ متغیرها یَش بستِگی ندارد، و بستِگی یَش به دسته یِ اول و سوم ِ متغیرها یَش مثل ِ بستِگی یِ U به دسته یِ اول و دوم ِ متغیرها یَش است. عبارت ِ

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(x,q) &= U(x,q),\\ &= [\check{U}(x)]\,q\end{aligned} \tag{424}$$

نمایش ی کوتاه (اما نَ چندان دقیق) از بحثها یِ بالا ست. به هم ین بیان ِ نَ-چندان-دقیق، وقت ی کلاف برداری ست $\mathcal{U}$ هم ان U است.

رُشن است که متناظر با تابع- ِ-گذار ِ $U_{a\,b}$ هم

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\mathcal{U}_{a\,b}](x,q) = [(\mathbf{D}_i\,\check{U}_{a\,b\,\beta})(x)]q^\beta, \tag{425}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,\mathcal{U}_{a\,b}](x,q) = 0, \tag{426}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\alpha}\,\mathcal{U}_{a\,b}](x,q) = \check{U}_{a\,b\,\alpha}(x), \tag{427}$$

و باز به نظر میرسد $\mathcal{U}_{a\,b}$ هم ان $U_{a\,b}$ است، چون

$$\mathcal{U}_{a\,b}(x,q) = [\check{U}_{a\,b\,\alpha}(x)]q^\alpha. \tag{428}$$

اما اینجا هم $\mathcal{U}_{a\,b}$ سه دسته متغیر دارد، در حال ی که $U_{a\,b}$ دُ دسته متغیر دارد، هر چند اگر برا یِ q مختصات ِ دِکَرتی یِ وابسته به کار رود، $\mathcal{U}_{a\,b}$ به دسته یِ دوم ِ مختصات َش بستِگی ندارد. به این

ترتیب به هم ان بیان ِ نادقیق ِ بالا میشود نوشت

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{a\,b}(x,q) &= U_{a\,b}(x,q), \\ &= [\check{U}_{a\,b}(x)]q \end{aligned} \tag{429}$$

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ اند. w در $\mathrm{T}_{z_1\oplus z_2}(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)$ متناظر با خمها یِ γ_1 و γ_2 است که $(\gamma_1\oplus\gamma_2)$ از $(z_1\oplus z_2)$ میگذرد، و مشتق َش در آن نقطه w است. به سادِگی دیده میشود خمها یِ $\tilde{\gamma}_1$ و $\tilde{\gamma}_2$ هم هم ان ویژِگی یِ خمها یِ γ_1 و γ_2 را دارند، اگر و تنها اگر مماس بر $\tilde{\gamma}_i$ در z_i با مماس بر γ_i در z_i یکسان باشد. از اینجا تابع ِ $\mathfrak{T}$ در $\mathsf{F}[(\mathrm{T}\mathbb{E}_1)\oplus(\mathrm{T}\mathbb{E}_2);\mathrm{T}(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)]$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{T}(w) = \{(\mathbf{D}\,\gamma_1)[\gamma_1^{-1}(z_1)]\}\oplus\{(\mathbf{D}\,\gamma_2)[\gamma_2^{-1}(z_2)]\}. \tag{430}$$

به سادِگی دیده میشود $\mathfrak{T}$ یک تناظر ِ یک-به-یک بین ِ $\mathrm{T}(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)$ و $(\mathrm{T}\mathbb{E}_1)\oplus(\mathrm{T}\mathbb{E}_2)$ است. در واقع این تناظر خطی ست. از این پس این تناظر را همانی میگیرم. به این ترتیب،

$$\mathbf{D}(\gamma_1\oplus\gamma_2) = (\mathbf{D}\,\gamma_1)\oplus(\mathbf{D}\,\gamma_2). \tag{431}$$

15 میدان ِ تانسری

$\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. به E که در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{M})$ است یک برش ِ $\mathbb{E}$ میگویم، اگر

$$\boldsymbol{\pi}\circ E = \mathbf{1}_{\mathbb{M}}. \tag{432}$$

این یعنی

$$E(x)\in\mathbb{E}_x. \tag{433}$$

به این ترتیب یک برش ِ $\mathbb{E}$ با این مشخص میشود که به هر نقطه یِ x از خمینه-یِ-پایه یِ آن یک عضو ِ تار ِ $\mathbb{E}_x$ نسبت داده شود. از جمله هر برش ِ یک کلاف ِ $\mathbb{E}$ که تار- ِ-نُعی یَش یک خمینه یِ

p بُعدی ست، در دامنه یِ هر نقشه یِ خمینه-یِ-پایه اَش با p میدان ِ اسکالر مشخص میشود. هر برش ِ یک کلاف ِ برداری یِ $\mathbb{E}$ هم که بُعد ِ تار- ِ-نُعی یَش p است، در دامنه یِ هر نقشه یِ خمینه-یِ-پایه اَش با p میدان ِ اسکالر مشخص میشود. به هر برش ِ یک کلاف ِ برداری یک برش ِ خطی میگویم. مجموعه یِ برشها یِ کلاف ِ $\mathbb{E}$ را با $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ نشان میدهم.

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. در این صورت $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ یک کلاف ِ برداری ست. متناظر با میدان ِ اسکالر ِ Σ بر $\mathbb{M}$، برش ِ $\Sigma^{\mathfrak{s}}$ بر $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ را چنین تعریف میکنم.

$$\Sigma^{\mathfrak{s}}(x) = [x, \Sigma(x)]. \tag{434}$$

دیده میشود

$$\Sigma = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \Sigma^{\mathfrak{s}}. \tag{435}$$

به این ترتیب، بین ِ مجموعه یِ میدانها یِ اسکالر بر $\mathbb{M}$ و برشها یِ $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ یک تناظر- ِ-یک-به-یک ِ مستقل-از-بدیهیگر هست. از این پس این تناظر را همانی میگیرم.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ اند، و E_i در $\mathsf{S}(\mathbb{E}_i)$ است. به سادِگی دیده میشود

$$\mathbf{D}(E_1 \oplus E_2) = (\mathbf{D}\, E_1) \oplus (\mathbf{D}\, E_2). \tag{436}$$

به هر برش ِ $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) میگویم. پس هر میدان ِ تانسری یک برش ِ خطی هم هست. در واقع مجموعه یِ میدانها یِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) بر خمینه یِ $\mathbb{M}$، هم ان $\mathsf{S}[\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}]$ است.

به این ترتیب یک میدان ِ تانسری، در دامنه یِ هر نقشه یِ خمینه با این مشخص میشود که به هر نقطه یِ از یک خمینه یک تانسر در فضا یِ تانسرها یِ آن نقطه نسبت داده شود. چنین-تانسر ی را میشود بر حسب ِ یک پایه بسط داد:

$$T(x) = [T^{i\cdots}{}_{\cdots j}(x)][e_i(x)] \otimes \cdots \otimes [e^j(x)], \tag{437}$$

که $T^{i\cdots}{}_{j\cdots}$ ها میدانها یی اسکالر اند. پس هر میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) با m^{r+s} میدان ِ اسکالر مشخص میشود، که m بُعد ِ خمینه است. بر عکس، با m^{r+s} میدان ِ اسکالر یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) مشخص میشود. البته رابطه یِ این میدان ِ تانسری با آن میدانها یِ اسکالر (مئلفِها یِ این میدان ِ تانسری) به پایه بستِگی دارد.

S و T برشها یی خطی از کلاف ِ برداری ی ِ $\mathbb{E}$ با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ اند. تابع ِ $(\alpha\, S + \beta\, T)$ با دامنه ی ِ $\mathbb{M}$ (که α و β اسکالر َند) را چنین تعریف میکنم.

$$(\alpha\, S + \beta\, T)(x) = \alpha\, S(x) + \beta\, T(x). \tag{438}$$

به سادِگی دیده میشود $(\alpha\, S+\beta\, T)$ یک برش ِ خطی از کلاف ِ $\mathbb{E}$ است. از جمله اگر S و T میدانها ی ِ تانسری ی ِ نُع ِ (r,s) باشند، $(\alpha\, S + \beta\, T)$ هم یک میدان ِ تانسری ی ِ نُع ِ (r,s) است. البته $\mathbb{E}$، یا فضا ی ِ تانسرها ی ِ نُع ِ (r,s)، خطی نیست، اما چون مقدار ِ میدانها ی ِ تانسری در نقطه ی ِ x در $\mathbb{E}_x$ است (که یک فضا ی ِ خطی ست) فضا ی ِ برشها ی ِ خطی (یا میدانها ی ِ تانسری ی ِ نُع ِ (r,s)) را میشود خطی کرد، که با تعریف ِ بالا برا ی ِ ترکیب ِ خطی چنین شده است.

T و T' برشها یی از به ترتیب کلافها ی ِ برداری ی ِ $\mathbb{E}$ و $\mathbb{E}'$ هردو با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ اند. $(T \otimes T')$ با دامنه ی ِ $\mathbb{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$(T \otimes T')(x) = [T(x)] \otimes [T'(x)]. \tag{439}$$

به سادِگی دیده میشود $(S \otimes T)$ یک برش ِ خطی از $\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'$ است. (437) تا (439) نشان میدهند هر میدان ِ تانسری یی را میشود از میدانها ی ِ تانسری ی ِ نُع ِ $(1,0)$، میدانها ی ِ تانسری ی ِ نُع ِ $(0,1)$، و میدانها ی ِ اسکالر ساخت.

عمل ِ ادغام برا ی ِ یک میدان ِ تانسری را هم از رو ی ِ عمل ِ ادغام برا ی ِ یک تانسر تعریف میکنم:

$$[\mathfrak{C}^{(a)}{}_{(b)} T](x) = \mathfrak{C}^{(a)}{}_{(b)} [T(x)]. \tag{440}$$

نتیجه ی ِ اثر ِ $\mathfrak{C}^{(a)}{}_{(b)}$ بر تانسر ِ T چنین به دست میئاید. در هر مئلفه ی ِ T، شاخص ِ a و شاخص ِ b ی ِ این مئلفه را یکسان میکنم و رو ی ِ آن جمع میزنم. نتیجه مئلفه ی ِ متناظر برا ی ِ $[\mathfrak{C}^{(a)}{}_{(b)} T]$ است:

$$[\mathfrak{C}^{(a)}{}_{(b)} T]^{\mathrm{i}_1\, \mathrm{i}_2\, \mathrm{i}_3} = T^{\mathrm{i}_1\, j\, \mathrm{i}_2}{}_{j}{}^{\mathrm{i}_3}. \tag{441}$$

i_1 و i_2 و i_3 هر کدام یک دست شاخص َند، که در هر دسته ممکن است بعض ی شاخصها بالا و بعض ی پایین باشند. شاخص ِ بالا ی ِ j شاخص ِ شماره ی ِ a و شاخص ِ پایین ِ j شاخص ِ شماره ی ِ b است. البته ممکن است a از b بزرگتر باشد. رُشن است که ادغام-شده ی ِ یک میدان ِ تانسری هم یک میدان ِ تانسری ست.

به یک میدان ِ تانسری ی ِ نُع ِ $(1,0)$ میدان ِ برداری، و به یک میدان ِ تانسری ی ِ نُع ِ $(0,1)$ میدان ِ همبرداری میگویم. یک میدان ِ تانسری ی ِ نُع ِ $(0,0)$ هم که یک میدان ِ اسکالر است. به

یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ $(r,0)$ یک میدان ِ تانسری یِ پادوردا، و به یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ $(0,s)$ یک میدان ِ تانسری یِ هموردا میگویم. تعمیم ِ تعریف ِ تقارن و پادتقارن ِ تانسرها به میدانها یِ تانسری هم کاملَن سرراست است. به یک میدان ِ تانسری یِ کاملَن پادمتقارن ِ از نُع ِ $(0,s)$ یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل (یا سادِتر یک s فرم ِ دیفرانسیل) میگویم. اگر σ یک میدان ِ s فرم ِ دیفرانسیل باشد، گونه یِ σ را s تعریف میکنم و آن را با $\mathsf{ty}(\sigma)$ نشان میدهم.

سرانجام، با ترکیب ِ ادغام و حاصلِضرب ِ تانسری یِ یک میدان ِ همبرداری و یک میدان ِ برداری اثر ِ یک میدان ِ همبرداری بر یک میدان ِ برداری تعریف میشود. اگر σ یک میدان ِ همبرداری و v یک میدان ِ برداری باشد،

$$\begin{aligned}[\sigma(v)](x) &= \{\mathfrak{C}[\sigma\otimes v]\}(x),\\ &= [\sigma(x)][v(x)].\end{aligned} \tag{442}$$

مجموعه یِ میدانها یِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) با دامنه یِ $\mathbb{M}$ را با $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$، و مجموعه یِ میدانها یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل با دامنه یِ $\mathbb{M}$ را با $\mathcal{A}^s(\mathbb{M})$ نشان میدهم.

$\mathfrak{O}$ یک تابع ِ خطی با دامنه یِ $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ است. میگویم $\mathfrak{O}$ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n است، اگر به ازا یِ هر دُ-میدان ِ تانسری یِ S و T در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ و هر x در $\mathbb{M}$،

$$[(T-S)(y)=o(|y-x|^n)]\Rightarrow\{[\mathfrak{O}(T)](x)=[\mathfrak{O}(S)](x)\}. \tag{443}$$

$o(|y-x|^n)$ یعنی کمیت ی که سریعتر از $|\phi(y)-\phi(x)|^n$ به صفر میگراید، که ϕ یک نقشه است. از هموار-بودن ِ تابعها یِ تغییر- ِ-مختصات معلوم میشود تعریف ِ $o(|y-x|^n)$ مستقل از نقشه است.

میگویم $\mathfrak{O}$ مُضعی ست، اگر n ی باشد که $\mathfrak{O}$ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n باشد. سرانجام، میگویم $\mathfrak{O}$ نقطِئی است، اگر $\mathfrak{O}$ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا صفر باشد. این یعنی $\mathfrak{O}$ نقطِئی ست اگر به ازا یِ هر دُ-میدان ِ تانسری یِ S و T در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ و هر x در $\mathbb{M}$،

$$[T(x)=S(x)]\Rightarrow\{[\mathfrak{O}(T)](x)=[\mathfrak{O}(S)](x)\}. \tag{444}$$

$\mathfrak{O}$ یک تابع ِ خطی با دامنه یِ $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ است. میگویم $\mathfrak{O}$ با میدانها یِ اسکالر خطی ست، اگر به ازا یِ هر f در $\mathsf{F}^{(0,0)}(\mathbb{M})$ و هر T در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$،

$$\mathfrak{O}(f\,T)=f\,\mathfrak{O}(T). \tag{445}$$

به سادِگی دیده میشود تابع ِ خطی یِ $\mathfrak{O}$ با دامنه یِ $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$، اگر با میدانها یِ اسکالر خطی باشد نقطِئی ست. برا یِ اثبات میدانها یِ تانسری یِ e_A در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ را چنان میگیرم که در هر y در یک همسایِگی یِ x مجموعه یِ $\{[A, e_A(y)] \mid A\}$ یک پایه برا یِ $\mathbb{T}^{(r,s)}_y\mathbb{M}$ باشد. میدان ِ تانسری یِ $T \in \mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ را میشود بر حسب ِ این پایه بسط داد:

$$T(y) = [T^A(y)][e_A(y)], \tag{446}$$

که T^A ها میدانها یی اسکالر َند. پس اگر $\mathfrak{O}$ با میدانها یِ اسکالر خطی باشد،

$$(\mathfrak{O}\, T)(x) = [T^A(x)][(\mathfrak{O}\, e_A)(x)], \tag{447}$$

که (444) را نتیجه میدهد.

عکس ِ این حکم هم درست است. یعنی تابع ِ خطی یِ $\mathfrak{O}$ با دامنه یِ $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$، اگر نقطِئی باشد با میدانها یِ اسکالر خطی ست. برا یِ اثبات، متناظر با میدان ِ T در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ میدان ِ S در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ را تعریف میکنم که برا یِ y ها یِ در یک همسایِگی یِ x،

$$S(y) = [T^A(x)][e_A(y)]. \tag{448}$$

رُشن است که

$$(\mathfrak{O}\, S)(y) = [T^A(x)][(\mathfrak{O}\, e_A)(y)], \tag{449}$$

و در نتیجه

$$(\mathfrak{O}\, S)(x) = [T^A(x)][(\mathfrak{O}\, e_A)(x)]. \tag{450}$$

از (448) نتیجه میشود $T(x)$ و $S(x)$ برابر َند. از این، همراه با 444 و 450 نتیجه میشود

$$(\mathfrak{O}\, T)(x) = [T^A(x)][(\mathfrak{O}\, e_A)(x)], \tag{451}$$

که یعنی $\mathfrak{O}$ با میدانها یِ اسکالر خطی ست.

16 پیشران، پَسار

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و مشتقپذیر است. $(\mathbf{D}\,f)(x)$ فضا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ را به فضا یِ $\mathrm{T}_{f(x)}\mathbb{M}'$ مینگارد. $[(\mathbf{D}\,f)(x)]^*$ هم $\mathrm{T}^*_{f(x)}\mathbb{M}'$ را به $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ مینگارد. با فرض ِ این که f وارونپذیر است، f_* را تابع ی تعریف میکنم که بر میدانها یِ تانسری یِ با دامنه یِ $\mathbb{M}$ (خمینه یِ مبدئ) اثر میکند و میدانها یِ تانسری یِ با دامنه یِ $\mathbb{M}'$ (خمینه یِ مقصد) میدهد، چنان که اگر T در $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ باشد، $(f_*\,T)$ در $\mathsf{F}^{(r,s)}[f(\mathbb{M})]$است و

$$(f_*\,T)(y) = \Big[[(\mathbf{D}\,f)(x)]^{\otimes r} \otimes \Big(\{[(\mathbf{D}\,f)(x)]^*\}^{-1}\Big)^{\otimes s}\Big]\,[T(x)], \tag{452}$$

که y برابر با $f(x)$ تعریف شده. در واقع،

$$(f_*\,T)[f(x)] = \Big[[(\mathbf{D}\,f)(x)]^{\otimes r} \otimes \Big(\{[(\mathbf{D}\,f)(x)]^*\}^{-1}\Big)^{\otimes s}\Big]\,[T(x)]. \tag{453}$$

به زبان ِ تابع- ِ-مشتق،

$$f_*\,T = \Big((\boldsymbol{\mathcal{D}}\,f)^{\otimes r} \otimes \{[\boldsymbol{\mathcal{D}}(f^{-1})]^*\}^{\otimes s}\Big) \circ T \circ f^{-1}. \tag{454}$$

به f_* پیشران ِ f میگویم. دیده میشود اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$f_*\,\Sigma = \Sigma \circ f^{-1}. \tag{455}$$

از این رابطه دیده میشود f با g برابر است، اگر و تنها اگر اثر ِ f_* بر هر میدان ِ اسکالر ی با اثر ِ g_* بر آن میدان برابر باشد. از جمله میشود گفت f با g برابر است، اگر و تنها اگر f_* با g_* برابر باشد.

به سادگی دیده میشود اثر ِ f_* بر $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ خطی ست،

$$f_*(S \otimes T) = (f_*\,S) \otimes (f_*\,T), \tag{456}$$

و

$$f_*\,\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\,f_*. \tag{457}$$

از جمله نتیجه میشود اگر σ یک میدان ِ همبرداری و v یک میدان ِ برداری باشد،

$$f_*[\sigma(v)] = (f_*\,\sigma)(f_*\,v). \tag{458}$$

همچنین، به سادِگی دیده میشود اگر f و g دُ تابع باشند که پیشران ِشان تعریف شده باشد و ترکیب ِ $(g \circ f)$ هم تعریف شده باشد،

$$(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*). \tag{459}$$

سرانجام،

$$\mathbf{1}_* = \mathbf{1}. \tag{460}$$

البته رُشن است که همانی یِ طرف ِ چپ همانی یِ $\mathbb{M}$ است، و همانی یِ طرف ِ راست همانی یِ $\mathsf{F}^{(r,s)}(\mathbb{M})$ ها ست.

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و مشتقپذیر است، و T در $\mathsf{F}^{(0,s)}[f(\mathbb{M})]$ است. اثر ِ f^* بر T را یک عضو ِ $\mathsf{F}^{(0,s)}(\mathbb{M})$ تعریف میکنم که

$$(f^*\,T)(x) = \{[(\mathbf{D}\,f)(x)]^*\}^{\otimes s}\{T[f(x)]\}, \tag{461}$$

یا

$$f^*\,T = [(\boldsymbol{\mathcal{D}}\,f)^*]^{\otimes s} \circ T \circ f. \tag{462}$$

به f^* پَسار ِ f میگویم. برا یِ تعریف ِ پَسار لازم نیست f وارونپذیر باشد. دیده میشود اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$f^*\,\Sigma = \Sigma \circ f. \tag{463}$$

از تعریف ِ پَسار به سادِگی دیده میشود اثر ِ f^* بر $\mathsf{F}^{(0,s)}[f(\mathbb{M})]$ خطی ست، و اگر T و S میدانها یِ تانسُری یِ هموردا باشند،

$$f^*(S \otimes T) = (f^*\,S) \otimes (f^*\,T). \tag{464}$$

همچنین، اگر f و g دُ تابع باشند که پَسار ِشان تعریف شده باشد و ترکیب ِ $(g \circ f)$ هم تعریف شده باشد،

$$(g \circ f)^* = (f^*) \circ (g^*). \tag{465}$$

سرانجام،

$$\mathbf{1}^* = \mathbf{1}. \tag{466}$$

همچنین دیده میشود اگر f بر $\mathbb{M}$ تعریف شده و وارونپذیر باشد و وارون ِ f هم مشتقپذیر باشد،

$$f^* = (f^{-1})_*. \tag{467}$$

با پایِها یِ مختصاتی، و با $y = f(x)$، دیده میشود

$$(f_* T)^{i \cdots}{}_{\cdots j}(y) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} T^{\alpha \cdots}{}_{\cdots \beta}(x). \tag{468}$$

همچنین اگر S یک میدان ِ تانسری یِ هموردا باشد،

$$(f^* S)_{\alpha \cdots \beta}(x) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} S_{i \cdots j}(y). \tag{469}$$

پیشران ِ یک تابع، از میدانها یِ تانسری یِ فضا یِ مبدئ میدانها یِ تانسری در فضا یِ مقصد میسازد، در حال ی که پسار ِ یک تابع از میدانها یِ تانسری یِ فضا یِ مقصد میدانها یِ تانسری در فضا یِ مبدئ میسازد.

از اثر ِ پیشران و پسار بر میدانها یِ اسکالر، دیده میشود تعریف ِ این اثر به دامنه یِ میدان ِ اسکالر بستِگی دارد، اما به این که میدان ِ اسکالر در $\mathbb{R}$ مقدار میگیرد بستِگی ندارد. یعنی اگر میدان ِ اسکالر با یک تابع از خمینه به هر مجموعه ای (نَ لزومَن $\mathbb{R}$) جایگزین شود هم، اثر ِ پیشران و پسار را میشود مشابه با اثر ِ پیشران و پسار بر میدانها یِ اسکالر تعریف کرد: f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}'; \mathbb{M})$ است و $\mathfrak{R}$ یک تابع با دامنه یِ $f(\mathbb{M})$ است. تعریف میکنم

$$f^* \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \circ f. \tag{470}$$

رُشن است که $(f^*\,\mathfrak{R})$ یک تابع با دامنه یِ $\mathbb{M}$ است. همچنین، اگر f وارونپذیر و $\mathfrak{Q}$ یک تابع با دامنه یِ $\mathbb{M}$ باشد، تعریف میکنم

$$f_*\,\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q} \circ f^{-1}. \tag{471}$$

رُشن است که $(f_*\,\mathfrak{Q})$ یک تابع با دامنه یِ $f(\mathbb{M})$ است. و رُشن است که

$$f_* = (f^{-1})^*. \tag{472}$$

17 شارش ِ یک میدان ِ برداری

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست، v در $\mathsf{F}^{(1,0)}(\mathbb{M})$ است و I یک مجموعه یِ باز در $\mathbb{R}$ است که شامل ِ صفر است. g_v را عضو ی از $\mathsf{F}[\mathbb{M}; (I \times \mathbb{M})]$ میگیرم که

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, g_v = v \circ g_v, \tag{473}$$

$$g_v(0, x) = x. \tag{474}$$

این رابطِها یک دستگاه ِ m معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ یک با شرط ِ اولیه اند. برا یِ دیدن ِ این، کافی ست یک نقشه یِ ϕ به کار رود و معادلات ِ بالا بر حسب ِ مختصات و مئلفِها نوشته شوند:

$$\dot{x}^i(t) = v^i[x(t)], \tag{475}$$

$$x^i(0) = x^i, \tag{476}$$

که $g_v(t, x)$ با $x(t)$ و $\phi^i(x)$ با x^i نشان داده شده، و ϕ یک نقشه است. $\dot{x}^i$ هم مشتق ِ x^i است.

$g_v(t, x)$ با v و x ِ ثابت مقدار ِ یک خم است که در $t = 0$ از x میگذرد و مماس بر آن در هر نقطه اَش برابر است با مقدار ِ میدان ِ برداری یِ v در آن نقطه. از قضیه یِ وجود و یکتایی یِ جواب ِ معادلات ِ دیفرانسیل معلوم میشود g_v با رابطِها یِ (473) و (474) خُش-تعریف است. با استفاده از هم ین قضیه نشان میدهم

$$g_{s\,v}(t, x) = g_v(s\,t, x). \tag{477}$$

دیده میشود

$$\mathbf{D}[g_{s\,v}(\centerdot, x)] = s\,v[g_{s\,v}(\centerdot, x)],$$
$$\mathbf{D}[g_v(s\,\centerdot, x)] = s\,v[g_v(s\,\centerdot, x)], \tag{478}$$

که یعنی دُ-طرفِ (477) معادله-ی-دیفرانسیلِ یکسان ی (نسبت به t) را بر میئاورند. مقدارِ دُ-طرفِ (477) در $t = 0$ هم یکسان است. پس دُ-طرفِ (477) برابر َند.

از (477) معلوم میشود $g_v(t, \centerdot)$ تابعِ فقط حاصل-ِ-ضربِ t و v است. $\mathsf{fl}(v)$ را عضو ی از $\mathsf{F}(\mathbb{M}; \mathbb{M})$ تعریف میکنم که

$$\mathsf{fl}(v) = g_v(1, \centerdot). \tag{479}$$

به خانواده یِ تابعها یِ $\mathsf{fl}(t\,v)$ شارشِ میدانِ برداری یِ v میگویم. به $\mathsf{fl}(t\,v)$ شارشِ میدانِ برداری یِ v به اندازه یِ t میگویم. از (477) دیده میشود

$$\mathsf{fl}(t\,v) = g_v(t, \centerdot), \tag{480}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,v)](x)\} = v\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,v)](x)\}. \tag{481}$$

همچنین، نشان میدهم

$$\{\mathsf{fl}[(t+s)\,v]\}(x) = \{[\mathsf{fl}(t\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,v)]\}(x). \tag{482}$$

برا یِ اثبات، توجه میکنم که

$$\mathbf{D}\Big(\{\mathsf{fl}[(\centerdot + s)\,v]\}(x)\Big) = v\Big(\{\mathsf{fl}[(\centerdot + s)\,v]\}(x)\Big),$$
$$\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,v)]\}(x)\Big) = v\Big(\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,v)]\}(x)\Big), \tag{483}$$

یعنی دُ-طرفِ (482) معادله-ی-دیفرانسیلِ یکسان ی (نسبت به t) را بر میئاورند. رُشن است که مقدارِ دُ-طرفِ (482) در $t = 0$ هم یکسان است. پس (482) درست است. این را چنین مینویسیم.

$$\mathsf{fl}[(t+s)\,v] = [\mathsf{fl}(t\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,v)]. \tag{484}$$

به سادِگی دیده میشود

$$\mathsf{fl}(0\,v) = \mathbf{1}, \tag{485}$$

$$\mathsf{fl}(-t\,v) = [\mathsf{fl}(t\,v)]^{-1}. \tag{486}$$

g در $\mathsf{F}[\mathbb{M};(I\times\mathbb{M})]$ است، که $\mathbb{M}$ خمینه است و I یک بازه یِ حقیقی ست. $g(t,\cdot)$ لزومَن شارش ِ یک میدان ِ برداری نیست، اما میشود از آن نسبت به t مشتق گرفت. با فرض ِ این که خانواده یِ $g(t,\cdot)$ وارونپذیر باشد، با مشتق ِ $g(t,\cdot)$ یک خانواده میدان ِ برداری تعریف میکنم:

$$v_g[t,g(t,x)] = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,g](t,x). \tag{487}$$

این رابطه را این طُر هم میشود نوشت.

$$v_g(t,y) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,g]\{t,[g(t,\cdot)]^{-1}(y)\}, \tag{488}$$

یا

$$v_g[t,g(t,x)] = \{\mathbf{D}[g(t+\cdot,x)]\}(0). \tag{489}$$

بر حسب ِ مختصات، (488) میشود

$$\begin{aligned} v_g^i(t,y) &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,g^i]\{t,[g(t,\cdot)]^{-1}(y)\}, \\ &= \lim_{s\to 0}\frac{g^i\{t+s,[g(t,\cdot)]^{-1}(y)\} - g^i\{t,[g(t,\cdot)]^{-1}(y)\}}{s}. \end{aligned} \tag{490}$$

اگر صفر در I باشد و،

$$g(t+s,\cdot) = [g(s,\cdot)]\circ[g(t,\cdot)], \tag{491}$$

آنگاه

$$g(t+\cdot,x) = g[\cdot,g(t,x)], \tag{492}$$

و

$$v_g[t, g(t,x)] = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, g][0, g(t,x)], \tag{493}$$

یا

$$v_g(t,y) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, g](0,y), \tag{494}$$

که نشان میدهد $v_g(t,y)$ به t بستِگی ندارد. در این حالت $\mathsf{fl}(t\, v_g)$ و $g(t,\boldsymbol{.})$ معادله-یِ-دیفرانسیلها یِ یکسان ی را بر میئاورند و چون شرط-ِ-اولیه یِشان هم یکسان است، با هم برابر َند.

رُشن است که اگر u و v دُ میدان ِ برداری یِ برابر باشند، $\mathsf{fl}(t\, u)$ و $\mathsf{fl}(t\, v)$ هم با هم برابر َند. بر عکس هم درست است، به این معنی که اگر I یک مجموعه یِ باز در $\mathbb{R}$ و شامل ِ صفر باشد،

$$[\forall\, t \in I \;:\; \mathsf{fl}(t\, u) = \mathsf{fl}(t\, v)] \Rightarrow (u = v). \tag{495}$$

برا یِ اثبات کافی ست مشتق ِ $[\mathsf{fl}(t\, u)](x)$ و $[\mathsf{fl}(t\, v)](x)$ نسبت به t در $t = 0$ حساب شود.

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$ خمینه اند، v در $\mathsf{F}^{(1,0)}(\mathbb{M})$ است، و f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است و در $\mathbb{M}'$ وارونپذیر است. نشان میدهم

$$f \circ [\mathsf{fl}(t\, v)] \circ f^{-1} = \mathsf{fl}[t\, (f_*\, v)]. \tag{496}$$

برا یِ اثبات نقطه یِ $y = f(x)$ را در $\mathbb{M}'$ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\Big[\mathbf{D}\Big(\{f \circ [\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)] \circ f^{-1}\}(y)\Big)\Big](t) &= \Big((\mathbf{D}\, f)\{[\mathsf{fl}(t\, v)](x)\}\Big) v\{[\mathsf{fl}(t\, v)](x)\}, \\ &= (f_*\, v)\Big(\{f \circ [\mathsf{fl}(t\, v)] \circ f^{-1}\}(y)\Big). \end{aligned} \tag{497}$$

پس دُ-طرف ِ (496) به ازا یِ y معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی (نسبت به t) را بر می‌آورند. دُ-طرف در $t = 0$ برابر َند (هر-دُ همانی یَند). از اینجا (496) نتیجه میشود.

اگر f لزومَن وارونپذیر نباشد، اما میدان ِ برداری یِ $\tilde{v}$ چنان باشد که

$$\tilde{v}[f(x)] = [(\mathbf{D}\, f)(x)][v(x)], \tag{498}$$

باز هم رابطه ای مشابه با (496) به دست میئاید. در این حالت،

$$\Big[\mathbf{D}\Big(\{f\circ[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]\}(x)\Big)\Big](t)=\Big((\mathbf{D}\,f)\{[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big)\Big(v\{[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big),$$
$$=\tilde{v}\Big(\{f\circ[\mathsf{fl}(t\,v)]\}(x)\Big), \tag{499}$$

که نتیجه میدهد

$$f\circ[\mathsf{fl}(t\,v)]=[\mathsf{fl}(t\,\tilde{v})]\circ f. \tag{500}$$

اگر در (496) به جا یِ f تابع ِ $\mathsf{fl}(s\,v)$ گذاشته شود، نتیجه میشود

$$\mathsf{fl}\{t\,[\mathsf{fl}(s\,v)]_*\,v\}=\mathsf{fl}(t\,v), \tag{501}$$

که از آن به دست میئاید

$$[\mathsf{fl}(s\,v)]_*\,v=v. \tag{502}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه است و ϕ یک نقشه یِ آن است. پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ در نقطه یِ x در دامنه یِ ϕ را با $e(x)$ نشان میدهم. به این ترتیب، e_i یک میدان ِ برداری بر دامنه یِ ϕ است. رابطِها یِ (475) و (476) میشوند

$$\{\mathbf{D}[g_{e_i}(\boldsymbol{.},x)]^j\}(t)=\{e_i[g_{e_i}(t,x)]\}^j,$$
$$=\delta_i^j. \tag{503}$$

$$[g_{e_i}(0,x)]^j=x^j. \tag{504}$$

به این ترتیب،

$$[g_{e_i}(t,x)]^j=x^j+\delta_i^j\,t, \tag{505}$$

یا

$$\{[\mathsf{fl}(t\,e_i)]\,x\}^j=x^j+\delta_i^j\,t. \tag{506}$$

پس،

$$\{\mathbf{D}[\mathsf{fl}(t\,e_i)]\}^j{}_k = \delta^j_k. \tag{507}$$

این نتیجه میدهد

$$\{[\mathsf{fl}(t\,e_i)]_*\,T\}^{j_1\cdots}{}_{k_1\ldots}(x) = T^{j_1\cdots}{}_{k_1\ldots}\{[\mathsf{fl}(-t\,e_i)](x)\}. \tag{508}$$

شارش ِ e_i فقط مختصه یِ i را تغییر میدهد، و آهنگ ِ این تغییر هم یک است. اثر ِ پیشران ِ این شارش بر یک میدان ِ تانسری هم فقط تغییر ِ متغیر ِ میدان با وارون ِ شارش است.

18 خم ِ مستقل-از-پارامتر

میگویم تابع ِ $\mathfrak{r}$ یک تابع ِ بازپارامترش است، اگر $\mathfrak{r}$ در $\mathsf{DF}(\mathbb{R};I)$ باشد، که I یک همسایِگی در $\mathbb{R}$ است. میگویم $\mathfrak{r}$ یک تابع ِ بازپارامترش برا یِ خم ِ γ است، اگر $\mathfrak{r}$ یک تابع ِ بازپارامترش باشد و $\mathsf{dom}(\mathfrak{r})$ شامل ِ $\mathsf{dom}(\gamma)$ باشد. $(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})$ را بازپارامتریده یِ γ با $\mathfrak{r}$ مینامم. رُشن است که

$$\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1} = \mathfrak{r}_*\,\gamma. \tag{509}$$

به سادِگی دیده میشود

a هر خم بازپارامتریده یِ خُد َش با همانی ست.

b اگر γ_2 بازپارامتریده یِ γ_1 با $\mathfrak{r}$ باشد، γ_1 بازاپارامتریده یِ γ_2 با $\mathfrak{r}^{-1}$ است.

c اگر γ_2 بازپارامتریده یِ γ_1 با $\mathfrak{r}$، و γ_3 بازپارامتریده یِ γ_2 با $\mathfrak{r}'$ باشد، γ_3 بازپارامتریده یِ γ_1 با $(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})$ است.

به این ترتیب، بازپارامتریده-بودن یک رابطه یِ همئرزی ست.

$(\mathfrak{r}_*\,\gamma)$ خم ی در $\mathbb{M}$ است، که دامنه اَش $\mathfrak{r}[\mathsf{dom}(\gamma)]$ و تصویر َش هم ان تصویر ِ γ است. در واقع فرق ِ $(\mathfrak{r}_*\,\gamma)$ با γ در این است که برچسب ِ نقطِها (مقدار ِ پارامتر) برا یِ این دُ-خم متفاوت است. اگر پارامتر ِ خم مثل ِ زمان تصور شود، خمها یی که بازپارامتریده یِ هم َند متناظر با مسیرها یی

یکسان َند که با سرعتها یِ (احتمالَن) متفاوت پیموده میشوند. اگر مشتق ِ تابع ِ بازپارامترش مثبت باشد، سمت ِ پیمایش ِ مسیر برا یِ بازپارامتریده یِ خم هم ان سمت ِ پیمایش ِ مسیر برا یِ خم است. اگر مشتق ِ تابع ِ بازپارامترش منفی باشد، سمت ِ پیمایش ِ مسیر برا یِ بازپارامتریده یِ خم بر خلاف ِ سمت ِ پیمایش ِ مسیر برا یِ خم است.

متناظر با خم ِ γ و تابع- ِ-بازپارامترش ِ $\mathfrak{r}$ برا یِ آن، به $\mathfrak{r}(t)$ پارامتر ِ خم ِ $(\mathfrak{r}_*\gamma)$ متناظر با پارامتر ِ t برا یِ خم ِ γ میگویم. به این ترتیب، مقدار ِ بازپارامتریده یِ γ و مقدار ِ γدر پارامترها یِ متناظر یکسان است.

به هر رده یِ همئرزی یِ خمها با رابطه یِ بازپارامترش یک خم ِ مستقل-از-پارامتر میگویم. مجموعه یِ خمها یِ همئرز با γ (با رابطه یِ بازپارامترش) را با $\mathsf{pc}(\gamma)$ نشان میدهم.

$\mathfrak{r}$ یک تابع ِ بازپارامترش است. از هموار-بودن ِ $\mathfrak{r}$ و وارون َش نتیجه میشود مشتق ِ $\mathfrak{r}$ پیوسته است و صفر نمیشود. پس مشتق ِ $\mathfrak{r}$ تغییر- ِ-علامت نمیدهد. پس $\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})$ ثابت است. در واقع دیده میشود

$$\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\mathfrak{r}) = \mathsf{sgn}_{\mathbf{1}}(\mathfrak{r}). \tag{510}$$

میگویم $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است، اگر مشتق ِ $\mathfrak{r}$ مثبت باشد، یعنی اگر $\mathfrak{r}$ با همانی همدستیده باشد. به سادگی دیده میشود

a هر خم بازپارامتریده یِ خُد َش با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است. یا همانی یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است.

b اگر γ_2 بازپارامتریده یِ γ_1 با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت باشد، γ_1 بازاپارامتریده یِ γ_2 با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است. یا اگر $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت باشد، $\mathfrak{r}^{-1}$ هم یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است.

c اگر γ_2 بازپارامتریده یِ γ_1 با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت باشد، و γ_3 بازپارامتریده یِ γ_2 با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت باشد، γ_3 هم بازپارامتریده یِ γ_1 با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است. یا اگر $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت، و $\mathfrak{r}'$ هم یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت باشد، و $(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})$ تعریف شده باشد، $(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})$ هم یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت است.

به این ترتیب، بازپارامتریده-بودن با یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ مثبت یک رابطه یِ همئرزی ست. به هر رده یِ همئرزی یِ خمها با رابطه یِ بازپارامترش با تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت، یک خم ِ سمتدار ِ مستقل-از-پارامتر میگویم. مجموعه یِ خمها یِ همئرز با γ با رابطه یِ بازپارامترش با تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت را با $\mathsf{pc}_+(\gamma)$ نشان میدهم.

این رابطِها برا یِ خمها یِ مرکب (با فرض ِ این که ترکیب تعریف شده باشد) به سادگی به دست میئایند. در صورت ِ لزوم فرض شده خمینِها خطی ند. دامنه یِ خمها یی که در ترکیب وارد شده اند هم یکسان است.

$\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش است. γ_1 و γ_2 و γ خمها یی در خمینِها یِ به ترتیب $\mathbb{M}_1$ و $\mathbb{M}_2$ و $\mathbb{M}$ اند، $\mathfrak{s}$ خم ی با مقدار در $\mathbb{R}$ است، و ϑ خم ی در $\mathbb{M}^*$ است.

$$\mathfrak{r}_*(\gamma_1,\gamma_2)=[(\mathfrak{r}_*\,\gamma_1),(\mathfrak{r}_*\,\gamma_2)], \tag{511}$$

$$\mathfrak{r}_*(\gamma_1\otimes\gamma_2)=(\mathfrak{r}_*\,\gamma_1)\otimes(\mathfrak{r}_*\,\gamma_2), \tag{512}$$

$$\mathfrak{r}_*(\mathfrak{s}\,\gamma)=(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{s})(\mathfrak{r}_*\,\gamma), \tag{513}$$

$$\mathfrak{r}_*[\vartheta(\gamma)]=(\mathfrak{r}_*\,\vartheta)(\mathfrak{r}_*\,\gamma). \tag{514}$$

از اینجا ترکیبها یِ متناظر برا یِ خمها یِ مستقل-از-پارامتر تعریف میشود:

$$[\mathsf{pc}(\gamma_1),\mathsf{pc}(\gamma_2)]:=\mathsf{pc}(\gamma_1,\gamma_2), \tag{515}$$

$$[\mathsf{pc}(\gamma_1)]\otimes[\mathsf{pc}(\gamma_2)]:=\mathsf{pc}(\gamma_1\otimes\gamma_2), \tag{516}$$

$$[\mathsf{pc}(\mathfrak{s})][\mathsf{pc}(\gamma)]:=\mathsf{pc}(\mathfrak{s}\,\gamma), \tag{517}$$

$$[\mathsf{pc}(\vartheta)]\otimes[\mathsf{pc}(\gamma)]:=\mathsf{pc}[\vartheta(\gamma)]. \tag{518}$$

همچنین دیده میشود اگر γ_1 و γ_2 خمها یی با دامنه یِ یکسان در خمینه یِ خطی یِ $\mathbb{M}$، و α_1 و α_2 عدد باشند، و $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ_1 و γ_2 باشد،

$$\mathfrak{r}_*(\alpha_1\,\gamma_1+\alpha_2\,\gamma_2)=\alpha_1(\mathfrak{r}_*\,\gamma_1)+\alpha_2(\mathfrak{r}_*\,\gamma_2). \tag{519}$$

شاید چنین بنماید که از اینجا میشود ترکیب ِ خطی برا یِ خمها یِ مستقل-از-پارامتر را تعریف کرد:

$$\alpha_1[\mathsf{pc}(\gamma_1)]+\alpha_2[\mathsf{pc}(\gamma_2)]:=\mathsf{pc}(\alpha_1\,\gamma_1+\alpha_2\,\gamma_2). \tag{520}$$

این کار شدنی میبود اگر (519) به این شکل میبود

$$\mathfrak{r}_*(\alpha_1\,\gamma_1+\alpha_2\,\gamma_2)=\alpha_1[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1]+\alpha_2[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2], \tag{521}$$

که $\mathfrak{r}$ و $\mathfrak{r}_1$ و $\mathfrak{r}_2$ تابع- ِ-بازپارامترشها ی ِ دلبخاه َند. (521) برقرار نیست، به هم ین خاطر طرف ِ راست ِ (519) خُش-تعریف نیست، یعنی به این بستِگی دارد که کدام خمها از $\mathsf{pc}(\gamma_1)$ و $\mathsf{pc}(\gamma_2)$ انتخاب شود.

از قاعده ی ِ زنجیری ِ مشتقگیری دیده میشود مماس بر $(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})$ با مماس بر γ موازی ست:

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})](t)&=\{[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})](t)\}\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{r}^{-1}(t)]\},\\&=\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})[\mathfrak{r}^{-1}(t)]}\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{r}^{-1}(t)]\},\end{aligned} \tag{522}$$

یا

$$\begin{aligned}[\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})][(\mathfrak{r}\circ\gamma^{-1})(x)]&=\{[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][(\mathfrak{r}\circ\gamma^{-1})(x)]\}\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)]\},\\&=\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})[\gamma^{-1}(x)]}\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\gamma^{-1}(x)]\}.\end{aligned} \tag{523}$$

مشتق ِ یک خم در یک خمینه، یک خم در فضا ی ِ مماس بر آن خمینه است. رابطه ی ِ (522) نشان میدهد مشتق ِ بازپارامتریده ی ِ یک خم، یک اسکالر ضرب در بازپارامتریده ی ِ مشتق ِ آن است. این اسکالر مشتق ِ وارون ِ تابع- ِ-بازپارامترش است:

$$\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})=[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][(\mathbf{D}\,\gamma)\circ\mathfrak{r}^{-1}]. \tag{524}$$

با استفاده از این که بازپارامتریده ی ِ γ با تابع- ِ-بازپارامترش ِ $\mathfrak{r}$ در واقع ِ اثر ِ پیشران ِ $\mathfrak{r}$ بر γ است، رابطه ی ِ (509)، یک شکل ِ دیگر برا ی ِ (524) به دست میئاید:

$$\mathbf{D}(\mathfrak{r}_*\,\gamma)=\mathfrak{r}_*(\mathbf{D}\,\gamma). \tag{525}$$

از (524) دیده میشود بردار ِ مماس بر بازپارامتریده ی ِ $(\mathfrak{r}_*\,\gamma)$ و بردار ِ مماس بر γ، در پارامترها ی ِ متناظر با هم موازی یَند. این بردارها، در به ترتیب $[\mathfrak{r}(t)]$ و t، یکسان َند، اگر و تنها اگر

$$[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][\mathfrak{r}(t)]=1, \tag{526}$$

یا همئرز با آن

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t) = 1. \tag{527}$$

این رابطه به ازا یِ همه یِ پارامترها درست است، اگر و تنها اگر $\mathfrak{r}$ یک انتقال باشد، یعنی یک $\mathfrak{c}$ یِ ثابت باشد که

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{c} + t. \tag{528}$$

این تابع را با $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}(t) = \mathfrak{c} + t. \tag{529}$$

به $\mathsf{T}_{\mathfrak{c}}$ انتقال به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ میگویم. رُشن است که

$$[(\mathsf{T}_{\mathfrak{c}})_*\,\gamma](t) = \gamma(t - \mathfrak{c}). \tag{530}$$

به $[(\mathsf{T}_{\mathfrak{c}})_*\,\gamma]$ پارامتر-منتقل-شده یِ γ به اندازه یِ $\mathfrak{c}$ میگویم. به سادِگی دیده میشود ترکیب ِ دُ انتقال یک انتقال به اندازه یِ مجموع ِ اندازِها یِ آن دُ-انتقال است، و البته رابطه یِ مشابه ی هم برا یِ اثر ِ این انتقالها بر خمها هست:

$$\mathsf{T}_{\mathfrak{c}_1} \circ \mathsf{T}_{\mathfrak{c}_2} = \mathsf{T}_{\mathfrak{c}_1+\mathfrak{c}_1}. \tag{531}$$

$$(\mathsf{T}_{\mathfrak{c}_1})_* \circ (\mathsf{T}_{\mathfrak{c}_2})_* = (\mathsf{T}_{\mathfrak{c}_1+\mathfrak{c}_1})_*. \tag{532}$$

v یک میدان ِ برداری بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ است. اگر x یک نقطه یِ $\mathbb{M}$ باشد، $\{[\mathsf{fl}(\centerdot\, v)](x)\}$ یک خم در $\mathbb{M}$ است. بازپارامتریده یِ این خم چنان است که مماس بر آن در هر نقطه با v در آن نقطه موازی ست. اگر Σ یک میدان ِ اسکالر بر $\mathbb{M}$ باشد، $\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,\Sigma\, v)](x)\}$ هم یک خم در $\mathbb{M}$ است که مماس بر آن در هر نقطه برابر ِ $(\Sigma\, v)$ در آن نقطه است، یعنی با v در آن نقطه موازی ست. $\mathfrak{r}_x$ ی را میجویم که بازپارامتریده یِ $\{[\mathsf{fl}(\centerdot\, v)](x)\}$ با $\mathfrak{r}_x$ هم ان $\{[\mathsf{fl}(\centerdot\,\Sigma\, v)](x)\}$ باشد:

$$\Big(\mathsf{fl}\{[(\mathfrak{r}_x)^{-1}(t)]\, v)\}\Big)(x) = [\mathsf{fl}(t\,\Sigma\, v)](x). \tag{533}$$

شاخص ِ x در $\mathfrak{r}_x$ نشانه یِ آن است که در حالت ِ کلی ممکن است تابع- ِ-بازپارامترش به x بستِگی داشته باشد. با مشتقگیری از (533) نتیجه میشود

$$\{\mathbf{D}[(\mathfrak{r}_x)^{-1}]\}(t) = \Sigma\{[\mathsf{fl}(t\,\Sigma\,v)](x)\}. \tag{534}$$

رابطه یِ (533) همئرز است با این معادله همراه با

$$(\mathfrak{r}_x)^{-1}(0) = 0. \tag{535}$$

جواب ِ (534) و (535) هم این است.

$$(\mathfrak{r}_x)^{-1}(t) = \int_0^t \mathrm{d}s\,\Sigma\{[\mathsf{fl}(s\,\Sigma\,v)](x)\}, \tag{536}$$

یا

$$t = \mathfrak{r}_x\left(\int_0^t \mathrm{d}s\,\Sigma\{[\mathsf{fl}(s\,\Sigma\,v)](x)\}\right). \tag{537}$$

به سادِگی دیده میشود این جواب (533) را برمیئاورَد. همچنین دیده میشود در حالت ِ کلی $\mathfrak{r}_x$ به x بستِگی دارد. در حالت ِ خاص ی که Σ ثابت است، این بستِگی از بین میرود. در این حالت،

$$(\mathfrak{r}_x)^{-1}(t) = \Sigma\,t. \tag{538}$$

البته این حالت ِ خاص هم ان (477) است، که به زبان ِ شارش بدیهی مینماید: وقت ی Σ و t ثابت باشند،

$$\mathsf{fl}[(\Sigma\,t)v] = \mathsf{fl}[t(\Sigma\,v)]. \tag{539}$$

19 مشتق ِ لی

v یک میدان ِ برداری و T یک میدان ِ تانسری ست، که دامنه یِ هر-دُ $\mathbb{M}$ است. مشتق ِ لی یِ T با v را با $\mathbf{L}_v\,T$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{L}_v\,T = -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\,v)]_*\,T\}\Big)(0), \tag{540}$$

یا فشردِتر،

$$\mathbf{L}_v = -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\}\Big)(0). \tag{541}$$

رُشن است که $\mathbf{L}_v\, T$ نسبت به T خطی ست. برا یِ نشان-دادن ِ این که $\mathbf{L}_v\, T$ نسبت به v هم خطی ست، u را هم یک میدان ِ برداری میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{u+v} &= -\Big[\mathbf{D}\Big(\{\mathsf{fl}[\boldsymbol{.}\,(u+v)]\}_*\Big)\Big](0),\\
&= -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, u + \boldsymbol{.}\, v)]_*\}\Big)(0),\\
&= -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, u)]_*\}\Big)(0) - \Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\}\Big)(0),\\
&= \mathbf{L}_u + \mathbf{L}_v.
\end{aligned} \tag{542}$$

همچنین به سادِگی دیده میشود اگر α یک عدد ِ حقیقی باشد،

$$\mathbf{L}_{\alpha\, v} = \alpha\, \mathbf{L}_v. \tag{543}$$

با استفاده از

$$f_*\,(S \otimes T) = (f_*\, S) \otimes (f_*\, T), \tag{456}$$

معلوم میشود اثر ِ مشتق ِ لی بر حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری لَیبنیتسی ست:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_v(S \otimes T) &= -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\,(S \otimes T)\}\Big)(0),\\
&= -\Big[\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\, S\} \otimes \{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\, T\}\Big)\Big](0),\\
&= -\Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\, S\}\Big)(0)\Big] \otimes T\\
&\quad - S \otimes \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\, T\}\Big)(0)\Big],
\end{aligned} \tag{544}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_v(S \otimes T) = (\mathbf{L}_v\, S) \otimes T + S \otimes (\mathbf{L}_v\, T). \tag{545}$$

از

$$f_*\, \mathfrak{A} = \mathfrak{A}\, f_* \tag{457}$$

هم نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_v\, \mathfrak{C} = \mathfrak{C}\, \mathbf{L}_v. \tag{546}$$

سرانجام، از ترکیب ِ (545) و (546) معلوم میشود اگر u یک میدان ِ برداری و σ یک میدان ِ همبرداری باشد،

$$\mathbf{L}_v[\sigma(u)] = (\mathbf{L}_v\, \sigma)(u) + \sigma(\mathbf{L}_v\, u), \tag{547}$$

یعنی مشتق ِ لی نسبت به اثر ِ یک میدان ِ همبرداری بر یک میدان ِ برداری هم لَیبنیتسی ست.

$\mathbf{L}_v$ نسبت به v خطی ست، اما نقطِئی نیست. برا یِ دیدن ِ این، Σ را یک میدان ِ اسکالر میگیرم که در x صفر میشود. ϕ را هم یک نقشه میگیرم که دامنه اَش شامل ِ x است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\phi \circ g_{\Sigma\, v}) &= [(\mathbf{D}\, \phi) \circ g_{\Sigma\, v}][(\Sigma\, v) \circ g_{\Sigma\, v}],\\ &= (\Sigma \circ g_{\Sigma\, v})[(\mathbf{D}\, \phi) \circ g_{\Sigma\, v}]\, (v \circ g_{\Sigma\, v}),\end{aligned} \tag{548}$$

که نتیجه میدهد

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\phi \circ g_{\Sigma\, v})](0, x) = [(\mathbf{D}\, \phi)(x)]\{[v(x)] \otimes [(\mathbf{D}\, f)(x)]\}. \tag{549}$$

به این ترتیب،

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\phi \circ g_{\Sigma\, v})](0, x) = [(\mathbf{D}\, \phi)(x)]\{[v(x)] \otimes [(\mathbf{D}\, f)(x)]\}. \tag{550}$$

u را یک میدان ِ برداری میگیرم. از (550) نتیجه میشود

$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\phi \circ g_{\Sigma\, v})](0, x)\}[u(x)] = [(\mathbf{D}_u\, \Sigma)(x)][(\mathbf{D}\, \phi)(x)][v(x)]. \tag{551}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\phi \circ g_{\Sigma\, v})](t, x)\}[u(x)] &= \{[\phi \circ \mathsf{fl}(t\, \Sigma\, v)]_*\, u\}\{[\phi \circ \mathsf{fl}(t\, \Sigma\, v)](x)\},\\ &= \{\phi_*\, [\mathsf{fl}(t\, \Sigma\, v)]_*\, u\}\{[\phi \circ \mathsf{fl}(t\, \Sigma\, v)](x)\},\end{aligned} \tag{552}$$

که نتیجه میدهد

$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\phi\circ g_{\Sigma\,v})](0,x)\}[u(x)] = -(\phi_*\,\mathbf{L}_{f\,v}\,u)[\phi(x)],$$
$$= -[\mathbf{D}\,\phi(x)][(\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,u)(x)]. \qquad (553)$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,u)(x) = -[(\mathbf{D}_u\,\Sigma)(x)][v(x)]. \qquad (554)$$

حالا Σ را یک میدان ِ اسکالر ِ هموار میگیرم که در x لزومَن صفر نمیشود. دیده میشود

$$(\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,u)(x) = \{\mathbf{L}_{[\Sigma(x)]v+[\Sigma-\Sigma(x)]v}\,u\}(x),$$
$$= [\mathbf{L}_{[\Sigma(x)]v}\,u](x) + \{\mathbf{L}_{[\Sigma-\Sigma(x)]v}\,u\}(x),$$
$$= [\Sigma(x)](\mathbf{L}_v\,u)(x) - \Big(\{\mathbf{D}_u[\Sigma-\Sigma(x)]\}(x)\Big)[v(x)],$$
$$= [\Sigma(x)](\mathbf{L}_v\,u)(x) - [(\mathbf{D}_u\,\Sigma)(x)][v(x)]. \qquad (555)$$

از این‌جا معلوم میشود

$$\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,u = \Sigma\,\mathbf{L}_v\,u - [(\mathbf{D}\,\Sigma)(u)]v. \qquad (556)$$

Σ را یک میدان ِ اسکالر میگیرم. دیده میشود

$$\mathbf{L}_v\,\Sigma = -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\,\Sigma\}\Big)(0),$$
$$= -\Big(\mathbf{D}\{\Sigma\circ[\mathsf{fl}(-\boldsymbol{.}\,v)]\}\Big)(0),$$
$$= (\mathbf{D}\,\Sigma)v, \qquad (557)$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_v\,\Sigma = \mathbf{D}_v\,\Sigma. \qquad (558)$$

از جمله معلوم میشود اثر ِ $\mathbf{L}_v$ بر یک میدان ِ اسکالر، نسبت به v نقطِئی ست. همچنین، v صفر است اگر و تنها اگر اثر ِ $\mathbf{L}_v$ بر همه یِ میدانها یِ اسکالر صفر باشد. یا این که v با u برابر است اگر و تنها اگر اثر ِ $\mathbf{L}_v$ بر هر میدان ِ اسکالر با اثر ِ $\mathbf{L}_u$ بر آن میدان برابر باشد. رُشن است که به جا یِ این میشود

گفت v با u برابر است اگر و تنها اگر اثرِ $\mathbf{L}_v$ بر هر میدان با اثرِ $\mathbf{L}_u$ بر آن میدان برابر باشد، یعنی

$$v = u \Longleftrightarrow \mathbf{L}_v = \mathbf{L}_v. \tag{559}$$

σ را یک میدانِ همبرداری، Σ را یک میدانِ اسکالر، و u و v را میدانها یی برداری میگیرم. از (547)، (556)، و این که اثرِ $\mathbf{L}_v$ بر یک میدانِ اسکالر نسبت به v نقطِئی ست نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,\sigma)(u) &= \mathbf{L}_{\Sigma\, v}[\sigma(u)] - \sigma(\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\, u),\\ &= \Sigma\,\mathbf{L}_v[\sigma(u)] - \Sigma\,\sigma(\mathbf{L}_v\, u) + [\sigma(v)](\mathbf{D}_u\,\Sigma),\\ &= \Sigma\,(\mathbf{L}_v\,\sigma)(u) + [\sigma(v)](\mathbf{D}_u\,\Sigma),\end{aligned} \tag{560}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,\sigma = \Sigma\,\mathbf{L}_v\,\sigma + [\sigma(v)]\mathbf{D}\,\Sigma. \tag{561}$$

از این که اثرِ مشتقِ لی بر حاصل-ِضربِ تانسری لَیبنیتسی ست، و با استفاده از (556) و (561)، نتیجه میشود اگر v یک میدانِ برداری، Σ یک میدانِ اسکالر، و T یک میدانِ تانسری یِ نُعِ (r,s) باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,T &= \Sigma\,\mathbf{L}_v\,T\\ &\quad+\sum_{i=1}^{s} T\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{D}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}\}\\ &\quad-\sum_{i=1}^{r}\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{D}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}\}T.\end{aligned} \tag{562}$$

رُشن است که جملِها یِ دوم و سوم نسبت به T نقطِئی یَند. مجموعِ اینها را با $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\mathbf{D}\,\Sigma,T)$ نشان میدهم:

$$\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,T = \Sigma\,\mathbf{L}_v\,T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\mathbf{D}\,\Sigma,T), \tag{563}$$

که اگر ω یک میدانِ یک-فرم باشد (در واقع کافی ست یک-فرم باشد)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\omega,T) &= \sum_{i=1}^{s} T[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}]\\ &\quad-\sum_{i=1}^{r}[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}]T,\end{aligned} \tag{564}$$

یا بر حسب ِ مئلفِها

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\omega,T)]^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} = \sum_{i=1}^{s}(v^l\,\omega_{k_i})T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_{i-1}\,l\,k_{i+1}\cdots k_s} - \sum_{i=1}^{r}(v^{j_i}\,\omega_l)T^{j_1\cdots j_{i-1}\,l\,j_{i+1}\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}. \qquad (565)$$

از جمله رُشن است که متناظر با میدان ِ اسکالر ِ Σ، میدان ِ برداری یِ u، و میدان ِ همبرداری یِ σ،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,0)}(v,\omega,\Sigma) = 0, \qquad (566)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(1,0)}(v,\omega,u) = -v(\omega\,u), \qquad (567)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,1)}(v,\omega,\sigma) = (\sigma\,v)\omega, \qquad (568)$$

یا بر حسب ِ مئلفِها،

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(1,0)}(v,\omega,u)]^j = -v^j\,u^l\,\omega_l. \qquad (569)$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,1)}(v,\omega,\sigma)]_k = \sigma_l\,v^l\,\omega_k. \qquad (570)$$

هر جا نُع ِ میدان ِ تانسری یی که متغیر ِ آخر ِ $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ است مشخص باشد، برا یِ سادِگی میشود شاخص ِ (r,s) را حذف کرد.

با استفاده از (563)، و این که $\mathbf{L}_v$ نسبت به v خطی ست (در واقع این که مشتق ِ لی با مجموع ِ دُ بردار مجموع ِ مشتقها یِ لی با آن بردارها ست)، دیده میشود اگر v یک میدان ِ برداری، T یک میدان ِ تانسری، و $e(x)$ یک پایه در نقطه یِ x باشد،

$$\mathbf{L}_v\,T = v^i\,\mathbf{L}_{e_i}\,T + \boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i,\mathbf{D}\,v^i,T). \qquad (571)$$

اگر به ازا یِ همه یِ x ها یِ دامنه یِ یک نقشه، $e(x)$ یک پایه یِ مختصاتی در x باشد، از

$$\{[\mathsf{fl}(t\,e_i)]_*\,T\}^{j_1\cdots}{}_{k_1\cdots}(x) = T^{j_1\cdots}{}_{k_1\cdots}\{[\mathsf{fl}(-t\,e_i)](x)\} \qquad (508)$$

نتیجه میشود

$$\Big[\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,e_i)]_*\,T\}^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}(x)\Big)\Big](0) = -(\mathbf{D}_i\,T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s})(x). \qquad (572)$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{L}_{e_i}\,T)^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} = \mathbf{D}_i\,T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}, \qquad (573)$$

یا

$$\mathbf{L}_{e_i}\, T = (\mathbf{D}_i\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}) e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{k_1}\otimes\cdots\otimes e^{k_s}, \tag{574}$$

که نتیجه میدهد

$$v^i\,(\mathbf{L}_{e_i}\, T)^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} = \mathbf{D}_v\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}, \tag{575}$$

یا

$$v^i\,\mathbf{L}_{e_i} T = (\mathbf{D}_v\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}) e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{k_1}\otimes\cdots\otimes e^{k_s}. \tag{576}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathbf{L}_{e_i}\, e_j = 0, \tag{577}$$

$$\mathbf{L}_{e_i}\, e^j = 0, \tag{578}$$

که $\{[j, e^j(x)] \mid j\}$ دُگان ِ $\{[j, e_j(x)] \mid j\}$ ِ $e =$ است.

از

$$e_i\otimes(\mathbf{D}\, v^i) = (\mathbf{D}_j\, v^i) e_i\otimes e^j, \tag{579}$$

با تعریف ِ

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, T = \boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i, e^j, T), \tag{580}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i, \mathbf{D}\, v^i, T) = (\mathbf{D}_j\, v^i)\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, T. \tag{581}$$

$\boldsymbol{\mathcal{L}}$ مستقل از پایه است، اما $[e_i\otimes e^j(\mathbf{D}_j\, v^i)]$ که هم ان $[e_i\otimes(\mathbf{D}\, v^i)]$ است به پایه وابسته است. به هم ین خاطر جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (571) به پایه وابسته است. البته $(v^i\,\mathbf{L}_{e_i})$ و در نتیجه جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (571) هم به پایه وابسته است. در واقع $[e_i\otimes\mathbf{D}(e^i\,\boldsymbol{\cdot})]$ و $(e^i\otimes\mathbf{L}_{e_i})$ به پایه وابسته اند. اما هر چند جملِها یِ اول و دوم ِ طرف ِ راست ِ (571) به پایه وابسته اند، مجموع ِ این جملِها مستقل از پایه است. پس $(\mathbf{L}_v\, T)$ مستقل از پایه است. $(\mathbf{L}_v\, T)$ نَ نسبت به v نقطِئی ست و

نَ نسبت به T. رابطه یِ (571) تجزیه یِ $(\mathbf{L}_v\, T)$ به مجوع ِ دُ جمله است، که اولی نسبت به v و دومی نسبت به T نقطِئی ست.

از (566) تا (568) دیده میشود اگر v یک میدان ِ برداری باشد، متناظر با میدان ِ اسکالر ِ Σ، میدان ِ برداری یِ u، و میدان ِ همبرداری یِ σ،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \Sigma = 0. \tag{582}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, u &= -e_i\, (e^j\, u),\\ &= -e_i\, u^j.\end{aligned} \tag{583}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \sigma = (\sigma\, e_i) e^j. \tag{584}$$

از جمله دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i, \mathbf{D}\, v^i, u) &= -e_i\, u^j\, \mathbf{D}_j\, v^i,\\ &= -e_i\, u^j\, \mathbf{L}_{e_j}\, v^i,\\ &= -u^j\, \mathbf{L}_{e_j}\, v.\end{aligned} \tag{585}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{L}_v\, u = v^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, u - u^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, v. \tag{586}$$

T را یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ میگیرم، و در هر x در دامنه یِ یک نقشه یِ ϕ پایه یِ مختصاتی یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ را با $e(x)$ نشان میدهم. از (565) دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n\, T]^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} &= \sum_{i=1}^{s} \delta^l_m\, \delta^n_{k_i}\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_{i-1}\, l\, k_{i+1}\cdots k_s}\\ &\quad - \sum_{i=1}^{r} \delta^{j_i}_m\, \delta^n_l\, T^{j_1\cdots j_{i-1}\, l\, j_{i+1}\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}.\end{aligned} \tag{587}$$

با تعریف ِ

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n\, T]^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} =: \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n\, j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s\, p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}\, T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s}, \tag{588}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}\\
&= \delta^{j_1}_{p_1}\cdots\delta^{j_r}_{p_r}\sum_{i=1}^{s}\delta^{q_1}_{k_1}\cdots\delta^{q_{i-1}}_{k_{i-1}}\,\delta^{q_i}_m\,\delta^n_{k_i}\,\delta^{q_{i+1}}_{k_{i+1}}\cdots\delta^{q_s}_{k_s}\\
&\quad-\delta^{q_1}_{k_1}\cdots\delta^{q_s}_{k_s}\sum_{i=1}^{r}\delta^{j_1}_{p_1}\cdots\delta^{j_{i-1}}_{p_{i-1}}\,\delta^{j_i}_m\,\delta^n_{p_i}\,\delta^{j_{i+1}}_{p_{i+1}}\cdots\delta^{j_r}_{p_r}.
\end{aligned}\tag{589}$$

از جمله،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,0)}{}_m{}^n = 0.\tag{590}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(1,0)}{}_m{}^{n j}{}_p = -\delta^j_m\,\delta^n_p.\tag{591}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,1)}{}_m{}^n{}_k{}^q = \delta^q_m\,\delta^n_k.\tag{592}$$

رابطه یِ (588) میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n T = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}\,T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s}\\
e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{k_1}\otimes\cdots\otimes e^{k_s}.
\end{aligned}\tag{593}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_n\,v^m)[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n\,T]^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}\\
(\mathbf{D}_n\,v^m)T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s},
\end{aligned}\tag{594}$$

یا

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_n\,v^m)\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n\,T = \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}(\mathbf{D}_n\,v^m)T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s}\\
e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{k_1}\otimes\cdots\otimes e^{k_s}.
\end{aligned}\tag{595}$$

از ترکیب ِ اینها با (575) و (576)، رابطه یِ (571) چنین میشود.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{L}_v\,T)^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} &= \mathbf{D}_v\,T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}\\
&\quad+\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}\\
&\quad(\mathbf{D}_n\,v^m)T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s},
\end{aligned}\tag{596}$$

یا

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v\, T = [&\mathbf{D}_v\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s}\\ &+ \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^{n j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s p_1\cdots p_r}{}^{q_1\cdots q_s}(\mathbf{D}_n\, v^m) T^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s}]\\ &e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_r}\otimes e^{k_1}\otimes\cdots\otimes e^{k_s}.\end{aligned} \tag{597}$$

v را یک میدان ِ برداری، T را یک میدان ِ تانسری، و f را یک تابع ِ وارونپذیر، هرسه با دامنه یِ $\mathbb{M}$ میگیرم. نشان میدهم

$$\mathbf{L}_{f_*\, v}\, f_*\, T = f_*\, \mathbf{L}_v\, T. \tag{598}$$

از تعریف ِ مشتق ِ لی،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{f_*\, v}\, f_*\, T &= -\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, f_*\, v)]_*\, f_*\, T\}\Big)(0),\\ &= -\Big[\mathbf{D}\Big(\{f\circ[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]\circ f^{-1}\}_*\, f_*\, T\}\Big)\Big](0),\\ &= -\Big(\mathbf{D}\{f_*[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*(f^{-1})_*\, f_*\, T\}\Big)(0),\\ &= f_*\Big[-\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\, T\}\Big)(0)\Big],\end{aligned} \tag{599}$$

که (598) را نتیجه میدهد. (598) را به این شکل هم مینویسم.

$$\mathbf{L}_{f_*\, v}\, f_* = f_*\, \mathbf{L}_v, \tag{600}$$

یا

$$\mathbf{L}_{f_*\, v} = f_*\, \mathbf{L}_v\, f_*^{-1}. \tag{601}$$

در این روابط f را شارش ِ v میگیرم، نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_v\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = [\mathsf{fl}(t\, v)]_*\, \mathbf{L}_v, \tag{602}$$

یا

$$[\mathsf{fl}(-t\, v)]_*\, \mathbf{L}_v\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = \mathbf{L}_v. \tag{603}$$

همچنین،

$$\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\}\Big)(t) = [\mathsf{fl}(t\,v)]_*\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\}\Big)(0), \tag{604}$$

یا

$$\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\}\Big)(t) = -[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathbf{L}_v. \tag{605}$$

یک نتیجه یِ این رابطه آن است که

$$(\mathbf{L}_v\,T = 0) \Rightarrow \{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,T = T\}. \tag{606}$$

برا یِ اثبات کافی ست توجه شود

$$(\mathbf{L}_v\,T = 0) \Rightarrow \Big[\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\,T\}\Big)(t) = 0\Big]. \tag{607}$$

از (605) ضمنَن معلوم میشود هر عملگر ِ $\mathfrak{O}$ که با $\mathbf{L}_v$ جابِجا شود، با $[\mathsf{fl}(t\,v)]_*$ هم جابِجا میشود. برا ی اثبات معادله-یِ-دیفرانسیلها یِ حاکم بر $\{\mathfrak{O}\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\}$ و $\{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathfrak{O}\}$ را مینویسم:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\{\mathfrak{O}\,[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\} &= -\mathfrak{O}\,\mathbf{L}_v[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*,\\ &= -\mathbf{L}_v\,\mathfrak{O}\,[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*,\end{aligned} \tag{608}$$

و

$$\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\,\mathfrak{O}\} = -\mathbf{L}_v\,[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\,\mathfrak{O}. \tag{609}$$

دیده میشود معادلات ِ حاکم بر $\{\mathfrak{O}\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\}$ و $\{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathfrak{O}\}$ یکسان َند. مقدار ِ این-دُ در $t = 0$ هم که یکسان است. پس این-دُ با هم برابر َند. به این ترتیب،

$$(\mathbf{L}_v\,\mathfrak{O} = \mathfrak{O}\,\mathbf{L}_v) \;\Rightarrow\; \{\mathfrak{O}\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_* = [\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathfrak{O}\}. \tag{610}$$

سرانجام، رُشن است که اگر T یک میدان ِ تانسری و v یک میدان ِ برداری باشد،

$$\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,v)]_*\,T\}\Big)(t) = -\mathbf{L}_v\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,T. \tag{611}$$

v یک میدان ِ برداری ست. $\mathbf{L}_v$ یک-به-یک نیست، پس وارونپذیر نیست. با این وجود ممکن است معادله یِ

$$\mathbf{L}_v\, S = T, \tag{612}$$

(که S و T میدان ِ تانسری یَند) با T یِ معلوم برا یِ S جواب داشته باشد. نشان میدهم این معادله مُضعَن جواب دارد. یک نهاده برا یِ S میگیرم و نشان میدهم این نهاده (612) را بر میئاورَد:

$$S = \int_0^t \mathrm{d}s\, [\mathsf{fl}(s\, v)]_*\, T, \tag{613}$$

که t یک میدان ِ اسکالر است و

$$\Big[\Big(\mathsf{fl}\{-[t(x)]\, v\}\Big)(x)\Big] \in \mathbb{M}_0. \tag{614}$$

$\mathbb{M}_0$ یک مجموعه است، چنان که (614) مُضعَن برا یِ $t(x)$ جواب ِ یکتا دارد. این مجموعه را میشود چنین به دست آورد که در یک ناحیه یِ کوچک همه یِ خمها یِ شارش ِ v را بگیرم و از هر خم یک نقطه را انتخاب کنم. با استفاده از (614) مشتق ِ لی یِ t با v به دست میئاید. دیده میشود

$$\Big(\mathsf{fl}\{-[t(x)]\, v - s\, v\}\Big)\{\mathsf{fl}(s\, v)](x)\} = \Big(\mathsf{fl}\{-[t(x)]\, v\}\Big)(x), \tag{615}$$

که از آن نتیجه میشود

$$t\{[\mathsf{fl}(s\, v)](x)\} = t(x) + s, \tag{616}$$

و به این ترتیب،

$$\mathbf{L}_v\, t = 1. \tag{617}$$

حالا به نهاده یِ (613) برمیگردم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_v\, S &= (\mathbf{L}_v\, t)\Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\}(t)\Big)T + \int_0^t \mathrm{d}s\, \mathbf{L}_v\, \{[\mathsf{fl}(s\, v)]_*\, T\},\\
&= \Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\, v)]_*\}(t)\Big)T - \int_0^t \mathrm{d}s\, \Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(s\, v)]_*\, T\}\Big)(s),\\
&= [\mathsf{fl}(0\, v)]_*\, T,
\end{aligned} \tag{618}$$

که نشان میدهد S معادله یِ (612) را برمیئاورَد. از اینجا عملگرِ $\mathbf{A}_v$ را تعریف میکنم:

$$\mathbf{A}_v\, T = \int_0^t \mathrm{d}s\, [\mathsf{fl}(s\, v)]_*\, T. \tag{619}$$

دیده میشود $\mathbf{A}_v$ یک وارونِ راستِ $\mathbf{L}_v$ است:

$$\mathbf{L}_v\, \mathbf{A}_v = \mathbf{1}. \tag{620}$$

g در $\mathsf{F}[\mathbb{M}; (I \times \mathbb{M})]$ است، که $\mathbb{M}$ خمینه است و I یک بازه یِ حقیقی ست، و $g(t, \cdot)$ وارونپذیر است. v_g را مثلِ (487)تعریف میکنم:

$$v_g[t, g(t, x)] = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, g](t, x). \tag{487}$$

از

$$v_g[t, g(t, x)] = \{\mathbf{D}[g(t + \cdot, x)]\}(0) \tag{489}$$

نتیجه میشود

$$[g(t + s, \cdot)] \circ [g(t, \cdot)]^{-1} \circ \{\mathsf{fl}[-s\, v_g(t, \cdot)]\} = 1 + o(s), \tag{621}$$

که نتیجه میدهد

$$\{\mathsf{fl}[-s\, v_g(t, \cdot)]\}^* \{[g(t, \cdot)]^*\}^{-1} [g(t + s, \cdot)]^* = 1 + o(s), \tag{622}$$

یا

$$\{\mathsf{fl}[s\, v_g(t, \cdot)]\}_* \{[g(t, \cdot)]^*\}^{-1} [g(t + s, \cdot)]^* = 1 + o(s). \tag{623}$$

از این رابطه نسبت به s مشتق میگیرم و بعد s را صفر میگذارم. با تعریفِ

$$[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t) := [g(t, \cdot)]^*, \tag{624}$$

نتیجه میشود

$$-\mathbf{L}_{v_g(t, \cdot)} + \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\}^{-1} \Big(\{\mathbf{D}[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g]\}(t)\Big) = 0, \tag{625}$$

یا

$$\{\mathbf{D}[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g]\}(t) = \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\}\mathbf{L}_{v_g(t,\boldsymbol{\cdot})}. \tag{626}$$

این یعنی

$$\lim_{s\to 0} \frac{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t+s) - [\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)}{s} = \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\}\mathbf{L}_{v_g(t,\boldsymbol{\cdot})}. \tag{627}$$

20 جابِجاگر ِ دُ میدان ِ برداری

u و v میدانها یی برداری بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ اند. دیده میشود

$$\begin{aligned}\Big(\mathbf{D}\{\mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\, v}\}\Big)(0) &= \Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\, \mathbf{L}_v\, [\mathsf{fl}(-\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\}\Big)(0),\\ &= \Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\, \mathbf{L}_v\}\Big)(0) + \Big(\mathbf{D}\{\mathbf{L}_v\, [\mathsf{fl}(-\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\}\Big)(0),\\ &= -\mathbf{L}_u\, \mathbf{L}_v + \mathbf{L}_v\, \mathbf{L}_u. \end{aligned} \tag{628}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\Big(\mathbf{D}\{\mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\, v}\}\Big)(0) &= \Big[\mathbf{L}_{\left(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{\cdot}\, u)]_*\}\right) v}\Big](0),\\ &= -\mathbf{L}_{\mathbf{L}_u\, v}. \end{aligned} \tag{629}$$

در رسیدن به برابری یِ اول از این استفاده شده که $\mathbf{L}_w$ نسبت به w خطی ست. پس اگر w یک میدان ِ برداری یِ تابع ِ یک پارامتر ِ باشد،

$$\mathbf{D}\, \mathbf{L}_{w(\boldsymbol{\cdot})} = \mathbf{L}_{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, w}, \tag{630}$$

که $\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}$ مشتقگیری نسبت به پارامتر است. از برابریها یِ (628) و (629) نتیجه میشود

$$[\mathbf{L}_u, \mathbf{L}_v] = \mathbf{L}_{\mathbf{L}_u\, v}. \tag{631}$$

جابِجاگر ِ u با v را با $u \diamond v$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$u \diamond v = \mathbf{L}_u\, v. \tag{632}$$

دیده میشود

$$\mathbf{L}_{u\,\diamond\,v} = [\mathbf{L}_u, \mathbf{L}_v]. \tag{633}$$

پس جابِجاگر ِ دُ میدان ِ برداری نسبت به هر یک از میدانها خطی ست، پادمتقارن است:

$$v \diamond u = -u \diamond v, \tag{634}$$

و اتحاد ِ یاکُبی را بر میئاورَد:

$$u \diamond (v \diamond w) + v \diamond (w \diamond u) + w \diamond (u \diamond v) = 0. \tag{635}$$

از (631) ضمنَن معلوم میشود

$$\mathbf{L}_v\, u = -\mathbf{L}_u\, v. \tag{636}$$

البته این را از

$$\mathbf{L}_v\, u = v^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, u - u^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, v \tag{586}$$

هم میشد دید. از تعریف ِ جابِجاگر ِ u با v و با استفاده از

$$\mathbf{L}_{f_*\,v}\, f_*\, T = f_*\, \mathbf{L}_v\, T, \tag{598}$$

به سادِگی دیده میشود اگر u و v دُ میدان ِ برداری باشند و f یک تابع ِ وارونپذیر باشد (که دامنه یِ هر-سه یکسان است)،

$$f_*(u \diamond v) = (f_*\, u) \diamond (f_*\, v). \tag{637}$$

u و v دُ میدان ِ برداری یَند. نشان میدهم اگر جابِجاگر ِ u با v صفر باشد، شارش ِ هر یک با مشتق ِ لی با دیگری جابِجا میشود، و شارشها یِ u و v هم با یکدیگر جابِجا میشوند. برا یِ اثبات دُ بار

$$(\mathbf{L}_v\, \mathfrak{O} = \mathfrak{O}\, \mathbf{L}_v) \;\Rightarrow\; \{\mathfrak{O}\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = [\mathsf{fl}(t\, v)]_*\, \mathfrak{O}\} \tag{610}$$

را به کار میبرم:

$$(\mathbf{L}_v\, \mathbf{L}_u = \mathbf{L}_u\, \mathbf{L}_v) \;\Rightarrow\; \{\mathbf{L}_u\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = [\mathsf{fl}(t\, v)]_*\, \mathbf{L}_u\}, \tag{638}$$

$$\{\mathbf{L}_u\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = [\mathsf{fl}(t\, v)]_*\, \mathbf{L}_u\} \;\Rightarrow\; \{[\mathsf{fl}(s\, u)]_*\, [\mathsf{fl}(t\, v)]_* = [\mathsf{fl}(t\, v)]_*\, [\mathsf{fl}(s\, u)]_*\}. \tag{639}$$

از این نتیجه میشود

$$[\mathsf{fl}(s\,u)] \circ [\mathsf{fl}(t\,v)] = [\mathsf{fl}(t\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,u)]. \tag{640}$$

بر عکس، اگر $\mathsf{fl}(s\,u)$ و $\mathsf{fl}(t\,v)$ با هم جابِجا شوند، u و v با هم جابِجا میشوند. در واقع کافی ست $\mathsf{fl}(t\,u)$ و $\mathsf{fl}(t\,v)$ با هم جابِجا شوند. در این صورت،

$$[\mathsf{fl}(t\,u)]_*[\mathsf{fl}(t\,v)]_*[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*[\mathsf{fl}(-t\,v)]_* = \mathbf{1}. \tag{641}$$

از این نسبت به t مشتق میگیرم:

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_* \\
&\quad - [\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,\mathbf{L}_v\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_* \\
&\quad + [\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_* \\
&\quad + [\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*\,\mathbf{L}_v\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*, \\
&= -\mathbf{L}_u - [\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,\mathbf{L}_v\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_* + [\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_* + \mathbf{L}_v, \\
&= -\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(t\,u)]_*\,v} + \mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,u} + \mathbf{L}_v.
\end{aligned} \tag{642}$$

از این هم نسبت به t مشتق میگیرم و بعد t را صفر میگذارم:

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbf{L}_{\mathbf{L}_u\,v} - \mathbf{L}_{\mathbf{L}_v\,u}, \\
&= 2\,\mathbf{L}_{u\,\diamond\,v},
\end{aligned} \tag{643}$$

که نشان میدهد u با v جابِجا میشود.

نشان میدهم اگر جابِجاگر ِ میدان ِ برداری یِ u با میدان ِ برداری یِ v صفر باشد،

$$[\mathsf{fl}(t\,u)] \circ [\mathsf{fl}(t\,v)] = \mathsf{fl}(t\,u + t\,v). \tag{644}$$

برا یِ اثبات،

$$\begin{aligned}
&\Big[\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,u+\boldsymbol{.}\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-\boldsymbol{.}\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-\boldsymbol{.}\,u)]\}_*\Big)\Big](t),\\
&=[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*(-\mathbf{L}_{u+v}+\mathbf{L}_v)[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*\\
&\quad+[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*\,\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(-t\,u)]_*,\\
&=0.
\end{aligned}\tag{645}$$

در محاسبه این به کار رفته که شارشها با مشتق- ِ-لیها جابِجا میشوند. از (645) نتیجه میشود

$$\{[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-t\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-t\,u)]\}_*=\mathbf{1},\tag{646}$$

که (644) را میدهد. یک نتیجه یِ (644) این است که اگر جابِجاگر ِ u با v صفر باشد،

$$[\mathsf{fl}(s\,u)]\circ[\mathsf{fl}(t\,v)]=\mathsf{fl}(s\,u+t\,v).\tag{647}$$

نشان میدهم برعکس ِ این نتیجه هم درست است. یعنی اگر برا یِ همه یِ s ها و t ها یِ عضو ِ یک همسایِگی یِ باز ِ صفر (647) برقرار باشد، جابِجاگر ِ u با v صفر است. در واقع نشان میدهم اگر برا یِ همه یِ t ها یِ عضو ِ یک همسایِگی یِ صفر (644) برقرار باشد، جابِجاگر ِ u با v صفر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\Big[\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,u+\boldsymbol{.}\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-\boldsymbol{.}\,v)]\}_*\Big)\Big](t)&=-[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*,\\
&=-\mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,u}\,[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*,\\
&=-\mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,u}\,[\mathsf{fl}(t\,u)]_*.
\end{aligned}\tag{648}$$

از (644) همچنین نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
\Big[\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]\circ[\mathsf{fl}(-t\,v)]\}_*\Big)\Big](t)&=\Big(\mathbf{D}\{[\mathsf{fl}(\boldsymbol{.}\,u)]_*\}\Big)(t),\\
&=-\mathbf{L}_u\,[\mathsf{fl}(t\,u)]_*.
\end{aligned}\tag{649}$$

با مقایسه یِ این دُ-رابطه،

$$\mathbf{L}_{[\mathsf{fl}(t\,u+t\,v)]_*\,u}=\mathbf{L}_u,\tag{650}$$

و از آنجا

$$[\mathsf{fl}(t\,u + t\,v)]_*\,u = u, \tag{651}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_{u+v}\,u = 0. \tag{652}$$

این هم نتیجه میدهد جابِجاگر ِ v با u صفر است.

21 میدان-پایه

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. به تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{M}$ که مقدار َش در هر نقطه یِ x از $\mathbb{M}$ یک پایه (کنج) برا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد یک میدان-پایه (میدان-کنج) در $\mathbb{M}$ میگویم. ϕ یک نقشه است. به میدان-پایه ای (میدان-کنج ی) که مقدار َش در هر نقطه پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ باشد، میدان-پایه یِ (میدان-کنج ِ) مختصاتی یِ متناظر با ϕ میگویم.

از

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{e_i} f &= \{[\mathbf{D}(f\circ\phi^{-1})][\phi(x)]\}E_i,\\ &= [\partial_i(f\circ\phi^{-1})][\phi(x)],\end{aligned} \tag{326}$$

معلوم است اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد، برا یِ هر (i,j)

$$e_i \diamond e_j = 0. \tag{653}$$

البته رُشن است که در این حالت e خطی-مستقل هم هست. بر عکس، گیرم e یک میدان-پایه در $\mathbb{D}$ (یک زیرمجموعه یِ باز از خمینه یِ $\mathbb{M}$) است و (653) را بر میئاورَد. نشان میدهم در این صورت یک نقشه یِ ϕ هست که این میدان-پایه مُضعَن میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نقشه است. برا یِ اثبات x را در $\mathbb{D}$ میگیرم و $\mathbb{D}'$ را یک زیرمجموعه یِ باز از $\mathbb{R}^m$ میگیرم (که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است). ψ را در $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{D}')$ میگیرم، چنان که

$$\psi(Y) = [\mathsf{fl}(Y^i\,e_i)](x). \tag{654}$$

به خاطرِ (653)،

$$\mathsf{fl}(Y^i e_i) = [\mathsf{fl}(Y^1{}_1)] \circ \cdots \circ [\mathsf{fl}(Y^m e_m)], \tag{655}$$

که در آن ترتیبِ عاملها یِ طرفِ راست هم میشود به دلبخاه عوض کرد. از جمله میشود عاملِ i اُم در طرفِ راست را عاملِ اول کرد. به این ترتیب، رُشن است که

$$\frac{\partial}{\partial Y^i}[\psi(Y)] = e_i[\psi(Y)]. \tag{656}$$

از این که e خطی-مستقل است، معلوم میشود $(\mathbf{D}\,\psi)$ ناتکین است. (هیچ ترکیبِ خطی یِ نابدیهی یی از e صفر نیست. پس اثرِ $(\mathbf{D}\,\psi)$ بر هیچ بردارِ ناصفر ی صفر نیست.) با قضیه یِ رتبه معلوم میشود یک $\mathbb{D}''$ هست که یک زیرمجموعه یِ بازِ $\mathbb{R}^m$ است، شاملِ صفر است، در آن ψ یک-به-یک است، و در $\psi(\mathbb{D}'')$ وارونِ ψ یک-به-یک و مشتقپذیر است. ϕ را هم ان ψ^{-1} با دامنه یِ $\psi(\mathbb{D}'')$ میگیرم. متناظر با y در $\psi(\mathbb{D}'')$، نقطه یِ Y را با

$$\psi(Y) = y \tag{657}$$

تعریف میکنم. از (656) و قاعده یِ زنجیرِئی یِ مشتقگیری نتیجه میشود

$$\frac{\partial}{\partial Y^i}[(\phi \circ \psi)(Y)] = [(\mathbf{D}\,\phi)(y)]\{e_i[\psi(Y)]\}. \tag{658}$$

اما $(\phi \circ \psi)$ همانی ست. پس

$$\frac{\partial}{\partial Y^i}[(\phi \circ \psi)(Y)] = E_i, \tag{659}$$

که E_i با

$$(E_i)^j = \delta_i^j, \tag{323}$$

تعریف شده. از (658) و (659) نتیجه میشود

$$e_i(y) = [(\mathbf{D}\,\phi)(y)]^{-1} E_i, \tag{660}$$

که یعنی در هر نقطه یِ y، تابع ِ $e(y)$ پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ است.

در بخش ِ 13 دیده شد متناظر با هر پایه یِ فضا یِ مماس در هر نقطه نقشه ای هست که آن پایه پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نقشه در آن نقطه است. نتیجه ای که اینجا به دست آمد این است که متناظر با هر میدان-پایه یک نقشه هست که آن میدان-پایه مُضعَن میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نقشه است، اگر و تنها اگر جابِجاگر ِ هر دُ-میدان ِ آن میدان-پایه صفر شود.

f در $\mathsf{F}(\mathbb{M}';\mathbb{M})$ است. e و e' میدان-پایِها یی مختصاتی برا یِ به ترتیب $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}'$، متناظر با نقشِها یِ به ترتیب ϕ و ϕ' اند. تعریف میکنم

$$f^a = (\phi')^a \circ f. \tag{661}$$

عنصر- ِ-ماتریسیها یِ $(\mathbf{D}\, f)$ میشوند

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\, f)^a{}_i(x) &= (\mathbf{D}_i\, f^a)(x),\\ &= \{\mathbf{D}_i[(\phi')^a \circ f]\}(x),\\ &= \{\partial_i[(\phi')^a \circ f \circ \phi^{-1}]\}[\phi(x)],\end{aligned} \tag{662}$$

به این ترتیب،

$$(f_*\, e_i)[f(x)] = [(\mathbf{D}_i\, f^a)(x)]\{e'_a[f(x)]\}, \tag{663}$$

و اگر v یک میدان ِ برداری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$(f_*\, v)^a[f(x)] = [(\mathbf{D}_i\, f^a)(x)][v^i(x)]. \tag{664}$$

همچنین،

$$[(\mathbf{D}_i\, f^a)(x)]\{(f_*\, e^i)[f(x)]\} = e'^a[f(x)], \tag{665}$$

و اگر σ یک میدان ِ همبرداری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$[(\mathbf{D}_i\, f^a)(x)]\{(f_*\, \sigma)_a[f(x)]\} = \sigma_i(x). \tag{666}$$

v را یک میدان ِ برداری بر $\mathbb{M}$ میگیرم. از (662) معلوم میشود

$$\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, g_v]^j{}_i\}(0,x) = (\mathbf{D}_i\, v^j)(x). \tag{667}$$

به این ترتیب معلوم میشود اگر u یک میدان ِ برداری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v\, u &= (\mathbf{D}_v\, u^i - \mathbf{D}_u\, v^i)e_i,\\ &= (v^j\, \mathbf{D}_j\, u^i - u^j\, \mathbf{D}_j\, v^i)e_i,\end{aligned} \tag{668}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}v \diamond u &= (\mathbf{D}_v\, u^i - \mathbf{D}_u\, v^i)e_i,\\ &= (v^j\, \mathbf{D}_j\, u^i - u^j\, \mathbf{D}_j\, v^i)e_i.\end{aligned} \tag{669}$$

همچنین اگر σ یک میدان ِ همبرداری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v\, \sigma &= (\mathbf{D}_v\, \sigma_i)e^i + \sigma_i\, \mathbf{D}\, v^i\\ &= (v^j\, \mathbf{D}_j\, \sigma_i + \sigma_j\, \mathbf{D}_i\, v^j)e^i.\end{aligned} \tag{670}$$

سرانجام، اگر T یک میدان ِ تانسری ی ِ نُع ِ (r,s) بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v\, T = (&\mathbf{D}_v\, T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\\ &- T^{k\cdots}{}_{\cdots j}\, \mathbf{D}_k\, v^i - \cdots\\ &+ \cdots + T^{i\cdots}{}_{\cdots k}\, \mathbf{D}_j\, v^k)e_i \otimes \cdots \otimes e^j.\end{aligned} \tag{671}$$

البته همه ی ِ این روابط خاص ِ میدان-پایِها ی ِ مختصاتی یَند. یک حالت ِ خاص ِ (671) از این به دست میئاید که به جا ی ِ T میدان ِ اسکالر ِ Σ گذاشته شود:

$$\mathbf{L}_v\, \Sigma = v^j\, \mathbf{D}_j\, \Sigma. \tag{672}$$

این رابطه خاص ِ میدان-پایِها ی ِ مختصاتی نیست. اگر ϕ یک نقشه و e میدان-پایه ی ِ مختصاتی ی ِ متناظر با ϕ باشد،

$$\mathbf{L}_{e_j}\, \phi^i = \delta^i_j. \tag{673}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتدار و e یک میدان-پایه یِ هموار بر آن است. در هر نقطه یِ x از خمینه، دستیدِگی یِ کنج ِ متناظر با e با تابع ِ V تعیین میشود، که عنصر- ِ-ماتریسیها یَش $\{[(\mathbf{D}\,\phi)(x)]e_j\}^i$ ها یَند. ϕ یک نقشه یِ همدستیده با خمینه است، مئلفِها یِ بردارها در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نوشته شده اند. علامت ِ $\det(V)$ مستقل از انتخاب ِ ϕ است. ضمنَن $\det(V)$ صفر نمیشود. به این ترتیب $\mathsf{sgn}[\det(V)]$ یک تابع ِ پیوسته از خمینه است که تنها دُ مقدار میگیرد، پس در هر مئلفه یِ همبندی یِ خمینه ثابت است. میگویم میدان-پایه یِ e راستدست (چپدست) است، اگر مقدار ِ این تابع یک (منفی یِ یک) باشد.

22 قضیه یِ فْرُبِنیوس I

e_1 تا e_k میدانها یی برداری بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ اند، چنان که $e = \{(1, e_1), \ldots, (k, e_k)\}$ خطی-مستقل است و k کوچکتر از یا برابر با بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. متناظر با x_0 در $\mathbb{M}$، یک تابع ِ ψ در $\mathsf{F}[\mathbb{M}; \mathsf{dom}(\psi)]$ تعریف میکنم، چنان که $\mathsf{dom}(\psi)$ یک همسایِگی در $\mathbb{R}^k$ است که شامل ِ 0 است و

$$\psi(Y) = \left\{ \bigcirc_{j=1}^{k} [\mathsf{fl}(Y^j\, e_j)] \right\}(x_0). \tag{674}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{D}_i\, \psi)(0) = e_i(x_0). \tag{675}$$

e خطی-مستقل است، پس $(\mathbf{D}\,\psi)$ در $Y = 0$ ناتکین است. از این و پیوستگی یِ $(\mathbf{D}\,\psi)$ معلوم میشود $(\mathbf{D}\,\psi)$ در یک همسایگی از $Y = 0$ ناتکین است. به این ترتیب قضیه یِ رتبه نشان میدهد در $\mathbb{R}^k$ یک مجموعه یِ باز ِ $\mathbb{D}$ شامل ِ صفر هست، که در آن ψ یک-به-یک است و در $\psi(\mathbb{D})$ وارون ِ ψ یک-به-یک و مشتقپذیر است. $\phi = \psi^{-1}$ یک نقشه از $\psi(\mathbb{D})$ به $\mathbb{R}^k$ است، و به این ترتیب $\psi(\mathbb{D})$ یک زیرخمینه یِ $\mathbb{M}$ است. از (674) دیده میشود پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ، در x_0 هم ان $\{[1, e_1(x_0)], \ldots, [k, e_k(x_0)]\}$ است. اما در $y = \psi(Y)$ چِطُر؟

اگر e_i ها با هم جابِجا شوند، مانسته یِ (675) در نقطِها یِ دیگر هم برقرار است:

$$(\mathbf{D}_i\, \psi)(Y) = e_i[\psi(Y)]. \tag{676}$$

برا یِ دیدن ِ این کافی ست در (674) ترتیب ِ تابعها رعوض شود، چنان که $[\mathsf{fl}(Y^i\, e_i)]$ طرف چپ ِ بقیه یِ تابعها بیفتد، و این شدنی ست، چون از جابِجا-شدن ِ e_i ها با هم نتیجه میشود $[\mathsf{fl}(Y^i\, e_i)]$ ها هم با هم جابِجا میشوند. به این ترتیب،

$$\psi(Y) = \left([\mathsf{fl}(Y^i\, e_i)] \circ \left\{ \bigcirc_{j=1}^{k\setminus i} [\mathsf{fl}(Y^j\, e_j)] \right\} \right)(x_0), \tag{677}$$

که (676) را نتیجه میدهد. پس،

$$\mathrm{T}_y[\psi(\mathbb{D})] = \mathsf{span}(e). \tag{678}$$

یک تعمیم ِ این حکم این است: اگر برا یِ هر (i,j)

$$(e_i \diamond e_j) \in \mathsf{span}\{(1,e_1),\dots,(k,e_k)\}, \tag{679}$$

آنگاه (678) همچنان برقرار است، یعنی فضا یِ مماس بر $\psi(\mathbb{D})$ همچنان $\mathsf{span}(e)$ است. (679) یعنی $f^l{}_{i\,j}$ ها یی هستند که

$$e_i \diamond e_j = f^l{}_{i\,j}\, e_l. \tag{680}$$

برا یِ اثبات، از این شروع میکنم که متناظر با میدانها یِ برداری یِ u و v،

$$[\mathsf{fl}(t\,v)] \circ [\mathsf{fl}(s\,u)] \circ [\mathsf{fl}(t\,v)]^{-1} = \mathsf{fl}\{s\,[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\, u\}. \tag{681}$$

تعریف میکنم

$$\mathfrak{a}(t) = [\mathsf{fl}(t\,v)]_*\, u. \tag{682}$$

دیده میشود

$$\mathbf{D}\,\mathfrak{a} = -\mathbf{L}_v\,\mathfrak{a}. \tag{683}$$

این رابطه همراه با این شرط که

$$\mathfrak{a}(0) = u, \tag{684}$$

$\mathfrak{a}$ را به طُر ِ یکتا مشخص میکند. حالا u و v را در $\mathsf{span}(e)$ میگیرم. در این صورت

$$u = u^i\, e_i. \tag{685}$$

$$v = v^i\, e_i. \tag{686}$$

میخاهم نشان بدهم $\mathfrak{a}(t)$ هم در $\mathsf{span}(e)$ است. برا یِ این کار نشان میدهم $\mathfrak{a}^i$ ها یی هستند که

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^i\, e_i. \tag{687}$$

این رابطه یعنی

$$[\mathfrak{a}(t)](x) = [\mathfrak{a}^i(t,x)][e_i(x)]. \tag{688}$$

(687) را در (683) میگذارم و نشان میدهم معادله یِ حاصل، همراه با

$$\mathfrak{a}^i(0,x) = u^i(x) \tag{689}$$

جواب دارد. (683) میشود

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mathfrak{a}^i]e_i &= -\mathbf{L}_v(\mathfrak{a}^i\, e_i),\\ &= -(\mathbf{L}_v\, \mathfrak{a}^i)e_i - \mathfrak{a}^i\mathbf{L}_v\, e_i.\end{aligned} \tag{690}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v\, e_i &= -\mathbf{L}_{e_i}\, v,\\ &= -v^j\, \mathbf{L}_{e_i}\, e_j - (\mathbf{L}_{e_i}\, v^j)e_j,\\ &= -v^j\, f^l{}_{i\,j}\, e_l - (\mathbf{L}_{e_i}\, v^l)e_l,\\ &=: -\kappa^l{}_i\, e_l.\end{aligned} \tag{691}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{D}\, \mathfrak{a})^l = -\mathbf{L}_v\, \mathfrak{a}^l - \kappa^l{}_i\, \mathfrak{a}^i, \tag{692}$$

که مفصلتر َش میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{a}^l](t,x) = -(\mathbf{L}_v\,\mathfrak{a}^l)(t,x) - [\kappa^l{}_i(x)][\mathfrak{a}^i(t,x)], \tag{693}$$

تعریف میکنم

$$\mathfrak{b}^i(t,x) = \mathfrak{a}^i\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}. \tag{694}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b}^l](t,x) &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{a}^l]\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\\ &\quad + \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mathfrak{a}^l]\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big)\Big(v\{[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big),\\ &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{a}^l]\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\} + (\mathbf{L}_v\,\mathfrak{a}^l)\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\},\\ &= -\Big(\kappa^l{}_i\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big)\Big(\mathfrak{a}^i\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big),\end{aligned} \tag{695}$$

که نشان میدهد

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mathfrak{b}^l](t,x) = -\Big(\kappa^l{}_i\{t,[\mathsf{fl}(t\,v)](x)\}\Big)[\mathfrak{b}^i(t,x)]. \tag{696}$$

این یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ خطی برا یِ $\mathfrak{b}^i(\cdot,x)$ ها ست، که با شرط ِ اولیه یِ

$$\mathfrak{b}^i(0,x) = u^i(x), \tag{697}$$

جواب ِ یکتا دارد.

پس اثبات ِ این که $\mathfrak{a}(t)$ در $\mathsf{span}(e)$ است چنین میشود. $\mathfrak{b}^i$ ها را چنان میابم که (696) و (697) را براورَند. اینها وجود دارند و یکتا یَند. $\mathfrak{a}^i$ ها را چنین مینویسم.

$$\mathfrak{a}^i(t,x) = \mathfrak{b}^i\{t,[\mathsf{fl}(-t\,v)](x)\}. \tag{698}$$

رُشن است که این هم ان (694) است. به این ترتیب $\mathfrak{a}^i$ ها (689) و (690) را بر میئاورند. از اینجا معلوم میشود (683) هم با (687) برقرار است، و البته رُشن است که شرط ِ اولیه یِ (697) هم برقرار است. پس اگر u و v در $\mathsf{span}(e)$ باشند، $\mathfrak{a}^i$ ها یی هستند که

$$\{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\,u\}(x) = [\mathfrak{a}^i(t,x)][e_i(x)]. \tag{699}$$

با یک استقرا یِ ساده، از این نتیجه میشود اگر میدانها یِ برداری یِ u و v_1 تا v_l همه در $\mathsf{span}(e)$ باشند، آنگاه $\Big(\{[\mathsf{fl}(t\,v_1)]_*\cdots[\mathsf{fl}(t\,v_l)]_*\}\,u\Big)$ هم در $\mathsf{span}(e)$ است.

حالا نشان میدهم مشتق ِ $\psi(Y)$ نسبت به هر یک از Y^i ها در $\mathsf{span}(e)$ است. دیده میشود

$$\psi(Y) = \Big(\Big\{\bigcirc_{j=1}^{i-1}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\circ\{[\mathsf{fl}(Y^i\,e_i)]\}\circ\Big\{\bigcirc_{j=i+1}^{k}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\Big)(x_0), \tag{700}$$

$$= \Big(\Big\{\bigcirc_{j=1}^{i-1}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\circ\{[\mathsf{fl}(Y^i\,e_i)]\}\circ\Big\{\bigcirc_{j=1}^{i-1}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}^{-1}$$
$$\circ\Big\{\bigcirc_{j=1}^{i-1}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\circ\Big\{\bigcirc_{j=i+1}^{k}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\Big)(x_0), \tag{701}$$

$$= \{[\mathsf{fl}(Y^i w_i)]\circ f_i\}(x_0), \tag{702}$$

که

$$w_i = [\mathsf{fl}(Y^1\,e_1)]_*\cdots[\mathsf{fl}(Y^{i-1}\,e_{i-1})]_*\,e_i. \tag{703}$$

$$f_i = \Big\{\bigcirc_{j=1}^{i-1}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}\circ\Big\{\bigcirc_{j=i+1}^{k}[\mathsf{fl}(Y^j\,e_j)]\Big\}. \tag{704}$$

رُشن است که w_i و f_i، هیچ یک به Y_i بستِگی ندارند. به این ترتیب،

$$(\mathbf{D}_i\,\psi)(Y) = w_i[\psi(Y)]. \tag{705}$$

دیده شد w_i در $\mathsf{span}(e)$ است. پس یک Λ هست که

$$(\mathbf{D}_i\,\psi)(Y) = \{\Lambda^j{}_i[\psi(Y)]\}\{e_j[\psi(Y)]\}, \tag{706}$$

یا

$$(\mathbf{D}_i\,\psi)[\psi^{-1}(y)] = [\Lambda^j{}_i(y)][e_j(y)]. \tag{707}$$

رُشن است که

$$\Lambda(x_0) = \mathbf{1}. \tag{708}$$

$(\mathbf{D}\,\psi)$، در $\mathbb{D}$ ناتکین است، که این نشان میدهد Λ در $\psi(\mathbb{D})$ ناتکین است. به این ترتیب،

$$\mathsf{span}\Big\{\{i, (\mathbf{D}_i\,\psi)[\psi^{-1}(y)]\} \mid i\Big\} = \mathsf{span}(e). \tag{709}$$

اما

$$\mathrm{T}_y[\psi(\mathbb{D})] = \mathsf{span}\Big\{\{i, (\mathbf{D}_i\,\psi)[\psi^{-1}(y)]\} \mid i\Big\}, \tag{710}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{T}_y[\psi(\mathbb{D})] = \mathsf{span}(e). \tag{711}$$

این هم ان حکم است.

برعکس، گیرم زیرخمینِها یی k بُعدی هستند که در هر نقطه مقدار ِ میدانها یِ برداری یِ e_i در آن نقطه بر یک ی از این زیرخمینِها مماس است. در این صورت به ازا یِ هر s و t تابع- ِ-مرکب ِ $\mathsf{fl}\{[\mathsf{fl}(s\,e_i)] \circ [\mathsf{fl}(t\,e_j)] \circ [\mathsf{fl}(-s\,e_i)]\}$ هر نقطه از هر یک از این زیرخمینِها را به یک نقطه یِ دیگر از هم ان زیرخمینه میبَرد. پس به ازا یِ هر s و t تابع ِ $\mathsf{fl}\{t\,[\mathsf{fl}(s\,e_i)]_*\,e_j\}$ (که هم ان تابع- ِ-مرکب ِ $\mathsf{fl}\{[\mathsf{fl}(s\,e_i)] \circ [\mathsf{fl}(t\,e_j)] \circ [\mathsf{fl}(-s\,e_i)]\}$ است) هر نقطه از هر یک از این زیرخمینِها را به یک نقطه یِ دیگر از هم ان زیرخمینه میبَرد. این نتیجه میدهد به ازا یِ هر s میدان ِ برداری یِ $\mathsf{fl}\{[\mathsf{fl}(s\,e_i)]_*\,e_j\}$ بر آن زیرخمینه مماس است. پس مشتق ِ این میدان نسبت به s هم چنین است، که نتیجه میدهد $(e_i \diamond e_j)$ بر آن زیرخمینه مماس است.

پس این قضیه ثابت شد:

متناظر با k میدان ِ برداری یِ خطی-مستقل، زیرخمینِها یی k بُعدی هستند که فضا یِ مماس ِشان در هر نقطه پهنه یِ این میدانها در آن نقطه است، و هر نقطه درون ِ یک ی از این زیرخمینِها ست؛ اگر و تنها اگر جابِجاگر ِ هر دُ-تا از آن میدانها یِ برداری در پهنه یِ این میدانها باشد.

این تعمیم ی از آن است که متناظر با هر میدان ِ برداری یک دسته خم (زیرخمینه ی ِ یک-بُعدی) هست که مماس بر آنها در هر نقطه مقدار ِ آن میدان ِ برداری در آن نقطه است، و از هر نقطه یک ی از آن خمها میگذرد. میگویند هر یک از این خمها یک خم- ِ-انتگرال ِ آن میدان ِ برداری ست. در مُرد ِ k میدان ِ برداری، میگویند هر یک از آن زیرخمینها ی ِ k بُعدی یک انتگرال ِ آن میدانها ست.

یک نتیجه ی ِ این قضیه این است که اگر همه ی ِ $(e_i \diamond e_j)$ ها در $\mathsf{span}(e)$ باشند، آنگاه برا ی ِ هر x در $\psi(\mathbb{D})$

$$\{[\mathsf{fl}(t\, e_i)](x)\} \in [\psi(\mathbb{D})]. \tag{712}$$

به این ترتیب، برا ی ِ هر x در $\psi(\mathbb{D})$

$$\left(\left\{ \bigcirc_{j=1}^{k} [\mathsf{fl}(Y^{\mathfrak{p}_j}\, e_{\mathfrak{p}_j})] \right\}(x)\right) \in [\psi(\mathbb{D})], \tag{713}$$

که $\mathfrak{p}$ یک جایگشت است. حکم ِ بالا یعنی اگر در $\psi(Y)$ ترتیب ِ شارشها عوض شود، نتیجه هر چند ممکن است $\psi(Y)$ نباشد در $\psi(\mathbb{D})$ هست.

مجموعه ی ِ $e = \{(i, e_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ که هر یک از e_i ها یک میدان ِ برداری ست و در هر x مجموعه ی ِ $e(x)$ خطی-مستقل است، در هر نقطه یک زیرفضا ی ِ k بُعدی از فضا ی ِ مماس میدهد، که $\mathsf{span}[e(x)]$ است. این زیرفضا در نقطه ی ِ x را با $\mathbb{V}(x)$ نشان میدهم. البته در هر نقطه ی ِ x میشود پایه ای جز $e(x)$ هم برا ی ِ $\mathbb{V}(x)$ گرفت. $e' = \{(i, e'_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ را چنان میگیرم که در هر نقطه ی ِ x مجموعه ی ِ $e'(x)$ یک پایه ی ِ $\mathbb{V}(x)$ باشد. این یعنی یک تابع ِ Λ هست که در هر x

$$[\Lambda(x)] \in \mathsf{LF}[\mathbb{V}(x); \mathbb{V}(x)], \tag{714}$$

$$e'_i(x) = [\Lambda(x)][e_i(x)], \tag{715}$$

و البته در هر x تابع- ِ-تغییر- ِ-پایه ی ِ $[\Lambda(x)]$ وارونپذیر است. رابطه ی ِ تغییر- ِ-پایه میشود

$$e'_i(x) = [\Lambda^j{}_i(x)][e_j(x)]. \tag{716}$$

از اینجا دیده میشود (با فرض ِ همواربودن ِ Λ) رابطه یِ (679)، یعنی این که جابِجاگر ِ هر دُ تا از e_i ها در هر x در $\mathbb{V}(x)$ است:

$$[(e_i \diamond e_j)(x)] \in [\mathbb{V}(x)], \tag{717}$$

نتیجه میدهد برا یِ هر (i,j,x)،

$$[(e'_i \diamond e'_j)(x)] \in [\mathbb{V}(x)], \tag{718}$$

و از وارونپذیر-بودن ِ $[\Lambda(x)]$ در هر x معلوم میشود عکس ِ این استنتاج هم درست است. یعنی اگر (718) برا یِ هر (i,j,x) درست باشد، (717) هم برا یِ هر (i,j,x) درست است، یا (679) هم برا یِ هر (i,j) درست است. ضمنَن رُشن است که

$$\begin{aligned}\mathsf{span}[e'(x)] &= \mathsf{span}[e(x)],\\ &= \mathbb{V}(x).\end{aligned} \tag{719}$$

به این ترتیب به جا یِ این گزاره که «جابِجاگر ِ هر دُ تا از e_i ها در هر x در پهنه یِ $e_i(x)$ ها ست، میشود این گزاره را به کار بُرد که «$\mathbb{V}$ تحت ِ جابِجاگر بسته است». یعنی هر دُ- میدان ِ برداری که در هر x مقدار ِشان در $\mathbb{V}(x)$ باشد، در هر x جابِجاگر ِشان هم در $\mathbb{V}(x)$ است.

$\{[x,\mathbb{V}(x)] \mid x\}$ یک تابع است که مقدار ِش در هر نقطه یک زیرفضا یِ k بُعدی یِ فضا یِ مماس در آن نقطه است. این تابع را با $\mathbb{V}$ نشان میدهم. در واقع $\mathbb{V}$ یک برش در $\mathsf{S}[(\mathrm{T})_k\mathbb{M}]$ است، که $(\mathrm{T})_k\mathbb{M}$ کلاف ی ست که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{M}$ است و تار َش در x مجموعه یِ زیرفضاها یِ k بُعدی یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. میگویم میدان ِ برداری یِ u در $\mathbb{V}$ است، اگر به ازا یِ هر x بردار ِ $u(x)$ در $\mathbb{V}(x)$ باشد. به این ترتیب بسته-بودن ِ $\mathbb{V}$ تحت ِ جابِجاگر یعنی

$$(u,v) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{V}) \quad\Rightarrow\quad (u \diamond v) \in \mathbb{V}. \tag{720}$$

این که $\mathbb{V}$ تحت ِ جابِجاگر بسته است، یعنی جابِجاگر ِ هر دُ-میدان ی که عضو ِ $\mathbb{V}$ باشند در $\mathbb{V}$ است. میگویم $\mathbb{V}$ انتگرالپذیر است، اگر زیرخمینِها یی k بُعدی وجود داشته باشند که هر نقطه در یک ی از این زیرخمینِها باشد و در هر x فضا یِ مماس بر زیرخمینه یِ شامل ِ x هم ان $\mathbb{V}(x)$ باشد. به این ترتیب یک بیان ِ بسته برا یِ قضیه ای که ثابت شد به دست میئاید:

قضیه یِ فْرُبِنیوس: برش ِ $\mathbb{V}$ که در $\mathrm{S}[(\mathrm{T}_k)\mathbb{M}]$ است (یعنی تابع ِ هموار ِ $\mathbb{V}$ که دامنه اَش خمینه یِ $\mathbb{M}$ و مقدار َش در هر x یک زیرفضا یِ k بُعدی یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است)، انتگرالپذیر است، اگر و تنها اگر تحت ِ جابِجاگر بسته باشد.

23 جبر ِ عملگرها I

$\mathbb{M}$ یک خمینه است و S یک میدان ِ تانسری یِ از نُع ِ (r,s) بر آن است. با این میدان یک عملگر ِ $\mathbf{m}(S)$ تعریف میشود که میدانها یِ نُع ِ (r',s') را به میدانها یِ نُع ِ $(r+r',s+s')$ تبدیل میکند:

$$\mathbf{m}(S) = S \otimes \bullet, \tag{721}$$

یا

$$[\mathbf{m}(S)]T = S \otimes T. \tag{722}$$

به $\mathbf{m}(S)$ ضربگر با S میگویم. از جمله دیده میشود اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$[\mathbf{m}(\Sigma)]T = \Sigma\, T. \tag{723}$$

رُشن است که $\mathbf{m}(S)$ نسبت به S خطی ست. همچنین، رُشن است که

$$\mathbf{m}(S_1\, S_2) = [\mathbf{m}(S_1)][\mathbf{m}(S_2)]. \tag{724}$$

به سادِگی دیده میشود اگر f یک تابع ِ وارونپذیر با دامنه یِ $\mathbb{M}$ باشد،

$$f_*[\mathbf{m}(S)] = [\mathbf{m}(f_*\, S)]f_*. \tag{725}$$

این رابطه وقت ی f شارش ِ یک میدان ِ برداری باشد هم درست است:

$$[\mathsf{fl}(t\,v)]_*[\mathbf{m}(S)] = \Big(\mathbf{m}\{[\mathsf{fl}(t\,v)]_*\, S\}\Big)[\mathsf{fl}(t\,v)]_*. \tag{726}$$

که با مشتقگیری از آن نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_v\,[\mathbf{m}(S)] = \mathbf{m}(\mathbf{L}_v\,S) + [\mathbf{m}(S)]\mathbf{L}_v, \tag{727}$$

یا

$$[\mathbf{L}_v, \mathbf{m}(S)] = \mathbf{m}(\mathbf{L}_v\,S). \tag{728}$$

از جمله اگر Σ یک میدانِ اسکالر باشد،

$$[\mathbf{L}_v, \mathbf{m}(\Sigma)] = \mathbf{m}(\mathbf{D}_v\,\Sigma), \tag{729}$$

از جمله اگر ϕ یک نقشه و e میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ باشد،

$$[\mathbf{L}_{e_j}, \mathbf{m}(\phi^i)] = \mathbf{m}(\delta^i_j). \tag{730}$$

3

جبر ِ برونی

24 جایگشت، ضرب ِ برونی

$\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی ست. تابع- ِ-جایگشت ِ متناظر با جایگشت ِ $\mathfrak{p}$ را با $\mathsf{Per}_{\mathfrak{p}}$ نشان میدهم. $\mathsf{Per}_{\mathfrak{p}}$ یک عضو ِ $\mathsf{LF}(\mathbb{V}^{\otimes k};\mathbb{V}^{\otimes k})$ است، که

$$\mathsf{Per}_{\mathfrak{p}}(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k})=[v_{i_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{\mathfrak{p}^{-1}(k)}}], \tag{731}$$

متقارنگر را با Sym نشان میدهم. Sym یک عضو ِ $\mathsf{LF}(\mathbb{V}^{\otimes k};\mathbb{V}^{\otimes k})$ است، که چنین تعریف میشود.

$$\mathsf{Sym}=\frac{1}{k!}\sum_{\mathfrak{p}}\mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}, \tag{732}$$

که جمع رو یِ همه یِ k جایگشتها ست.

تابع- ِ-جایگشت ِ علامتدار ِ متناظر با جایگشت ِ $\mathfrak{p}$ را با $\mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}$ نشان میدهم. $\mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}$ یک عضو ِ $\mathsf{LF}(\mathbb{V}^{\otimes k};\mathbb{V}^{\otimes k})$ است، که

$$\mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k})=\mathsf{sgn}_{\mathfrak{p}}[v_{i_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes v_{i_{\mathfrak{p}^{-1}(k)}}], \tag{733}$$

که $\mathsf{sgn}_{\mathfrak{p}}$ علامت ِ $\mathfrak{p}$ است: 1 است اگر $\mathfrak{p}$ زُج باشد، و (-1) است اگر $\mathfrak{p}$ فرد باشد. پادمتقارنگر را با

aSym نشان میدهم. aSym یک عضو ِ $\mathsf{LF}(\mathbb{V}^{\otimes k};\mathbb{V}^{\otimes k})$ است، که چنین تعریف میشود.

$$\mathsf{aSym} = \frac{1}{k!}\sum_{\mathfrak{p}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}, \tag{734}$$

که جمع رو ی ِ همه ی ِ k جایگشتها ست.

$\mathbb{V}$ یک فضا ی ِ خطی ست و v_1 تا v_k عضو ِ $\mathbb{V}$ اند. حاصل- ِ-ضرب ِ برونی (گُوِئی) را با $\wedge$ نشان میدهم. تعریف میکنم

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = (k!)\mathsf{aSym}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k). \tag{735}$$

همچنین، اگر S در $\mathsf{aSym}(\mathbb{V}^{\otimes k})$ و T در $\mathsf{aSym}(\mathbb{V}^{\otimes l})$ باشد، تعریف میکنم

$$S \wedge T = \frac{(k+l)!}{(k!)(l!)}\mathsf{aSym}(S \otimes T). \tag{736}$$

رُشن است که $\mathbb{V}$ هر فضا ی ِ خطی یی ممکن است باشد، از جمله ممکن است فضا ی ِ مماس یا هممماس بر یک خمینه باشد.

گیرم f در $\mathsf{DF}(\mathbb{M};\mathbb{M})$ است، و ω و σ میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل َند. دیده میشود f_* با پادمتقارنگر جابِجا میشود. از این، همراه با اثر ِ f_* بر $(\omega \otimes \sigma)$، نتیجه میشود

$$f_*\,(\omega \wedge \sigma) = (f_*\,\omega) \wedge (f_*\,\sigma). \tag{737}$$

از این هم نتیجه میشود، متناظر با میدان ِ برداری ی ِ v،

$$\mathbf{L}_v\,(\omega \wedge \sigma) = (\mathbf{L}_v\,\omega) \wedge \sigma + \omega \wedge (\mathbf{L}_v\,\sigma). \tag{738}$$

مشتق ِ لی نسبت به ضرب ِ برونی لَیبنیتسی ست.

25 کاهش ِ درونی

v یک بردار و σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل است. کاهش ِ درونی ی ِ σ با v را با $(\mathbf{i}_v\,\sigma)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{i}_v\,\sigma = \mathfrak{A}^{(1)}{}_{(2)}(v \otimes \sigma), \tag{739}$$

که یعنی

$$\mathbf{i}_v = \mathfrak{A}^{(1)}{}_{(2)}[\mathbf{m}(v)]. \tag{740}$$

دیده میشود اگر σ یک s فرم-ِ-دیفرانسیل باشد، $(\mathbf{i}_v\,\sigma)$ یک $(s-1)$ فرم-ِ-دیفرانسیل است. دیده میشود $(\mathbf{i}_v\,\sigma)$ نسبت به v و σ هر-دُ خطی ست. به سادِگی میشود تعریفِ (739) را به میدانها یِ s فرم-ِ-دیفرانسیل و میدانها یِ برداری هم تعمیم داد. دیده میشود اگر v یک میدانِ برداری و σ یک میدانِ s فرم-ِ-دیفرانسیل باشد، $(\mathbf{i}_v\,\sigma)$ نسبت به v و σ نقطِئی ست. از تعریفِ (739) دیده میشود

$$\mathbf{i}_v\,\sigma = (-1)^k\,\mathfrak{A}^{(1)}{}_{(k)}(v\otimes\sigma). \tag{741}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(\mathbf{i}_v\,\sigma)_{i_1\cdots} &= v^j\,\sigma_{j\,i_1\cdots},\\ &= -(-1)^k\,v^j\,\sigma_{i_1\cdots i_{k-1}\,j\,i_k\,i_{k+1}\cdots}.\end{aligned} \tag{742}$$

اگر σ یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{i}_v\,\sigma = \sigma(v). \tag{743}$$

همچنین، اگر $\{(i,e^i)\mid i\}$ یک پایه یِ فضا یِ همبردارها باشد،

$$\mathbf{i}_v(e^{i_1}\wedge\cdots) = -\sum_k(-1)^k\,v^{i_k}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{k-1}}\wedge e^{i_{k+1}}\wedge\cdots. \tag{744}$$

از این‌جا معلوم میشود اگر ω و σ فرم-ِ-دیفرانسیل باشند،

$$\mathbf{i}_v(\omega\wedge\sigma) = (\mathbf{i}_v\,\omega)\wedge\sigma + (-1)^{\mathsf{ty}(\omega)}\,\omega\wedge(\mathbf{i}_v\,\sigma). \tag{745}$$

این ویژِگی یِ لَیبنیتسی یِ کاهش-ِ-درونی ست. از جمله، اگر σ یک فرم-ِ-دیفرانسیل و ω یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{i}_v(\omega\wedge\sigma) + \omega\wedge\,\mathbf{i}_v\,\sigma = (\mathbf{i}_v\,\omega)\sigma. \tag{746}$$

از

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_m{}^n\, T]^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} = \sum_{i=1}^{s} \delta^l_m\, \delta^n_{k_i}\, T^{j_1\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_{i-1}\, l\, k_{i+1}\cdots k_s} - \sum_{i=1}^{r} \delta^{j_i}_m\, \delta^n_l\, T^{j_1\cdots j_{i-1}\, l\, j_{i+1}\cdots j_r}{}_{k_1\cdots k_s} \tag{587}$$

دیده میشود

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}_m{}^n\, \sigma]_{k_1\cdots k_s} = \sum_{i=1}^{s} \delta^l_m\, \delta^n_{k_i}\, \sigma_{k_1\cdots k_{i-1}\, l\, k_{i+1}\cdots k_s}. \tag{747}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(e^n \wedge \mathbf{i}_{e_m}\sigma)_{k_1\cdots k_s} &= -\sum_{i=1}^{s}(-1)^i\, \delta^n_{k_i}\, (\mathbf{i}_{e_m}\, \sigma)_{k_1\cdots k_{i-1}\, k_{i+1}\cdots k_s},\\ &= \sum_i \delta^n_{k_i}\, \delta^l_m\, \sigma_{k_1\cdots k_{i-1}\, l\, k_{i+1}\cdots k_s},\end{aligned} \tag{748}$$

که در برابری یِ آخر (742) به کار رفته. به این ترتیب، از (747) دیده میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_m{}^n\, \sigma = e^n \wedge \mathbf{i}_{e_m}\, \sigma, \tag{749}$$

یا متناظر با بردار ِ v و یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ω،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \omega, \sigma) = \omega \wedge \mathbf{i}_v\, \sigma, \tag{750}$$

که باز-شده اَش چنین است.

$$\omega_j\, v^i\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \sigma = \omega \wedge \mathbf{i}_v\, \sigma. \tag{751}$$

پس (746) میشود

$$\mathbf{i}_v(\omega \wedge \sigma) + \boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \omega, \sigma) = (\mathbf{i}_v\, \omega)\sigma, \tag{752}$$

یا بازتر،

$$\mathbf{i}_v(\omega \wedge \sigma) + \omega_j\, v^i\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \sigma = (\mathbf{i}_v\, \omega)\, \sigma. \tag{753}$$

سرانجام،

$$(\mathbf{i}_v)^2 = 0. \tag{754}$$

بر اساسِ این نتیجه، اگر σ کاهشِ درونی یِ یک τ با v باشد، کاهشِ درونی یِ σ با v صفر است. به سادگی دیده میشود عکسِ این هم درست است. یعنی اگر کاهشِ درونی یِ σ با v صفر باشد و v صفر نشود، یک τ هست که کاهشِ درونی یِ آن با v برابرِ σ است. کافی ست بگیرم

$$\tau = \frac{1}{\sigma_1(v)}\,\sigma_1 \wedge \sigma, \tag{755}$$

که σ_1 یک میدانِ دلبخاهِ یک-فرم-ِ-دیفرانسیل است، که اثرَش بر v صفر نمیشود.

از تعریفِ کاهشِ درونی دیده میشود متناظر با تابعِ f،

$$f_*\,\mathbf{i}_v\,\sigma = \mathbf{i}_{f_*\,v}\,f_*\,\sigma, \tag{756}$$

به شرطِ این که $(f_*\,v)$ و $(f_*\,\sigma)$ تعریف شده باشند. شکلِ بستِترِ این رابطه

$$f_*\,\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_{f_*\,v}\,f_* \tag{757}$$

است. با استفاده از حالتِ خاص ی که f شارشِ v است، نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_v\,\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_v. \tag{758}$$

همچنین، از تعریفِ $\mathbf{A}_v$ دیده میشود

$$\mathbf{A}_v\,\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_v\,\mathbf{A}_v. \tag{759}$$

یک شکلِ کلیتر برا یِ (758) چنین به دست میئاید. متناظر با میدانها یِ برداری یِ u و v و میدانِ فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ،

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v\,\sigma &= \mathbf{L}_u\,\mathfrak{C}^{(1)}{}_{(2)}(v\otimes\sigma),\\
&= \mathfrak{C}^{(1)}{}_{(2)}\,\mathbf{L}_u(v\otimes\sigma),\\
&= \mathfrak{C}^{(1)}{}_{(2)}[(\mathbf{L}_u\,v)\otimes\sigma + v\otimes(\mathbf{L}_u\,\sigma)],\\
&= \mathbf{i}_{\mathbf{L}_u\,v}\,\sigma + \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u\,\sigma,
\end{aligned} \tag{760}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v\,\sigma = \mathbf{i}_{u\,\diamond\,v}\,\sigma + \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u\,\sigma, \tag{761}$$

یا بستِتر،

$$\mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_{u\,\diamond\,v} + \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u. \tag{762}$$

رُشن است که این رابطه به ازا یِ $u = v$ هم ان (758) است. ضمنَن دیده میشود اگر u و v با هم جابِجا شوند، جمله یِ اول صفر میشود:

$$(u\,\diamond\,v = 0) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v = \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u). \tag{763}$$

تعریف ِ کاهش ِ درونی با یک بردار را میشود به کاهش ِ درونی با یک تانسر ِ پادوردا گسترش داد. σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل و T یک تانسر از نُع ِ $(r,0)$ است. تعریف میکنم

$$\mathbf{i}_T\,\sigma = \mathfrak{A}^{(1)}{}_{(2)}\cdots\mathfrak{A}^{(1)}{}_{(r+1)}(T\otimes\sigma), \tag{764}$$

که یعنی

$$\mathbf{i}_T = \mathfrak{A}^{(1)}{}_{(2)}\cdots\mathfrak{A}^{(1)}{}_{(r+1)}[\mathbf{m}(T)]. \tag{765}$$

دیده میشود اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، $(\mathbf{i}_T\,\sigma)$ یک $(s-r)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. اگر r بزرگتر از s باشد، $(\mathbf{i}_T\,\sigma)$ صفر است.

رُشن است که $(\mathbf{i}_T\,\sigma)$ نسبت به T و σ هر-دُ خطی ست. همچنین، دیده میشود اگر T_1 و T_2 تانسرها یی پادوردا باشند،

$$\mathbf{i}_{T_1\otimes T_2} = \mathbf{i}_{T_2}\,\mathbf{i}_{T_1}. \tag{766}$$

از جمله اگر v_1 تا v_r بردار باشند،

$$\mathbf{i}_{v_1\otimes\cdots\otimes v_r} = \mathbf{i}_{v_r}\cdots\mathbf{i}_{v_1}. \tag{767}$$

به سادِگی دیده میشود اگر T یک تانسر ِ پادوردا باشد،

$$\mathbf{i}_T = \mathbf{i}_{\mathsf{aSym}\,T}. \tag{768}$$

به این ترتیب، اگر T_1 از نُع ِ $(r_1,0)$ و T_2 از نُع ِ $(r_2,0)$ باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{T_2\otimes T_1} &= \frac{(r_1!)(r_2!)}{(r_1+r_2)!}\,\mathbf{i}_{T_2\wedge T_1},\\ &= (-1)^{r_1\,r_2}\,\frac{(r_1!)(r_2!)}{(r_1+r_2)!}\,\mathbf{i}_{T_1\wedge T_2},\\ &= (-1)^{r_1\,r_2}\,\mathbf{i}_{T_1\otimes T_2},\end{aligned} \tag{769}$$

که ضمنَن نتیجه میدهد

$$\mathbf{i}_{T_2}\,\mathbf{i}_{T_1} = (-1)^{r_1\,r_2}\,\mathbf{i}_{T_1}\,\mathbf{i}_{T_2}. \tag{770}$$

از جمله اگر v_1 و v_2 بردار باشند،

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_{v_1\otimes v_2} &= \frac{1}{2}\,\mathbf{i}_{v_1\wedge v_2},\\ &= -\mathbf{i}_{v_2\otimes v_1},\end{aligned} \tag{771}$$

و از آنجا،

$$\mathbf{i}_{v_2}\,\mathbf{i}_{v_1} = -\mathbf{i}_{v_1}\,\mathbf{i}_{v_2}. \tag{772}$$

این یک راه ِ دیگر برا یِ اثبات ِ (754) میدهد. البته در حالت ِ کلی $(\mathbf{i}_T)^2$ صفر نیست. از (770) دیده میشود اگر T از نُع ِ $(r,0)$ باشد،

$$[1-(-1)^{r^2}](\mathbf{i}_T)^2 = 0, \tag{773}$$

که نتیجه میدهد اگر r فرد باشد $(\mathbf{i}_T)^2$ صفر است.

از تعریف ِ $(\mathbf{i}_T\,\sigma)$ دیده میشود اگر T از نُع ِ $(r,0)$ و σ یک s فرم- ِ- دیفرانسیل باشد،

$$(\mathbf{i}_T\,\sigma)_{i_1\cdots i_{s-r}} = T^{j_1\cdots j_r}\,\sigma_{j_1\cdots j_r\,i_1\cdots i_{s-r}}, \tag{774}$$

که حالت ِ خاص َش هم ان (742) است.

سرانجام، از تعریف ِ کاهش- ِ-درونی دیده میشود متناظر با تابع ِ f،

$$f_*\,\mathbf{i}_T\,\sigma = \mathbf{i}_{f_*\,T}\,f_*\,\sigma, \tag{775}$$

به شرط ِ این که $(f_*\,T)$ و $(f_*\,\sigma)$ تعریف شده باشند. شکل ِ بستِتر ِ این رابطه

$$f_*\,\mathbf{i}_T = \mathbf{i}_{f_*\,T}\,f_* \tag{776}$$

است. اینها تعمیم ِ روابط ِ (756) و (757) اند.

26 مشتق ِ برونی

مشتق ِ برونی را تابع ی تعریف میکنم که یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل را به یک میدان ِ $(s+1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل تبدیل میکند. از تعریف ِ $\mathbf{d}_\phi$ (متناظر با نقشه ی ِ ϕ) شروع میکنم. متناظر با

$$\sigma = \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}(\mathbf{D}\,\phi^{i_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{i_s}), \tag{777}$$

تعریف میکنم

$$\mathbf{d}_\phi\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{i_0}\,\sigma_{i_1\cdots i_s})(\mathbf{D}\,\phi^{i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{i_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{i_s}). \tag{778}$$

نشان میدهم $\mathbf{d}_\phi$ مستقل از نقشه است. برا یِ این کار نقشه یِ ϕ' را میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{\phi'}\,\sigma &= \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{\imath'_0}\,\sigma_{\imath'_1\cdots\imath'_s})(\mathbf{D}\,\phi'^{\,i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_s}),\\
&= \frac{1}{s!}\,\{\mathbf{D}_{\imath'_0}[(\mathbf{D}_{\imath'_1}\,\phi^{j_1})\cdots(\mathbf{D}_{\imath'_s}\,\phi^{j_s})\sigma_{j_1\cdots j_s}]\}\\
&\quad (\mathbf{D}\,\phi'^{\,i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_s}),\\
&= \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{\imath'_1}\,\phi^{j_1})\cdots(\mathbf{D}_{\imath'_s}\,\phi^{j_s})(\mathbf{D}_{\imath'_0}\,\sigma_{j_1\cdots j_s})\\
&\quad (\mathbf{D}\,\phi'^{\,i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi'^{\,\imath_s}),\\
&= \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{\imath'_0}\,\sigma_{j_1\cdots j_s})(\mathbf{D}\,\phi'^{\,i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{j_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{j_s}),\\
&= \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{j_0}\,\sigma_{j_1\cdots j_s})(\mathbf{D}\,\phi^{j_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{j_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{j_s}),\\
&= \mathbf{d}_\phi\,\sigma.
\end{aligned}\tag{779}$$

در رسیدن به برابری یِ سوم از این استفاده شده که

$$(\mathbf{D}\,\phi^i)\wedge(\mathbf{D}\,\phi^j)\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j = 0.\tag{780}$$

پس $\mathbf{d}_\phi$ مستقل از نقشه است. $\mathbf{d}$ (تابع ِ مشتق- ِ-برونی) را هم ان $\mathbf{d}_\phi$ تعریف میکنم:

$$\mathbf{d}\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{i_0}\,\sigma_{i_1\cdots i_s})(\mathbf{D}\,\phi^{i_0})\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{i_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{D}\,\phi^{i_s}).\tag{781}$$

با استفاده یِ مستقیم از این تعریف، این ویژِگیها به سادِگی دیده میشوند. اگر σ و τ دُ فرم- ِ- دیفرانسیل با گونه یِ یکسان، و α و β دو اسکالر باشند،

$$\mathbf{d}(\alpha\,\sigma+\beta\,\tau) = \alpha\,\mathbf{d}\,\sigma+\beta\,\mathbf{d}\,\tau.\tag{782}$$

اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\mathbf{d}\,\Sigma = \mathbf{D}\,\Sigma.\tag{783}$$

اگر σ و τ فرم- ِ- دیفرانسیل باشند،

$$\mathbf{d}(\sigma\wedge\tau) = (\mathbf{d}\,\sigma)\wedge\tau+(-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\sigma\wedge(\mathbf{d}\,\tau).\tag{784}$$

این ویژگی یِ لَیبنیتسی یِ مشتق ِ برونی ست. سرانجام، با استفاده از تعریف ِ مشتق ِ برونی و (780) معلوم میشود

$$\mathbf{d}^2 = 0. \tag{785}$$

با استفاده از (783)، تعریف ِ (777) را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}(\mathbf{d}\,\phi^{i_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,\phi^{i_s}),\\ &= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},\end{aligned} \tag{786}$$

که e پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ است. همچنین،

$$\mathbf{d}\,\sigma = \frac{1}{s!}(\mathbf{d}\,\sigma_{i_1\cdots i_s})\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}, \tag{787}$$

$$(\mathbf{d}\,\sigma)_{i_0\cdots i_s} = \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\,\mathbf{D}_{i_k}\sigma_{i_0\cdots i_{k-1}\,i_{k+1}\cdots i_s}. \tag{788}$$

البته این روابط در پایِها یِ مختصاتی درست َند.

f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$، و σ در $\mathcal{A}^s(\mathbb{N})$ است. دیده میشود (بر حسب ِ یک پایه یِ مختصاتی)

$$f^*\,\sigma = \frac{1}{s!}\,\sigma_{a_1\cdots a_s}(\mathbf{D}_{i_1}\,f^{a_1})\cdots(\mathbf{D}_{i_s}\,f^{a_s})\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}, \tag{789}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,f^*\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\mathbf{D}_{i_0}\,\sigma_{a_1\cdots a_s})(\mathbf{D}_{i_1}\,f^{a_1})\cdots(\mathbf{D}_{i_s}\,f^{a_s})\,e^{i_0}\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}. \tag{790}$$

جملِها یِ شامل ِ مشتق ِ دوم ِ f^a ها صفر َند، چون مشتق ِ دوم تحت ِ جایِجا-کردن ِ شاخصها یِ مشتقگیری متقارن است. به این ترتیب، با استفاده از قاعده یِ زنجیرِئی یِ مشتقگیری دیده میشود

$$\mathbf{d}\,f^*\,\sigma = f^*\,\mathbf{d}\,\sigma. \tag{791}$$

این رابطه با استفاده از یک پایه یِ مختصاتی به دست آمد. اما دُ-طرف مستقل از پایه اند. پس این رابطه مستقل از پایه درست است. شکل ِ بسته اَش میشود

$$\mathbf{d}\,f^* = f^*\,\mathbf{d}. \tag{792}$$

پس برا یِ f ها یی که f_* تعریف-شدنی ست،

$$\mathbf{d}\, f_* = f_*\, \mathbf{d}, \tag{793}$$

و از آنجا با استفاده از تعریفِ مشتقِ لی،

$$\mathbf{d}\, \mathbf{L}_v = \mathbf{L}_v\, \mathbf{d}. \tag{794}$$

27 جبرِ عملگرها II

رابطه یِ

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\, T &= \Sigma\, \mathbf{L}_v\, T \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} T\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{D}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{r}\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{D}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}\}T,\end{aligned} \tag{562}$$

برا یِ s فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ، میدانِ برداری یِ v، و میدانِ اسکالرِ Σ میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\, \sigma &= \Sigma\, \mathbf{L}_v\, \sigma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} \sigma\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{D}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}\} \\ &= \Sigma\, \mathbf{L}_v\, \sigma + [(\mathbf{d}\,\Sigma)v]\sigma - [(\mathbf{d}\,\Sigma)v]\sigma \\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} \sigma\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{d}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}\}\end{aligned} \tag{795}$$

از

$$\mathbf{i}_v(e^{i_1}\wedge\cdots) = -\sum_k (-1)^k\, v^{i_k}\, e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{k-1}}\wedge e^{i_{k+1}}\wedge\cdots\,, \tag{744}$$

دیده میشود

$$\mathbf{i}_v[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] = [(\mathbf{d}\,\Sigma)v]\sigma - \sum_{i=1}^{s}\sigma\{\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes[v\otimes(\mathbf{d}\,\Sigma)]\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}\}. \tag{796}$$

به این ترتیب، با استفاده از

$$\mathbf{i}_v(\omega\wedge\sigma) = (\mathbf{i}_v\,\omega)\wedge\sigma + (-1)^{\mathsf{ty}(\omega)}\,\omega\wedge(\mathbf{i}_v\,\sigma), \tag{745}$$

معلوم میشود

$$\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,\sigma = \Sigma\,\mathbf{L}_v\,\sigma + (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\,\mathbf{i}_v\,\sigma. \tag{797}$$

از اینجا و با استفاده از نقطِئی-بودن ِ کاهش ِ درونی نسبت به میدانها و ویژِگی یِ لَیبنیتسی یِ مشتق ِ برونی،

$$\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,\sigma - \mathbf{i}_{\Sigma\,v}\,\mathbf{d}\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{\Sigma\,v}\,\sigma = \Sigma(\mathbf{L}_v\,\sigma - \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma). \tag{798}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}(\Sigma\,\sigma) + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v(\Sigma\,\sigma) &= \Sigma(\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma)\\ &\quad + \mathbf{i}_v[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] + (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\,\mathbf{i}_v\,\sigma,\\ &= \Sigma(\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma) + (\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\Sigma)\sigma,\\ &= \Sigma(\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma) + (\mathbf{L}_v\,\Sigma)\sigma,\end{aligned} \tag{799}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_v(\Sigma\,\sigma) - \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}(\Sigma\,\sigma) - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v(\Sigma\,\sigma) = \Sigma(\mathbf{L}_v\,\sigma - \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma). \tag{800}$$

تعریف میکنم

$$\mathfrak{A}(v,\sigma) = \mathbf{L}_v\,\sigma - \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma. \tag{801}$$

(798) یعنی $\mathfrak{A}(v,\sigma)$ نسبت به v نقطِئی ست. (800) هم یعنی $\mathfrak{A}(v,\sigma)$ نسبت به σ نقطِئی ست. ضمنَن به سادِگی دیده میشود اگر مئلفِها یِ v و σ در یک میدان-پایه یِ مختصاتی ثابت باشند $\mathfrak{A}(v,\sigma)$ صفر است. از این و نقطِئی-بودنِ $\mathfrak{A}$ معلوم میشود

$$\mathfrak{A}(v,\sigma)=0. \tag{802}$$

یعنی

$$\mathbf{L}_v\,\sigma=\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma+\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma, \tag{803}$$

یا بستِتر،

$$\mathbf{L}_v=\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}+\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v. \tag{804}$$

ترکیبِ این رابطه با این که $(\mathbf{i}_v)^2$ صفر است، راهِ دیگری برا یِ اثباتِ این است که $\mathbf{i}_v$ با $\mathbf{L}_v$ جابِجا میشود. (758) است. همچنین، ترکیبِ (804) با با این که $\mathbf{d}^2$ صفر است، راهِ دیگری برا یِ اثباتِ این است که $\mathbf{d}$ با $\mathbf{L}_v$ جابِجا میشود.

اگر σ یک فرم-ِ-دیفرانسیل، v یک بردار، و ω یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\omega_j\,v^i\,\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma=\omega\wedge\mathbf{i}_v\,\sigma. \tag{751}$$

$$\mathbf{i}_v(\omega\wedge\sigma)+\omega_j\,v^i\,\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma=(\mathbf{i}_v\,\omega)\sigma. \tag{753}$$

اینها یک راهِ دیگر برا یِ اثباتِ (803) میدهند. با $\mathbf{d}$ مثلِ یک یک-فرمِ دیفرانسیل رفتار میکنم. متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e و s فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\sigma&=\frac{1}{s!}\,e^i\wedge e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_s}(\mathbf{D}_i\,\sigma_{j_1\cdots j_s}),\\&=e^i\wedge(\mathbf{D}_i\,\sigma),\end{aligned} \tag{805}$$

که در برابری یِ اخیر (فقط وقت ی e مختصاتی ست)

$$\mathbf{D}_i\,\sigma=\frac{1}{s!}\,e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_s}(\mathbf{D}_i\,\sigma_{j_1\cdots j_s}), \tag{806}$$

یعنی

$$[\mathbf{D}_i, \mathbf{m}(e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_s})] = 0. \tag{807}$$

به این ترتیب با تعریفِ

$$\mathbf{D} = e^i\, \mathbf{D}_i, \tag{808}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\sigma = \mathbf{D} \wedge \sigma. \tag{809}$$

رُشن است که تعریفِ $\mathbf{D}$ را چنین هم میشود نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\mathbf{m}(e^i)]\mathbf{D}_i, \\ &= \mathbf{D}_i[\mathbf{m}(e^i)], \end{aligned} \tag{810}$$

که در آن (807) به کار رفته.

البته $\mathbf{D}$ یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ معمولی نیست. از جمله اثرَش بر حاصل-ِ-ضربِ دُ چیز لَیبنیتسی ست. اما وقت ی طرفِ راستِ $\mathbf{D}$ فقط یک میدانِ فرم-ِ-دیفرانسیل هست، رفتارِ $\mathbf{D}$ مثلِ یک-فرمها یِ معمولی ست. متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e،

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\mathbf{i}_v\,\sigma) &= \mathbf{D} \wedge (\mathbf{i}_v\,\sigma), \\ &= \mathbf{D}_j(e^j \wedge \mathbf{i}_v\,\sigma), \\ &= \mathbf{D}_j(v^i\, \boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma). \end{aligned} \tag{811}$$

در (751) و (753) ترتیبِ ω_j و v^i مهم نیست. اما در (811) این ترتیب مهم است: D_j هم بر v^i و هم بر σ اثر میکند. در واقع با توجه به این که مثلفِها یِ $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ ثابت َند، مانستِها یِ (751) و (753) میشوند

$$v^i\, \mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma) = v^i\, \mathbf{D} \wedge (\mathbf{i}_{e_i}\,\sigma), \tag{812}$$

$$\mathbf{i}_v(\mathbf{D}\wedge\sigma)+v^i\,\mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)=(\mathbf{i}_v\,\mathbf{D})\sigma,$$
$$=v^i\,\mathbf{D}_i\,\sigma, \tag{813}$$

یا

$$\mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)=\mathbf{D}\wedge(\mathbf{i}_{e_i}\,\sigma). \tag{814}$$
$$\mathbf{i}_{e_i}(\mathbf{D}\wedge\sigma)+\mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)=(\mathbf{i}_{e_i}\,\mathbf{D})\sigma,$$
$$=\mathbf{D}_i\,\sigma. \tag{815}$$

همچنین،

$$\mathbf{D}_j(v^i\,\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)=v^i\,\mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)+(\mathbf{D}_j\,v^i)(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma). \tag{816}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\sigma+\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\sigma=\mathbf{i}_v(\mathbf{D}\wedge\sigma)+\mathbf{D}_j(v^i\,\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma),$$
$$=\mathbf{i}_v(\mathbf{D}\wedge\sigma)+v^i\,\mathbf{D}_j(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma)+(\mathbf{D}_j\,v^i)(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma),$$
$$=(\mathbf{i}_v\,\mathbf{D})\sigma+(\mathbf{D}_j\,v^i)(\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\sigma),$$
$$=\mathbf{L}_v\,\sigma, \tag{817}$$

که هم ان (803) است.

$\{(i,e_i)\mid i\}$ و $\{(i,e^i)\mid i\}$ چنان َند که e_i ها میدان ِ برداری و e^i ها میدان ِ همبرداری یَند، و برا یِ هر (i,j)مقدار ِ $[e^i(e_j)]$ ثابت است. این مجموعِها لزومَن میدان-پایه نیستند، از جمله لازم نیست تعداد ِ اعضا یِشان بعد ِ خمینه باشد. دیده میشود

$$(\mathbf{d}\,e^i)(e_j,e_k)=(\mathbf{i}_{e_j}\,\mathbf{d}\,e^i)(e_k),$$
$$=(\mathbf{L}_{e_j}\,e^i-\mathbf{d}\,\mathbf{i}_{e_j}\,e^i)(e_k),$$
$$=(\mathbf{L}_{e_j}\,e^i)(e_k),$$

$$= \mathbf{L}_{e_j}[e^i(e_k)] - e^i(\mathbf{L}_{e_j}\, e_k),$$
$$= -e^i(\mathbf{L}_{e_j}\, e_k), \tag{818}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}\, e^i)(e_j, e_k) + e^i(e_j \diamond e_k) = 0. \tag{819}$$

کلیتر، متناظر با میدانها یِ برداری یِ u و v و میدانِ فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ،

$$\mathbf{i}_v\, \mathbf{i}_u\, \mathbf{d}\, \sigma = \mathbf{i}_v\, \mathbf{L}_u\, \sigma - \mathbf{i}_v\, \mathbf{d}\, \mathbf{i}_u\, \sigma,$$
$$= \mathbf{L}_u\, \mathbf{i}_v\, \sigma - \mathbf{i}_{u \diamond v}\, \sigma - \mathbf{L}_v\, \mathbf{i}_u\, \sigma + \mathbf{d}\, \mathbf{i}_v\, \mathbf{i}_u\, \sigma, \tag{820}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{i}_v\, \mathbf{i}_u\, \mathbf{d}\, \sigma + \mathbf{i}_{u \diamond v}\, \sigma = \mathbf{L}_u\, \mathbf{i}_v\, \sigma - \mathbf{L}_v\, \mathbf{i}_u\, \sigma - \mathbf{d}\, \mathbf{i}_v\, \mathbf{i}_u\, \sigma. \tag{821}$$

اگر σ یک-فرم باشد، جمله یِ آخر صفر است و رابطه را میشود چنین نوشت.

$$(\mathbf{d}\, \sigma)(u, v) + \sigma(u \diamond v) = \mathbf{L}_u[\sigma(v)] - \mathbf{L}_v[\sigma(u)]. \tag{822}$$

اگر علاوه بر این $\sigma(u)$ و $\sigma(v)$ ثابت باشند،

$$(\mathbf{d}\, \sigma)(u, v) + \sigma(u \diamond v) = 0, \tag{823}$$

که هم ان (819) است.

میگویند یک فرم-ِ-دیفرانسیل بسته است، اگر مشتقِ برونی یِ آن فرم صفر باشد. میگویند یک فرم-ِ-دیفرانسیل دقیق است، اگر آن فرم مشتقِ یک فرم-ِ-دیفرانسیل باشد. از (785) دیده میشود هر فرم-ِ-دیفرانسیلِ دقیق ی بسته است. عکسِ این گزاره هم مُضعَن درست است. یعنی اگر فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ (که صفر-فرم-ِ-دیفرانسیل نیست) بسته باشد، مُضعَن یک فرم-ِ-دیفرانسیلِ τ هست که

$$\sigma = \mathbf{d}\, \tau. \tag{824}$$

برا یِ اثبات، تعریف میکنم

$$\tau(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{d}t\, \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\} \mathbf{i}_{v_g(t,\boldsymbol{\cdot})}\, \sigma, \tag{825}$$

که v_g مثل ِ

$$v_g[t, g(t,x)] = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, g](t,x) \tag{487}$$

تعریف شده. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}[\tau(\varepsilon)] &= \int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{d}t\, \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\} \mathbf{d}\, \mathbf{i}_{v_g(t,\boldsymbol{\cdot})}\, \sigma, \\
&= \int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{d}t\, \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\} \mathbf{L}_{v_g(t,\boldsymbol{\cdot})}\, \sigma, \\
&= \int_{\varepsilon}^{1} \mathrm{d}t\, \Big(\{\mathbf{D}[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g]\}(t)\Big)\sigma, \\
&= \Big(\{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](1)\} - \{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](\varepsilon)\}\Big)\sigma.
\end{aligned} \tag{826}$$

$g(t,\boldsymbol{\cdot})$ را چنان میگیرم که

$$g(1,\boldsymbol{\cdot}) = \mathbf{1}, \tag{827}$$

$$\lim_{t\to 0^+} g(t,x) = x_0, \tag{828}$$

که x_0 یک نقطه یِ ثابت است. دیده میشود اگر g ویژِگی یِ (828) را براورَد،

$$\lim_{t\to 0^+} \Big(\{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](t)\}\, \sigma\Big) = 0. \tag{829}$$

همچنین، اگر g ویژِگی یِ (827) را براورَد،

$$\{[\overset{0}{\mathsf{pb}}_{(1)}\, g](1)\} = \mathbf{1}. \tag{830}$$

به این ترتیب، اگر g ویژِگیها یِ (827) و (828) را براورَد

$$\mathbf{d}\left[\lim_{\varepsilon\to 0^+} \tau(\varepsilon)\right] = \sigma. \tag{831}$$

چنین g یی را مُضعَن میشود ساخت. مثلَن در یک همسایِگی یِ x_0 که تصویرِ آن تحتِ نقشه یِ ϕ یک گوی است،

$$g(t,x) = \phi^{-1}\{\phi(x_0) + t[\phi(x) - \phi(x_0)]\} \tag{832}$$

ویژِگیها یِ (827) و (828) را دارد. با این g، و با شکلِ σ بر حسبِ پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ، دیده میشود اگر σ دقیق باشد τ با

$$\tau_{i_1\cdots i_{s-1}}(x) = \int_0^1 \mathrm{d}t\, t^{s-1}\, [\phi - \phi(x_0)]^{i_0}\, \sigma_{i_0\, i_1\cdots i_{s-1}}[g(t,x)] \tag{833}$$

رابطه یِ (824) را بر میئاورَد.

رُشن است که یک صفر-فرم-ِ-دیفرانسیل نمیتواند دقیق باشد (چون منفی-یِ-یک-فرم-ِ-دیفرانسیل وجود ندارد)، اما میتواند بسته باشد. یک صفر-فرم-ِ-دیفرانسیل بسته است، اگر و تنها اگر مقدارَش ثابت باشد، یعنی مشتقَش صفر باشد.

متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e، دیده میشود s فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ بسته است اگر و تنها اگر

$$\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\, \mathbf{D}_{i_k}\, \sigma_{i_1\cdots i_{k-1}\, i_0\, i_{k+1}\cdots i_s} = 0, \tag{834}$$

که اگر σ یک-فرم باشد یعنی

$$\mathbf{D}_i\, \sigma_j - \mathbf{D}_j\, \sigma_i = 0. \tag{835}$$

همچنین، s فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ دقیق است اگر و تنها اگر یک $(s-1)$ فرم-ِ-دیفرانسیلِ τ باشد که

$$\sigma_{i_0\cdots i_{s-1}} = \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\, \mathbf{D}_{i_k}\, \tau_{i_1\cdots i_{k-1}\, i_0\, i_{k+1}\cdots i_{s-1}}, \tag{836}$$

که اگر σ یک-فرم باشد یعنی یک میدانِ اسکالرِ Σ باشد چنان که

$$\sigma_i = \mathbf{D}_i\, \Sigma. \tag{837}$$

$e^* = \{(i, e^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ است، که مقدارَش در هر نقطه یک پایه یِ فضا یِ هممماس در آن نقطه است. گیرم مشتقِ برونی یِ همه یِ e^i ها صفر است. در این صورت مُضعَن تابعها یِ ϕ^i ی هستند که

$$e^i = \mathbf{d}\, \phi^i. \tag{838}$$

ϕ را تابع ی تعریف میکنم که مئلفِها یَش ϕ^i ها یَند. چون $\{(i, \mathbf{d}\,\phi^i) \mid i\}$ خطی-مستقل است، مشتق ِ ϕ ناتکین است و در نتیجه ϕ مُضعَن یک-به-یک است. پس ϕ یک نقشه است. میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با این نقشه را با $e = \{(i, e_i) \mid i\}$ نمایش میدهم. رُشن است که e^* دُگان ِ e است. برعکس، رُشن است که اگر e^* یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد، مشتق ِ برونی یِ e^i ها صفر است. پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که میدان-پایه یِ e^* مختصاتی باشد این است که مشتق ِ برونی یِ e^i ها صفر باشد.

28 قضیه یِ فْرُبِنیوس II

قضیه یِ فْرُبِنیوس این بود که برش ِ $\mathbb{V}$ که در $\mathsf{S}[(\mathrm{T}_k)\mathbb{M}]$ است انتگرالپذیر است، اگر و تنها اگر تحت ِ جابِجاگر بسته باشد. این قضیه را میشود به زبان ِ فرم- ِ-دیفرانسیلها هم بیان کرد. متناظر با میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ بر خمینه یِ $\mathbb{M}$، تعریف میکنم

$$\mathfrak{N}^{(r)}(\sigma) = \{T \in \mathsf{S}[\mathrm{T}^{(r,0)}\mathbb{M}] \mid \mathbf{i}_T\,\sigma = 0\}. \tag{839}$$

$\mathfrak{N}(\sigma)$ را r-هستک ِ σ مینامم. رُشن است که $\mathfrak{N}^{(r)}(\sigma)$ یک فضا یِ خطی ست. در واقع $\mathfrak{N}^{(r)}(\sigma)$ مجموعه یِ همه یِ میدانها یِ تانسری یِ نُع- ِ-$(r,0)$ ی ست که σ در هسته یِ کاهش ِ درونی با آنها ست:

$$\mathfrak{N}^{(r)}(\sigma) = \{T \in \mathsf{S}[\mathrm{T}^{(r,0)}\mathbb{M}] \mid \sigma \in [\mathsf{ker}(\mathbf{i}_T)]\}. \tag{840}$$

متناظر با میدانها یِ برداری یِ u و v، از

$$\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{i}_{u\,\diamond\,v}\,\sigma = \mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v\,\sigma - \mathbf{L}_v\,\mathbf{i}_u\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\sigma \tag{821}$$

دیده میشود

$$\Big((u,v) \in \{[\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)] \times [\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)]\}\Big) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{i}_{u\,\diamond\,v}\,\sigma = 0. \tag{841}$$

به این ترتیب دیده میشود اگر (u,v) در $\{[\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)] \times [\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)]\}$ باشد،

$$\{(u \diamond v) \in [\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)]\} \quad \Leftrightarrow \quad \{(u \otimes v) \in [\mathfrak{N}^{(2)}(\mathbf{d}\,\sigma)]\}. \tag{842}$$

یعنی $(u \diamond v)$ در 1-هستَک ِ σ است، اگر و تنها اگر $(u \otimes v)$ در 2-هستَک ِ $(\mathbf{d}\,\sigma)$ باشد. این یک بیان ِ دیگر برا یِ قضیه یِ فْرُبِنیوس است:

متناظر با میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ، برش ِ $\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)$ انتگرالپذیر است اگر و تنها اگر

$$\{[\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)] \otimes [\mathfrak{N}^{(1)}(\sigma)]\} \in [\mathfrak{N}^{(2)}(\mathbf{d}\,\sigma)]. \tag{843}$$

$\mathbb{V}$ در $\{\mathsf{S}[(\mathrm{T}_k)\mathbb{M}]\}$ است. $\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbb{V}^{\mathrm{ct}} = \{\sigma \in [\mathsf{S}(\mathrm{T}^*\mathbb{M})] \mid (\forall\, u \in \mathbb{V}) \ : \ \sigma(u) = 0\}. \tag{844}$$

$\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}$ مجموعه یِ همه یِ یک-فرم- ِ-دیفرانسیلها یی ست که اثر ِشان بر همه یِ اعضا یِ $\mathbb{V}$ صفر است. دیده میشود وقت ی بُعد ِ $\mathbb{V}(x)$ در هر x برابر ِ k است، بُعد ِ $\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}(x)$ در هر x برابر ِ $(m-k)$ است، که m بُعد ِ خمینه است. در واقع $\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}$ یک برش در $\mathsf{S}[(\mathrm{T}^*_{m-k})\mathbb{M}]$ است، که $(\mathrm{T}^*_k)\mathbb{M}$ کلاف ی ست که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{M}$ است و تار َش در x مجموعه یِ زیرفضاها یِ k بُعدی یِ $\mathrm{T}^*_x\mathbb{M}$ است، و اگر $\{[i, e_i(x)] \mid 1 \le i \le m\}$ یک پایه یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و $\{[i, e_i(x)] \mid 1 \le i \le k\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}(x)$ باشد، و $\{[i, e_i(x)] \mid 1 \le i \le m\}$ پایه یِ دُگان ِ $\{[i, e^i(x)] \mid 1 \le i \le m\}$ باشد، آنگاه

$$\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}(x) = \mathsf{span}\{[i, e^i(x)] \mid k+1 \le i \le m\}. \tag{845}$$

رُشن است که

$$\{v \mid (\forall\, \sigma \in \mathbb{V}^{\mathrm{ct}}) \ : \ \sigma(v) = 0\} = \mathbb{V}. \tag{846}$$

همچنین، از (821) دیده میشود

$$(u, v, \sigma) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}^{\mathrm{ct}}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{i}_v\, \mathbf{i}_u\, \mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{i}_{u \diamond v}\, \sigma = 0, \tag{847}$$

یا

$$(u, v, \sigma) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}^{\mathrm{ct}}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{d}\,\sigma)(u, v) + \sigma(u \diamond v) = 0. \tag{848}$$

شرط ِ لازم و کافی برا یِ انتگرالپذیری یِ $\mathbb{V}$ این است که

$$(u, v) \in (\mathbb{V} \times \mathbb{V}) \quad \Rightarrow \quad (u \diamond v) \in \mathbb{V}. \tag{720}$$

به این ترتیب شرط ِ لازم و کافی برا یِ انتگرالپذیری یِ $\mathbb{V}$ میشود

$$(u,v,\sigma)\in(\mathbb{V}\times\mathbb{V}\times\mathbb{V}^{\rm ct})\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{d}\,\sigma)(u,v)=0, \tag{849}$$

یا

$$(\forall\,\sigma\in\mathbb{V}^{\rm ct})\ :\ [(i<k,j<k)\quad\Rightarrow\quad(\mathbf{d}\,\sigma)_{i\,j}=0], \tag{850}$$

که میدان-پایه یِ e به کار رفته که چنان است که در هر x مجموعه یِ $\{[i,e_i(x)]\mid 1\le i\le k\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}(x)$ است. به این ترتیب، شرط ِ لازم و کافی برا یِ انتگرالپذیری یِ $\mathbb{V}$ میشود

$$\sigma\in\mathbb{V}^{\rm ct}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{d}\,\sigma=\sum_{j=k+1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{d}\,\sigma)_{i\,j}\,e^i+\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{m}(\mathbf{d}\,\sigma)_{i\,j}\,e^i\right]\wedge e^j, \tag{851}$$

یا

$$\sigma\in\mathbb{V}^{\rm ct}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{d}\,\sigma=\sum_{j=k+1}^{m}\mathfrak{o}_j\wedge e^j, \tag{852}$$

که

$$\mathfrak{o}_j=\sum_{i=1}^{k}(\mathbf{d}\,\sigma)_{i\,j}\,e^i+\frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{m}(\mathbf{d}\,\sigma)_{i\,j}\,e^i. \tag{853}$$

میشود شرط ِ انتگرالپذیری یِ $\mathbb{V}$ را بر حسب ِ میدان-پایه یِ e نوشت. شرط ِ لازم و کافی برا یِ انتگرالپذیری یِ $\mathbb{V}$ این است که $\mathfrak{o}^i{}_j$ ها یی باشند که

$$\mathbf{d}\,e^i=\sum_{j=k+1}^{m}\mathfrak{o}^i{}_j\wedge e^j,\quad k+1\le i\le m. \tag{854}$$

به این ترتیب یک بیان ِ دیگر برا یِ قضیه یِ فْرُبِنیوس به دست میئاید:

$\mathbb{V}$ که در $\mathsf{S}[(\mathrm{T}_k)\mathbb{M}]$ است انتگرالپذیر است، اگر و تنها اگر برا یِ هر σ در $\mathbb{V}^{\rm ct}$ یک-فرمها یِ $\mathfrak{o}_j$ ی باشند که

$$\mathbf{d}\,\sigma=\sum_{j=k+1}^{m}\mathfrak{o}_j\wedge e^j, \tag{855}$$

که m بُعد ِ خمینه است و $\{(i,e^i)\mid k+1\le i\le m\}$ یک میدان-پایه یِ $\mathbb{V}^{\rm ct}$ است.

یک حالت ِ خاص ِ قضیه یِ فْرُبِنیوس زمان ی ست که k برابر ِ $(m-1)$ است، یعنی از بُعد ِ خمینه یک ی کمتر است. در این حالت یک میدان- ِ-یک-فرم ِ σ هست که در هر x

$$\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}(x) = \mathsf{span}\{\sigma(x)\}. \tag{856}$$

البته میشود به جا یِ σ حاصل- ِ-ضرب ِ هر میدان ِ اسکالر ی که صفر نمیشود در σ را هم به کار برد. میخاهم نشان دهم σ (مُضعَن) یک ضریب ِ دقیق-ساز دارد، یعنی یک میدان ِ اسکالر ِ ناصفر ِ f و یک میدان ِ اسکالر ِ Σ هست که (مُضعَن)

$$f\,\sigma = \mathbf{d}\,\Sigma, \tag{857}$$

یا همئرز با آن

$$\mathbf{d}(f\,\sigma) = 0. \tag{858}$$

قضیه: یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ (مُضعَن) ضریب ِ دقیق-ساز دارد، اگر و تنها اگر

$$\mathbf{d}\,\sigma = \mathfrak{o} \wedge \sigma, \tag{859}$$

که $\mathfrak{o}$ یک یک-فرم ِ دیفرانسیل است.

اثبات ِ یک طرف بسیار ساده است. اگر (857) برقرار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\sigma &= \mathbf{d}\left(\frac{1}{f}\mathbf{d}\,\Sigma\right),\\ &= \left[\mathbf{d}\left(\frac{1}{f}\right)\right] \wedge (\mathbf{d}\,\Sigma),\end{aligned} \tag{860}$$

که نشان میدهد (859) با

$$\mathfrak{o} = \frac{1}{f}\mathbf{d}\left(\frac{1}{f}\right) \tag{861}$$

برقرار است. برا یِ اثبات ِ طرف ِ دیگر، فرض میکنم (859) برقرار است. $\mathbb{V}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbb{V} = \{u \in [\mathsf{S}(\mathrm{T}\mathbb{M})] \mid \sigma(u) = 0\}, \tag{862}$$

که $\mathbb{M}$ خمینه ای ست که σ بر آن تعریف شده. دیده میشود $\mathbb{V}$ در $\mathsf{S}[(\mathrm{T}_{m-1})\mathbb{M}]$ است (که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است) و البته (856) هم برقرار است. از (859) نتیجه میشود $\mathbb{V}$ تحت ِ جابِجاگر بسته است. میدانها یِ برداری یِ e_1 تا e_{m-1} را چنان میگیرم که در هر x مجموعه یِ $\{[i, e_i(x)] \mid 1 \le i \le m-1\}$ یک پایه یِ $\mathbb{V}(x)$ باشد. میدان ِ برداری یِ e_m را هم چنان میگیرم که $\{(i, e_i) \mid 1 \le i \le m\}$ یک

میدان-پایه یِ $\mathbb{M}$ باشد. متناظر با x_0 در $\mathbb{M}$، تابع ِ ψ از یک همسایگی یِ شامل- ِ-صفر ِ $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\psi(Y) = \left\{ \bigcirc_{j=1}^{m} [\mathsf{fl}(Y^j\, e_j)] \right\}(x_0). \tag{863}$$

چون $\{(i, e_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ یک میدان-پایه است، $(\mathbf{D}\,\psi)$ در صفر ناتکین است. به این ترتیب از قضیه یِ رتبه معلوم میشود تصویر ِ ψ یک زیرمجموعه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ است. ψ وارونپذیر است و خُد َش و وارون َش مشتقپذیر ند. به این ترتیب ψ^{-1} یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ است. تعریف میکنم

$$\Sigma(x) = [\psi^{-1}(x)]^m. \tag{864}$$

این یعنی

$$\Sigma[\psi(Y)] = Y^m. \tag{865}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \delta_i^m &= \frac{\partial\{\Sigma[\psi(Y)]\}}{\partial\, Y^i}, \\ &= \{(\mathbf{D}\,\Sigma)[\psi(Y)]\}[(\mathbf{D}_i\,\psi)(Y)]. \end{aligned} \tag{866}$$

از (863) دیده میشود

$$\psi(Y) = \left\{ \bigcirc_{j=1}^{m-1} [\mathsf{fl}(Y^j\, e_j)] \right\}\{[\mathsf{fl}(Y^m e_m)](x_0)\}. \tag{867}$$

از این که $\mathbb{V}$ تحت ِ جابِجاگر بسته است نتیجه میشود

$$[(\mathbf{D}_i\,\psi)(Y)] \in \{\mathbb{V}[\psi(Y)]\}, \quad 1 \leq i \leq m-1, \tag{868}$$

و نیز

$$\{e_i[\psi(Y)]\} \in \mathsf{span}\{[j, (\mathbf{D}_j\,\psi)(Y)] \mid 1 \leq j \leq m-1\}, \quad 1 \leq i \leq m-1. \tag{869}$$

به این ترتیب،

$$\{(\mathbf{D}\,\Sigma)[\psi(Y)]\}\{e_i[\psi(Y)]\} = 0, \quad 1 \leq i \leq m-1, \tag{870}$$

یا سادِتر،

$$[(\mathbf{D}\,\Sigma)(x)][e_i(x)] = 0, \quad 1 \le i \le m-1, \tag{871}$$

که یعنی

$$[(\mathbf{D}\,\Sigma)(x)] \in [\mathbb{V}^{\mathrm{ct}}(x)]. \tag{872}$$

این یعنی در هر x یک عدد هست که $[(\mathbf{D}\,\Sigma)(x)]$ برابر ِ آن عدد ضرب در $[\sigma(x)]$ است، که این هم ان (857) است.

این قضیه را میشود به شکل ِ دیگر ی بیان کرد که شامل ِ یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ $\mathfrak{o}$ در رابطه یِ (859) نباشد، یعنی فقط بر حسب ِ یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ باشد. به سادِگی دیده میشود متناظر با یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ (که صفر نمیشود)، اگر (859) برقرار باشد آنگاه

$$(\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma = 0. \tag{873}$$

بر عکس، گیرم (873) برقرار باشد. $\mathbb{V}$ را با (862) تعریف میکنم. u را در $\mathbb{V}$ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{i}_u[(\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma], \\ &= (\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma + (\mathbf{d}\,\sigma)(\mathbf{i}_u\,\sigma), \\ &= (\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma. \end{aligned} \tag{874}$$

v را هم در $\mathbb{V}$ میگیرم. به هم ین ترتیب نتیجه میشود

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u[(\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma], \\ &= \mathbf{i}_v[(\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma) \wedge \sigma], \\ &= (\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma)\sigma - (\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma)(\mathbf{i}_v\,\sigma), \\ &= (\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma)\sigma. \end{aligned} \tag{875}$$

پس چون σ صفر نمیشود،

$$\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\sigma = 0. \tag{876}$$

اما این که این رابطه برا یِ همه یِ (u,v) ها در $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ برقرار باشد همئرز با این است که یک یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ $\mathfrak{o}$ هست که (859) برقرار است. پس از (873) هم (859) نتیجه میشود. به این ترتیب یک بیانِ همئرزِ قضیه چنین است.

قضیه: یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ (مُضعَن) ضریبِ دقیق-ساز دارد، اگر و تنها اگر

$$(\mathbf{d}\,\sigma)\wedge\sigma=0. \tag{873}$$

رابطِها یِ همئرزِ (859) و (873) برا یِ یک-فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ، این را نتیجه میدهند که میدانها یِ اسکالرِ Σ و f ی هستند که

$$\sigma=\frac{1}{f}\,\mathbf{d}\,\Sigma. \tag{877}$$

از این نتیجه میشود برا یِ $\mathfrak{o}$ در (859)،

$$\left[\mathfrak{o}-\frac{1}{f}\,\mathbf{d}\left(\frac{1}{f}\right)\right]\wedge\sigma=0. \tag{878}$$

البته $\mathfrak{o}$ در (859) به طُرِ یکتا مشخص نمیشود: به آن میشود هر مضرب ی از σ را افزود. از (878) دیده میشود

$$\mathfrak{o}=\frac{1}{f}\,\mathbf{d}\left(\frac{1}{f}\right)+\mathfrak{s}\,\sigma, \tag{879}$$

که میدانِ اسکالرِ $\mathfrak{s}$ دلبخاه است. از جمله $\mathfrak{o}$ را میشود به شکلِ (861) گرفت.

رُشن است که حالتِ خاصِ (859) یا (873) آن است که $(\mathbf{d}\,\sigma)$ صفر باشد، یعنی σ بسته باشد. همچنین، رُشن است که حالتِ خاصِ این که σ ضریبِ دقیق-ساز دارد این است که σ دقیق است. متناظر با میدان-پایه یِ e، رابطِها یِ (859) و (873) و (857) به ترتیب میشوند

$$0=(\mathbf{D}_i\,\sigma_j-\mathfrak{o}_i\,\sigma_j)-(\mathbf{D}_j\,\sigma_i-\mathfrak{o}_j\,\sigma_i). \tag{880}$$

$$0=(\mathbf{D}_i\,\sigma_j-\mathbf{D}_j\,\sigma_i)\sigma_k+(\mathbf{D}_j\,\sigma_k-\mathbf{D}_k\,\sigma_j)\sigma_i+(\mathbf{D}_k\,\sigma_i-\mathbf{D}_i\,\sigma_k)\sigma_j. \tag{881}$$

$$\mathbf{D}_i\,\Sigma=f\,\sigma_i. \tag{882}$$

از حالتها یِ خاصِ اینها میشود

$$\mathbf{D}_i\,\sigma_j-\mathbf{D}_j\,\sigma_i=0. \tag{835}$$

$$\sigma_i=\mathbf{D}_i\,\Sigma. \tag{837}$$

سرانجام، اگر خمینه دُ-بُعدی باشد (873) حتمَن درست است، چون طرف ِ چپ ِ آن سه-فرم-ِ-دیفرانسیل است. پس در هر خمینه یِ دُ-بُعدی هر یک-فرم-ِ-دیفرانسیل ضریب ِ دقیق-ساز دارد. همئرز با این، هر یک-فرم-ِ-دیفرانسیل که یک ترکیب ِ خطی از دیفرانسیل ِ دُ متغیر باشد با ضرایب ی که تابع ِ هم ان دُ-متغیر َند، ضریب ِ دقیق-ساز دارد.

29 انتگرالگیری

$\mathbb{L}$ یک زیرمجموعه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{R}^m$ است. τ یک m فرم-ِ-دیفرانسیل با دامنه یِ $\mathbb{L}$ است که

$$\tau = \Sigma(\mathbf{d}\,X^0)\wedge\cdots(\mathbf{d}\,X^{m-1}). \tag{883}$$

X^0 تا X^{m-1} مئلفِها یِ X اند که X در $\mathbb{R}^n$ است، و Σ یک میدان ِ اسکالر است. انتگرال ِ بر $\mathbb{L}$ را یک تابع ِ خطی (با ضریبها یِ اسکالر) تعریف میکنم که بر m فرم-ِ-دیفرانسیلها اثر میکند، چنان که

$$\int_{\mathbb{L}}\tau = \int_{\mathbb{L}}\mathrm{d}X^0\cdots\mathrm{d}X^{m-1}\,\Sigma(X). \tag{884}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی و σ یک m فرم-ِ-دیفرانسیل است. ϕ نقشه ای ست که بیرون ِ دامنه اَش σ صفر است. تعریف میکنم

$$\int_{\mathbb{M},\phi}\sigma := \int_{\mathsf{img}(\phi)}(\phi^{-1})^*\,\sigma, \tag{885}$$

یا بر حسب ِ مختصات،

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M},\phi}\sigma &= \int_{\mathsf{img}(\phi)}\frac{1}{m!}\,\sigma_{i_0\cdots i_{m-1}}[(\phi)^{-1}(X)](\mathbf{d}\,X^{i_0})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,X^{i_{m-1}}),\\ &= \int_{\mathsf{img}(\phi)}\mathrm{d}X^0\cdots\mathrm{d}X^{m-1}\,\sigma_{0\cdots m-1}[(\phi)^{-1}(X)].\end{aligned} \tag{886}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست که یک اتلس ِ $\mathbb{A}=\{\phi_a\mid a\}$ و یک پارش-ِ-یک ِ $\mathbb{P}=\{p_a\mid a\}$ متناظر با $\mathbb{A}$ دارد. m فرم-ِ-دیفرانسیل ِ σ را (که لزومَن بیرون ِ دامنه یِ یک نقشه صفر نیست) میشود چنین نوشت.

$$\sigma = \sum_a p_a\,\sigma. \tag{887}$$

از اینجا تعریف میکنم

$$\int_{\mathbb{M},\mathbb{P}} \sigma = \sum_a \int_{\mathbb{M},\phi_a} p_a\,\sigma, \tag{888}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{\mathbb{M},\mathbb{P}} \sigma = \sum_a \int_{\mathsf{img}(\phi_a)} [(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,\sigma). \tag{889}$$

در حالت ِ کلی طرف ِ راست به پارش بستِگی دارد. نشان میدهم اگر $\mathbb{P}' = \{p'_a \mid a\}$ یک پارش- ِ-یک متناظر با اتلس ِ $\mathbb{A}' = \{\phi'_b \mid b\}$ باشد که نقشِها یِ $\mathbb{A}'$ با نقشِها یِ $\mathbb{A}$ همدستیده اند،

$$\int_{\mathbb{M},\mathbb{P}'} \sigma = \int_{\mathbb{M},\mathbb{P}} \sigma. \tag{890}$$

دیده میشود

$$p_a = \sum_b p_a\,p'_b. \tag{891}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M},\mathbb{P}} \sigma &= \sum_{a,b} \int_{\mathsf{img}(\phi_a)} [(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,p'_b\,\sigma),\\ &= \sum_{a,b} \int_{\phi_a\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}} [(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,p'_b\,\sigma).\end{aligned} \tag{892}$$

اگر ϕ و ϕ' دو نقشه (یِ همدستیده) باشند که اشتراک ِ دامنِها یِشان تهی نیست،

$$\begin{aligned}\sigma_{0'\cdots(m-1)'} &= \frac{\partial X^{i_0}}{\partial X'^0}\cdots\frac{\partial X^{i_{m-1}}}{\partial X'^{m-1}}\,\sigma_{i_0\cdots i_{m-1}},\\ &= \left[\mathsf{det}\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)\right]\sigma_{0\cdots m-1},\\ &= \left|\mathsf{det}\left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)\right|\sigma_{0\cdots m-1}.\end{aligned} \tag{893}$$

در برابری یِ آخر از این استفاده شده که ϕ و ϕ' همدستیده اند. از اینجا با استفاده از قضیه یِ تغییر- ِ-متغیر در انتگرالها یِ چندگانه،

$$\begin{aligned}&\int_{\phi_a\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}} \mathrm{d}\phi_a^0\cdots\mathrm{d}\phi_a^{m-1}\,p_a(x)\,p'_b(x)\,\sigma_{0\cdots n-1}(x),\\ =&\int_{\phi'_b\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}} \mathrm{d}\phi_b'^0\cdots\mathrm{d}\phi_b'^{m-1}\,p_a(x)\,p'_b(x)\,\sigma_{0'\cdots(n-1)'}(x),\end{aligned} \tag{894}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}&\int_{\phi_a\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}}[(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,p'_b\,\sigma),\\ =&\int_{\phi'_b\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}}[(\phi'_b)^{-1}]^*(p_a\,p'_b\,\sigma).\end{aligned}\tag{895}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M},\mathbb{P}}\sigma&=\sum_{a,b}\int_{\phi'_b\{[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi'_b)]\}}[(\phi'_b)^{-1}]^*(p_a\,p'_b\,\sigma),\\ &=\sum_{a,b}\int_{\mathsf{img}(\phi'_b)}[(\phi'_b)^{-1}]^*(p'_b\,p_a\,\sigma),\\ &=\sum_{b}\int_{\mathsf{img}(\phi'_b)}[(\phi'_b)^{-1}]^*(p'_b\,\sigma),\end{aligned}\tag{896}$$

که (890) را نتیجه میدهد. دیده میشود برا یِ این که (890) برا یِ پارش- ِ-یکها یِ متفاوت ِ متناظر با یک اتلس درست باشد، همدستیده-بودن ِ نقشِها یِ آن اتلس با هم (یعنی تکدست-بودن ِ آن اتلس) به کار میرود. پس (890) درست است اگر دُ اتلس ِ تکدست ِ $\mathbb{A}$ و $\mathbb{A}'$ همدستیده باشند. به این ترتیب، انتگرال ِ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ بر یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتدار ِ $\mathbb{M}$ مجهز به پارش- ِ-یک ِ $\mathbb{P}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\int_{\mathbb{M}}\sigma=\sum_{a}\int_{\mathbb{M},\phi_a}p_a\,\sigma.\tag{897}$$

هر چند برا یِ محاسبه یِ طرف ِ راست پارش- ِ-یک لازم است، نتیجه یِ طرف ِ راست با عوض-کردن ِ پارش- ِ-یک عوض نمیشود. از جمله $\mathbb{M}$ اگر یک خمینه یِ فشرده یِ m بُعدی یِ سمتدار باشد، یک پارش- ِ-یک دارد و انتگرال ِ m فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ بر آن تعریف میشود.

$\mathbb{M}$ و $\mathbb{N}$ خمینِها یی m بُعدی یَند و f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ است و یک همانریختی یِ مشتقپذیر است. ϕ یک نقشه یِ $\mathbb{M}$، و σ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل بر $\mathbb{N}$ است، که بیرون ِ دامنه یِ $\phi\circ f^{-1}$ صفر است.

دیده میشود $\phi \circ f^{-1}$ یک نقشه یِ $\mathbb{N}$ است. از (885) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{N},\phi\circ f^{-1}} \sigma &= \int_{\mathsf{img}(\phi\circ f^{-1})} [(\phi\circ f^{-1})^{-1}]^* \sigma,\\ &= \int_{\mathsf{img}(\phi\circ f^{-1})} (\phi^{-1})^* f^* \sigma,\\ &= \int_{\mathsf{img}(\phi)} (\phi^{-1})^*(f^* \sigma), \end{aligned} \tag{898}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{\mathbb{N},\phi\circ f^{-1}} \sigma = \int_{\mathbb{M},\phi} f^* \sigma. \tag{899}$$

از اینجا و با استفاده از تعریفِ انتگرال بر خمینه یِ سمتدار، معلوم میشود اگر خمینِها یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{N}$ سمتدار باشند، f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ باشد و یک همانریختی یِ مشتقپذیر باشد و ترکیبِ آن با هر نقشه یِ همدستیده با اتلسِ $\mathbb{N}$ یک نقشه یِ همدستیده با اتلسِ $\mathbb{M}$ شود، و σ یک m فرم-ِ-دیفرانسیل بر $\mathbb{N}$ باشد،

$$\int_{\mathbb{N}} \sigma = \int_{\mathbb{M}} f^* \sigma. \tag{900}$$

میشود این رابطه را چنان نوشت که شرطِ تبدیلِ نقشه یِ همدستیده با اتلس به نقشه یِ همدستیده با اتلس لازم نباشد. برا یِ این کار به جا یِ $\mathbb{N}$ خُدِ $f(\mathbb{M})$ را میگذارم، به این معنی که سمتِ $f(\mathbb{M})$ با f از سمتِ $\mathbb{M}$ القا شود. نتیجه میشود

$$\int_{f(\mathbb{M})} \sigma = \int_{\mathbb{M}} f^* \sigma. \tag{901}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی و $\mathbb{N}$ یک خمینه یِ n بُعدی ست، f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ است و یک همانریختی یِ مشتقپذیر است، و σ در $\mathcal{A}^m(\mathbb{N})$ است.

$$\int_{f(\mathbb{M})} \sigma := \int_{\mathbb{M}} f^* \sigma. \tag{902}$$

این رابطه با (901) تفاوت دارد. ممکن است m با n برابر نباشد. در این صورت طرفِ چپِ (902) قبلَن تعریف نشده. در حالتِ خاص ی که m با n برابر است، تعریفِ طرفِ چپِ (902) با رابطه یِ (901) سازگار است. اگر $\mathbb{M}$ یک زیرخمینه یِ $\mathbb{N}$ باشد، میشود f را همانی یِ $\mathbb{M}$ گرفت. به این ترتیب، انتگرالِ یک m فرم-ِ-دیفرانسیل بر یک زیرخمینه یِ سمتدارِ یک خمینه یِ n بُعدی تعریف میشود.

این تعریفِ انتگرال بر این اساس است که هر فرم-ِ-دیفرانسیل به شکلِ مجموعِ فرمها یی نوشته میشود که هر یک فقط در دامنه یِ یک نقشه ناصفر است، انتگرالِ هر یک از این فرمها

بر حسب ِ انتگرالها یِ چندگانه یِ معمولی نوشته میشود، و نتایج با هم جمع میشوند. به یک بیان ِ دیگر، $\mathbb{M}_0(y;v_0,\cdots,v_{m-1})$ را بخش ِ کوچک ی از خمینه میگیرم که زیرمجموعه یِ دامنه یِ نقشه یِ ϕ است و

$$\mathbb{M}_0(y;v_0,\cdots,v_{m-1})=\{x\in\mathbb{M}\mid\forall\, i\ :\ [\phi^i(x)=\phi^i(y)+s^j\,(v_j)^i,\quad 0\le s^i\le 1]\}. \tag{903}$$

v_i ها بردارها یی کوچک َند و به این ترتیب $\mathbb{M}_0(y;v_0,\cdots,v_{m-1})$ یک m متوازی‌السطوح ِ کوچک است. دیده میشود

$$\int_{\mathbb{M}_0(y;v_0,\cdots,v_{m-1})}\sigma\approx[\sigma_{0\cdots m-1}(x)]\int_{\phi[\mathbb{M}_0(y;v_0,\cdots,v_{m-1})]}\mathrm{d}X^0\cdots\mathrm{d}X^{m-1},$$
$$=[\sigma_{0\cdots m-1}(x)]|\mathsf{det}(V)|, \tag{904}$$

که V یک تابع ِ خطی در $\mathbb{R}^n$ است که عنصر- ِ-ماتریسیها یَش مئلفِها یِ v_j ها یَند. دیده میشود

$$[\sigma(x)](v_0,\ldots,v_{m-1})=[\sigma_{0\cdots m-1}(x)][\mathsf{det}(V)], \tag{905}$$

که از آن نتیجه میشود انتگرال ِ σ بر $\mathbb{M}_0(y;v_1,\cdots,v_m)$ برابر است با اثر ِ σ بر بردارها یی که یالها یِ $\mathbb{M}_0(y;v_1,\cdots,v_m)$ اند، البته به ترتیب ی که کنج ِ حاصل از آن بردارها راستدست باشد. پس انتگرال ِ σ بر $\mathbb{M}$ چنین به دست میئاید که $\mathbb{M}$ را به m متوازی‌السطوحها یی کوچک تقسیم میکنم، در هر متوازی‌السطوح اثر ِ σ بر کنج ِ راستدست ی که بردارها یَش یالها یِ آن متوازی‌السطح َند را حساب میکنم، و نتایج را با هم جمع میکنم.

30 عنصر- ِ-حجم

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست. میگویم ε یک عنصر- ِ-حجم برا یِ $\mathbb{M}$ است، اگر ε یک m فرم- ِ-دیفرانسیل ِ هموار باشد که بر $\mathbb{M}$ تعریف شده است و هیچ جا صفر نمیشود. وجود ِ عنصر- ِ-حجم، با سمتپذیر-بودن ِ خمینه مربوط است. گیرم ε یک عنصر- ِ-حجم ِ خمینه یِ $\mathbb{M}$ است. e کنج ِ مختصاتی یِ متناظر با $\mathsf{res}(\phi;\mathbb{U})$ است (یعنی e کنج ی ست که ضمنَن میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با $\mathsf{res}(\phi;\mathbb{U})$ است)، که ϕ یک نقشه و $\mathbb{U}$ یک مئلفه یِ همبندی یِ دامنه یِ آن است. چون $\mathbb{U}$ همبند است، اثر ِ ε بر e در $\mathbb{U}$ تغییر- ِ-علامت نمیدهد، مگر جا یی صفر شود. اما ε صفر نمیشود. اگر

اثرِ ε بر e مثبت بود خُدِ $\mathsf{res}(\phi;\mathbb{U})$، و اگر اثرِ ε بر e منفی بود ϕ' را میگیرم که هم ان $\mathsf{res}(\phi;\mathbb{U})$ است که یک ی از مئلفِها یَش در منفی یِ یک ضرب شده. به این ترتیب متناظر با هر مئلفه یِ همبندی از دامنه یِ هر نقشه، یک نقشه به دست میئاید که اثرِ ε بر کنجِ مختصاتی یِ متناظر با آن مثبت است. مجموعه یِ نقشِها یِ حاصل یک اتلس برا یِ خمینه یِ $\mathbb{M}$ است. ϕ و ϕ' را دُ تا از این نقشِها میگیرم، که x در اشتراکِ دامنه یِشان است. دیده میشود

$$[\varepsilon(e_0,\dots,e_{m-1})](x)=\Big(\mathsf{det}\{[\mathbf{D}(\phi'\circ\phi^{-1})][\phi(x)]\}\Big)\\ \{[\varepsilon(e'_0,\dots,e'_{m-1})](x)\},\tag{906}$$

که e و e' کنجها یِ مختصاتی یِ متناظر با به ترتیب ϕ و ϕ' اند. از این که اثرِ ε بر این کنجها مثبت است، نتیجه میشود

$$\mathsf{sgn}_\phi(\phi')=1.\tag{907}$$

به این ترتیب اتلسِ حاصل از نقشِها یی که چنان ساخته شدند تکدست است. این نشان میدهد خمینه یِ $\mathbb{M}$ اگر عنصر-ِ-حجم داشته باشد سمتپذیر است. بر عکس، گیرم خمینه یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ یک اتلسِ تکدست و یک پارش-ِ-یک ِ باپایانِ هموار متناظر با آن اتلس دارد. برا یِ نقشِها یِ ϕ و ϕ' در آن اتلس،

$$\mathsf{sgn}\{[(\mathbf{d}\,\phi^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,\phi^{m-1})](e'_0,\dots,e'_{m-1})\}=\mathsf{sgn}_{\phi'}(\phi),\tag{908}$$

که e' کنجِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ' است. چون ϕ و ϕ' همدستیده اند، طرفِ راست مثبت است. تعریف میکنم

$$\varepsilon=\sum_a p_a(\mathbf{d}\,\phi^0_a)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,\phi^{m-1}_a),\tag{909}$$

که $\{p_a\mid a\}$ پارش-ِ-یک ِ متناظر با اتلسِ تکدستِ $\{\phi_a\mid a\}$ است. به سادگی دیده میشود اثرِ ε بر کنجِ مختصاتی یِ متناظر با هر یک از نقشِها یِ $\{\phi_a\mid a\}$ مثبت است. پس ε یک عنصر-ِ-حجم است. به این ترتیب، هر خمینه یِ سمتپذیر که یک پارش-ِ-یک ِ باپایانِ هموار متناظر با یک اتلسِ تکدست دارد، یک عنصر-ِ-حجم دارد. میگویم عنصر-ِ-حجمِ ε بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ با خمینه یِ $\mathbb{M}$ همدستیده است، اگر اثرِ ε بر کنجها یِ مختصاتی یِ متناظر با یک اتلسِ همدستیده با $\mathbb{M}$ مثبت باشد.

از جمله دیده میشود بر دامنه یِ هر نقشه از یک خمینه میشود یک عنصر ِ حجم تعریف کرد. برا یِ دیدن ِ این ϕ را یک نقشه بر یک خمینه یِ m بُعدی میگیرم، و کنج ِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ را با e نشان میدهم. تعریف میکنم

$$\varepsilon_\phi(e_0,\dots,e_{m-1}) = 1, \tag{910}$$

یعنی

$$\varepsilon_\phi = \mathbf{d}\,\phi^0 \wedge \cdots \wedge \mathbf{d}\,\phi^{m-1}. \tag{911}$$

این در واقع حالت ِ خاص ِ (909) است. رُشن است که ε_ϕ بر دامنه یِ ϕ صفر نمیشود، پس ε_ϕ بر دامنه یِ ϕ عنصر- ِ-حجم است. در واقع به ازا یِ هر میدان ِ اسکالر ِ Σ که بر دامنه یِ ϕ تعریف شده باشد و بر دامنه یِ ϕ صفر نشود، ε با

$$\varepsilon = \Sigma\,\varepsilon_\phi \tag{912}$$

یک عنصر- ِ-حجم است. این که بر دامنه یِ هر نقشه از یک خمینه یک عنصر ِ حجم هست را چنین هم میگویند که هر خمینه مُضعَن یک عنصر ِ حجم دارد.

رُشن است که اگر $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتیده یِ m بُعدی و ε یک عنصر- ِ-حجم بر $\mathbb{M}$ باشد، و v_0 تا v_{m-1} بردار باشند،

$$\varepsilon(v_0,\dots,v_{m-1}) = \varepsilon_{i_0\cdots i_{m-1}}\, v_0^{i_0}\cdots v_{m-1}^{i_{m-1}}. \tag{913}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست، ε یک میدان ِ m فرم- ِ-دیفرانسیل است، و v یک میدان ِ برداری ست. با استفاده از

$$\mathbf{L}_v = \mathbf{i}_v\,\mathbf{d} + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v,, \tag{804}$$

دیده میشود

$$\mathbf{L}_v\,\varepsilon = \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\varepsilon + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\varepsilon. \tag{914}$$

جمله یِ اول صفر است، چون مشتق ِ برونی یِ هر m فرم- ِ-دیفرانسیل صفر است. پس،

$$\mathbf{L}_v\,\varepsilon = \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\varepsilon. \tag{915}$$

Σ یک میدان ِ اسکالر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{\Sigma\, v}\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= \mathbf{d}(\Sigma\,\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}),\\ &= \Sigma\,\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= \Sigma\,\mathbf{L}_v\,\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{D}\,\Sigma)\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (916)\end{aligned}$$

ضمنَن،

$$\mathbf{L}_{\Sigma\, v}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \Sigma\,\mathbf{L}_v\,\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \mathbf{D}\,\Sigma, \boldsymbol{\varepsilon}). \qquad (917)$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \mathbf{D}\,\Sigma, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{D}\,\Sigma)\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (918)$$

یا، متناظر با یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ،

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \sigma, \boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (919)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\,\boldsymbol{\varepsilon} = e^j\wedge\mathbf{i}_{e_i}\,\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (920)$$

$(\sigma\wedge\boldsymbol{\varepsilon})$ صفر است، چون گونه اَش بزرگتر از بُعد ِ خمینه است. پس،

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{i}_v(\sigma\wedge\boldsymbol{\varepsilon}),\\ &= (\mathbf{i}_v\,\sigma)\,\boldsymbol{\varepsilon} - \sigma\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (921)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\sigma\wedge\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{i}_v\,\sigma)\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (922)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(v, \sigma, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{i}_v\,\sigma)\boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (923)$$

از جمله،

$$e^j \wedge \mathbf{i}_{e_i}\, \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_i^j\, \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{924}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \boldsymbol{\varepsilon} = \delta_i^j\, \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{925}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\Sigma\, v}\, \boldsymbol{\varepsilon} &= \Sigma\, \mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{L}_v\, \Sigma)\boldsymbol{\varepsilon}, \\ &= \mathbf{L}_v(\Sigma\, \boldsymbol{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{926}$$

e را یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ فضا یِ مماس، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ را دُگان ِ e میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} &= v^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, \boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{D}_j\, v^i)\boldsymbol{\mathcal{L}}_i{}^j\, \boldsymbol{\varepsilon}, \\ &= v^i[\mathbf{D}_i\, \boldsymbol{\varepsilon}_{0\cdots(m-1)}]e^0 \wedge \cdots \wedge e^{m-1} + (\mathbf{D}_i\, v^i)\boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{927}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} = \{\mathbf{D}_i[v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_{0\cdots(m-1)}]\}e^0 \wedge \cdots \wedge e^{m-1}. \tag{928}$$

از جمله جا یی که $\boldsymbol{\varepsilon}$ صفر نباشد،

$$\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\boldsymbol{\varepsilon}_{0\cdots(m-1)}}\{\mathbf{D}_i[v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_{0\cdots(m-1)}]\}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{929}$$

رُشن است که این روابط برا یِ عنصر- ِ-حجم هم درست َند، و البته برا یِ عنصر- ِ-حجم، رابطه یِ بالا همیشه درست است، چون $\boldsymbol{\varepsilon}$ صفر نمیشود.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر ِ، و $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. فضا یِ m فرم- ِ-دیفرانسیلها در هر نقطه یک فضا یِ یک-بُعدی ست. پس اگر e یک پایه یِ فضا یِ مماس، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ دُگان ِ آن باشد، یک میدان ِ اسکالر ِ $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)$ هست که صفر نمیشود و

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]e^0 \wedge \cdots \wedge e^{m-1}. \tag{930}$$

با نماد ِ $\mathbf{o}(e)$ به شکل ِ

$$\mathbf{o}(e) = e^0 \wedge \cdots \wedge e^{m-1}, \tag{931}$$

دیده میشود

$$\varepsilon = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)]. \tag{932}$$

رُشن است که

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) &= \varepsilon(e_0, \ldots, e_{m-1}), \\ &= \varepsilon_{0\,\ldots\,(m-1)}. \end{aligned} \tag{933}$$

$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)$ حجم ِ کنج ِ e است، و چنان که از نمادگذاری بر میئاید به پایه بستِگی دارد. در واقع دیده میشود اگر e' یک پایه یِ دیگر ِ فضا یِ مماس باشد که تابع ِ تغییر- ِ-پایه از e به e' برابر ِ Λ باشد $(e' = \Lambda\, e)$، آنگاه

$$\begin{aligned} \varepsilon(e'_0, \ldots, e'_{m-1}) &= \varepsilon(\Lambda\, e_0, \ldots, \Lambda\, e_{m-1}), \\ &= [\mathsf{det}(\Lambda)]\varepsilon(e_0, \ldots, e_{m-1}), \end{aligned} \tag{934}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e') = [\mathsf{det}(\Lambda)]\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e). \tag{935}$$

رُشن است که متناظر با هر پایه یِ e، عنصر- ِ-حجم ِ ε به طُر ِ یکتا با $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)$ مشخص میشود، و بر عکس. وقت ی ε معلوم است، به جا یِ $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ نماد ِ سادِتر ِ $\mathbf{v}$ را به کار میبرم. به $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ پایه-چگالی یِ عنصر- ِ-حجم ِ ε میگویم. از جمله (929) میشود

$$\mathbf{L}_v\, \varepsilon = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)} \Big(\mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\Big)\varepsilon, \tag{936}$$

که e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. و البته

$$\mathbf{L}_{e_i}\, \varepsilon = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\varepsilon. \tag{937}$$

31 توده و چگالی

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی با عنصر- ِ-حجم ِ ε است. متناظر با میدان ِ اسکالر ِ Σ، یک تابع تعریف میکنم که بر زیرمجموعِها یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ اثر میکند و یک عدد میدهد. این تابع را با $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma$ نشان میدهم و آن را ε-توده یِ Σ مینامم:

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma)(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} \Sigma\,\varepsilon. \tag{938}$$

وقت ی ε دانسته است، $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma$ را سادِتر توده یِ Σ هم مینامم، و آن را با نماد ِ سادِتر ِ $\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma$ نشان میدهم. رُشن است که $\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma$ نسبت به Σ خطی ست. به علاوه $\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma$ نسبت به متغیر َش (که یک زیرمجموعه یِ خمینه است) فزونوَر است، یعنی اگر اشتراک ِ $\mathbb{L}_1$ و $\mathbb{L}_2$ تهی باشد، $(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2)$ مجموع ِ $(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_1)$ و $(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_2)$ است. در حالت ِ کلی (که این اشتراک لزومَن تهی نیست)

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2) = (\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_1) + (\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_2) - (\boldsymbol{\mathcal{I}}\,\Sigma)(\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2). \tag{939}$$

دیده میشود

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} \varepsilon. \tag{940}$$

رُشن است که اگر e یک پایه یِ فضا یِ مماس و $\{(i, e^i) \mid i\}$ دُگان ِ آن باشد،

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma)(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} \Sigma[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)]. \tag{941}$$

از جمله،

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)]. \tag{942}$$

Ω یک تابع ِ است که بر زیرمجموعِها یِ m بُعدی یِ $\mathbb{M}$ اثر میکند و یک عدد میدهد، و این تابع فزونوَر است. ε-چگالی یِ میانگین ِ Ω بر $\mathbb{L}$ را با $(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L}) = \left(\int_{\mathbb{L}} \varepsilon\right)^{-1} [\Omega(\mathbb{L})]. \tag{943}$$

رُشن است که $(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})$ برا یِ $\mathbb{L}$ ها یی تعریف شده که

$$\int_{\mathbb{L}} \varepsilon \neq 0. \tag{944}$$

همچنین رُشن است که (943) یعنی

$$(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L}) = \frac{\Omega(\mathbb{L})}{(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})}. \tag{945}$$

گیرم نقطه یِ x چنان است که اگر $\mathbb{L}$ شامل ِ x باشد، وقت ی $\mathbb{L}$ به صفر میگراید $(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})$ به حد ِ مشخص ی بگراید. این یعنی یک L هست که

$$\begin{aligned}&(\forall\,\alpha>0):\Big\{(\exists\,\beta>0)\ \ni\\&\Big[\Big(\{\mathbb{L}\subseteq[\mathsf{nei}_{\beta}(x)]\}\wedge\{[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})]\neq 0\}\Big)\Rightarrow\\&\{|[(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})]-L|<\alpha\}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{946}$$

در این صورت ε-چگالی یِ Ω در x را L تعریف میکنم. ε-چگالی یِ Ω در x را با $(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x)$ نشان میدهم:

$$\begin{aligned}&(\forall\,\alpha>0):\Big\{(\exists\,\beta>0)\ \ni\\&\Big[\Big(\{\mathbb{L}\subseteq[\mathsf{nei}_{\beta}(x)]\}\wedge\{[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})]\neq 0\}\Big)\Rightarrow\\&\{|[(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})]-[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x)]|<\alpha\}\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{947}$$

برا یِ چگالی هم، اگر ε معلوم باشد به جا یِ $\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega}$ نماد ِ سادِتر ِ $\overline{\boldsymbol{\varrho}\,\Omega}$ را به کار میبرم و به آن چگالی یِ میانگین ِ Ω میگویم. همچنین، اگر ε معلوم باشد به جا یِ $\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega$ نماد ِ سادِتر ِ $\boldsymbol{\varrho}\,\Omega$ را به کار میبرم و به آن چگالی یِ Ω میگویم. رُشن است که $\overline{\boldsymbol{\varrho}\,\Omega}$ و $\boldsymbol{\varrho}\,\Omega$ نسبت به Ω خطی یَند.

وجود ِ چگالی یِ Ω در ناحیه یِ $\mathbb{L}$ به این معنی ست.

$$\begin{aligned}\forall\,x\in\mathbb{L}:\quad\Big(&(\forall\,\alpha>0):\Big\{(\exists\,\beta>0)\ \ni\\&\Big[\Big(\{\mathbb{L}\subseteq[\mathsf{nei}_{\beta}(x)]\}\wedge\{[(\boldsymbol{\mathcal{I}}\,1)(\mathbb{L})]\neq 0\}\Big)\Rightarrow\\&\{|[(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})]-[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x)]|<\alpha\}\Big]\Big\}\Big).\end{aligned} \tag{948}$$

این یعنی β علی‌الاصول به α و x وابسته است. میگویم چگالی یِ Ω در $\mathbb{L}$ به شکل ِ یکنواخت وجود دارد (وجود ِ چگالی یِ Ω در $\mathbb{L}$ یکنواخت است)، اگر متناظر با هر α یک β یِ مستقل از x وجود

داشته باشد، یعنی

$$(\forall\,\alpha>0):\Big((\exists\,\beta>0)\ \ni\Big\{\forall\,x\in\mathbb{L}:$$
$$\Big[\Big(\{\mathbb{L}\subseteq[\mathsf{nei}_\beta(x)]\}\wedge\{[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})]\neq 0\}\Big)\Rightarrow$$
$$\{|[(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega})(\mathbb{L})]-[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x)]|<\alpha\}\Big]\Big\}\Big). \tag{949}$$

Ω یک تابع ِ فزونوَر است که در ناحیه یِ فشرده یِ $\mathbb{L}$ (که با خمینه همبُعد است)، به طُر ِ یکنواخت چگالی دارد. متناظر با هر α یک β هست که در رابطه یِ تعریف- کننده یِ وجود ِ یکنواخت ِ چگالی یِ Ω ظاهر میشود. $\mathbb{L}$ را به شکل ِ اجتماع ِ یک دسته یِ باپایان $\mathbb{L}_i$ مینویسم که با هم اشتراک ندارند، و هر یک زیرمجموعه یِ یک همسایِگی به شعاع ِ β است. این که این کار ممکن است، از فشرده- بودن ِ $\mathbb{L}$ نتیجه میشود. در هر یک از $\mathbb{L}_i$ ها یک نقطه یِ x_i میگیرم. دیده میشود

$$\Omega(\mathbb{L})=\sum_i\Omega(\mathbb{L}_i), \tag{950}$$

$$|\Omega(\mathbb{L}_i)-[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x_i)][(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]|<\alpha\,|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)|, \tag{951}$$

که نتیجه میدهد

$$\left|\Omega(\mathbb{L})-\sum_i[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x_i)][(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]\right|<\alpha\sum_i|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)|. \tag{952}$$

این که ε صفر نمیشود نتیجه میدهد $[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]$ ها همعلامت َند. پس،

$$\sum_i|[\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]|=\left|\sum_i[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]\right|,$$
$$=|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})|. \tag{953}$$

به این ترتیب،

$$\left|\Omega(\mathbb{L})-\sum_i[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)(x_i)][\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L}_i)]\right|<\alpha|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})|. \tag{954}$$

البته با استفاده از فشرده‌گی یِ $\mathbb{L}$ رُشن است که $|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,1)(\mathbb{L})|$ باپایان است. پس طرف ِ چپ ِ (954) را میشود از هر عدد ِ مثبت ی کوچکتر کرد: کافی ست متناظر با $\alpha'>0$، رابطه یِ (954) برا یِ

$\alpha = \{\alpha'/|(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, 1)(\mathbb{L})|\}$ نوشته شود. این یعنی

$$\Omega(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} (\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Omega)\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{955}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Omega)(\mathbb{L}) = \Omega(\mathbb{L}), \tag{956}$$

یا سادِتر،

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{1}. \tag{957}$$

همچنین،

$$(\overline{\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Sigma})(\mathbb{L}) = \frac{(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Sigma)(\mathbb{L})}{(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, 1)(\mathbb{L})}. \tag{958}$$

اگر x در $\mathbb{L}$ باشد، و Σ در x پیوسته باشد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Sigma)(\mathbb{L}) &= \int_{\mathbb{L}} \Sigma\, \boldsymbol{\varepsilon}, \\ &= [\Sigma(x)][(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, 1)(\mathbb{L})] + o[(\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, 1)(\mathbb{L})],\end{aligned} \tag{959}$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \Sigma)(x) = \Sigma(x), \tag{960}$$

یا

$$\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{1}. \tag{961}$$

(957) و (961) تعمیمها ی ِقضیه ی ِاساسی ی ِحساب ِ دیفرانسیل و انتگرال َند.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}'$ عنصر- ِ-حجم َند. پس یک میدان ِ اسکالر ِ $\Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}',\boldsymbol{\varepsilon}}$ هست که صفر نمیشود و

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \Sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}',\boldsymbol{\varepsilon}}\, \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{962}$$

در واقع،

$$\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon} = \frac{\mathbf{v}_{\varepsilon'}}{\mathbf{v}_{\varepsilon}}. \tag{963}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon'}\, 1 = \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}\, \Sigma_{\varepsilon',\varepsilon}. \tag{964}$$

$$\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon'} 1 = \Sigma_{\varepsilon',\varepsilon}. \tag{965}$$

$$\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon'}\, \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}\, 1 = \frac{1}{\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon}}. \tag{966}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon'}\, \Sigma &= \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}(\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon}\, \Sigma), \\ \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon'} &= \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}[\mathbf{m}(\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon})], \end{aligned} \tag{967}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}\, \Omega &= [\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon'}\, \Omega]\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon} &= [\mathbf{m}(\Sigma_{\varepsilon',\varepsilon})]\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon'}, \end{aligned} \tag{968}$$

که Σ یک میدان ِ اسکالر و Ω یک تابع ِ فزونوَر است.

متغیر ِیک میدان ِ اسکالر یک عضو ِ خمینه، و متغیر ِیک تابع ِ فزونوَر یک زیرمجموعه یِ خمینه است. به یک میدان ِ اسکالر یک تابع ِ ذاتی هم میگویند.

با $\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}$ و $\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}$ میشود بین ِ میدانها یِ اسکالر و تابعها یِ فزونوَر ارتباط برقرار کرد. البته این ارتباط به عنصر- ِ-حجم ِ ε بستِگی دارد. از (968) دیده میشود اگر ε و ε' عنصر- ِ-حجم باشند،

$$(\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon'}\, \Omega)\varepsilon' = (\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}\, \Omega)\varepsilon, \tag{969}$$

یا

$$(\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon'}\, \Omega)\mathbf{v}_{\varepsilon'} = (\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}\, \Omega)\mathbf{v}_{\varepsilon}. \tag{970}$$

رابطه یِ (969) نشان میدهد بین ِ تابعها یِ فزونوَر و m فرم- ِ-دیفرانسیلها (m بُعد ِ خمینه است) یک تناظر هست که به عنصر- ِ-حجم بستِگی ندارد. بر این اساس، $\boldsymbol{i\mathcal{I}}$ (ناوردا-توده) و $\boldsymbol{i\varrho}$ (ناوردا-چگالی) را به این شکل تعریف میکنم.

$$(\boldsymbol{i\mathcal{I}}\,\omega)(\mathbb{L}) = \int_{\mathbb{L}} \omega, \tag{971}$$

$$\boldsymbol{i\varrho}\,\Omega = (\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{972}$$

که ω یک m فرم- ِ-دیفرانسیل، Ω یک تابع ِ فزونوَر، و $\mathbb{L}$ یک زیرمجموعه یِ m بُعدی یِ خمینه است. برا یِ تعریف ِ ناوردا-چگالی یک عنصر- ِ-حجم لازم است. اما هر خمینه مُضعَن یک عنصر- ِ-حجم دارد، و از (969) دیده میشود طرف ِ راست ِ (972) مستقل از $\boldsymbol{\varepsilon}$ است. پس $\boldsymbol{i\varrho}$ خُش-تعریف است. متناظر با پایه یِ e، رابطه یِ (972) را ضمنَن میشود چنین نوشت.

$$\boldsymbol{i\varrho}\,\Omega = (\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)]. \tag{973}$$

Σ یک میدان ِ اسکالر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{i\mathcal{I}}(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon})](\mathbb{L}) &= \int_{\mathbb{L}} \Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= (\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma)(\mathbb{L}),\end{aligned} \tag{974}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{i\mathcal{I}}(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma, \tag{975}$$

یا

$$\boldsymbol{i\mathcal{I}}\{\Sigma[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)]\} = \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Sigma. \tag{976}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i\mathcal{I}}\,\boldsymbol{i\varrho}\,\Omega &= \boldsymbol{i\mathcal{I}}[(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega)\boldsymbol{\varepsilon}],\\ &= \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\Omega),\\ &= \Omega,\end{aligned} \tag{977}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{i\mathcal{I}}\,\boldsymbol{i\varrho} = \mathbf{1}. \tag{978}$$

برا یِ رابطه یِ عکس، باز هم این به کار میرود که هر خمینه مُضعَن یک عنصر- ِ-حجم دارد. یک میدان ِ اسکالر ِ Σ هست که

$$\omega = \Sigma\,\varepsilon. \tag{979}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i\varrho}\,\boldsymbol{i\mathcal{I}}\,\omega &= \boldsymbol{i\varrho}\,\boldsymbol{i\mathcal{I}}(\Sigma\,\varepsilon),\\ &= \boldsymbol{i\varrho}\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}\,\Sigma,\\ &= (\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}\,\Sigma)\varepsilon,\\ &= \Sigma\,\varepsilon,\\ &= \omega,\end{aligned} \tag{980}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{i\varrho}\,\boldsymbol{i\mathcal{I}} = \mathbf{1}. \tag{981}$$

با جبر ِ عملگرها، روابط را میشود خلاصِتر کرد:

$$\boldsymbol{i\varrho} = [\mathbf{m}(\varepsilon)]\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon}. \tag{982}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon} = \boldsymbol{i\mathcal{I}}[\mathbf{m}(\varepsilon)]. \tag{983}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i\mathcal{I}}\,\boldsymbol{i\varrho} &= \boldsymbol{i\mathcal{I}}[\mathbf{m}(\varepsilon)]\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon},\\ &= \boldsymbol{\mathcal{I}}_{\varepsilon}\,\boldsymbol{\varrho}_{\varepsilon},\\ &= \mathbf{1}.\end{aligned} \tag{984}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= [\mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon})]\mathbf{1},\\ &= [\mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon})]\boldsymbol{\varrho}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\boldsymbol{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\varepsilon}},\\ &= \boldsymbol{i\varrho}\,\boldsymbol{i\mathcal{I}}[\mathbf{m}(\boldsymbol{\varepsilon})],\end{aligned} \tag{985}$$

که (981) را نشان میدهد.

32 مساحت

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتپذیر و $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. متناظر با بردار ِ v عنصر- ِ-مساحت در سو یِ v (متناظر با عنصر- ِ-حجم ِ $\boldsymbol{\varepsilon}$) را با $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{986}$$

از این که $\boldsymbol{\varepsilon}$ صفر نیست، نتیجه میشود هر جا v صفر نباشد $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ هم ناصفر است. اگر $\{(e_i, i) \mid i\}$ یک میدان-پایه در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ باشد، $\boldsymbol{\varepsilon}_{e_i}$ را با $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ نشان میدهم. رُشن است که

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = v^i\,\boldsymbol{\varepsilon}_i. \tag{987}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{(m-1)!}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{i\,j_1\cdots j_{m-1}}\,e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{m-1}}, \tag{988}$$

که $\{(i, e^i \mid i\}$ دُگان ِ $\{(e_i, i) \mid i\}$ است و m بُعد ِ خمینه است. دیده میشود

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (-1)^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]e^0\wedge\cdots\wedge e^{i-1}\wedge e^{i+1}\wedge\cdots\wedge e^{m-1}, \tag{989}$$

یا

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}_i(e)], \tag{990}$$

که

$$\mathbf{o}_i(e) = (-1)^i\, e^0 \wedge \cdots \wedge e^{i-1} \wedge e^{i+1} \wedge \cdots \wedge e^{n-1}, \tag{991}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. عنصر- ِ-مساحت در سو یِ v یک $(m-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. پس اگر σ یک یک-فرم باشد، $(\sigma \wedge \varepsilon_v)$ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل است. فضا یِ m فرم- ِ-دیفرانسیلها یک-بُعدی ست. پس $(\sigma \wedge \varepsilon_v)$ با ε متناسب است. یعنی یک اسکالر ِ Σ هست که

$$\sigma \wedge \varepsilon_v = \Sigma\, \varepsilon. \tag{992}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\Sigma\, \varepsilon_v &= \Sigma\, \mathbf{i}_v\, \varepsilon, \\
&= \mathbf{i}_v(\Sigma\, \varepsilon), \\
&= \mathbf{i}_v(\sigma \wedge \varepsilon_v), \\
&= (\mathbf{i}_v\, \sigma)\varepsilon_v - \sigma\, \mathbf{i}_v\, \varepsilon_v, \\
&= [\sigma(v)]\varepsilon_v,
\end{aligned} \tag{993}$$

که در برابری یِ آخر این به کار رفته که $(\mathbf{i}_v)^2$ صفر است. به این ترتیب،

$$\sigma \wedge \varepsilon_v = [\sigma(v)]\varepsilon. \tag{994}$$

از جمله،

$$e^i \wedge \varepsilon_j = \delta^i_j\, \varepsilon, \tag{995}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{m}\, e^i \wedge \varepsilon_i, \tag{996}$$

و البته

$$e^i \wedge [\mathbf{o}_j(e)] = \delta^i_j [\mathbf{o}(e)]. \tag{997}$$

$$\mathbf{o}(e) = \frac{1}{m}\, e^i \wedge [\mathbf{o}_j(e)]. \tag{998}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. ε_v، که v یک میدان ِ برداری ست، یک $(m-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. پس مشتق ِ برونی یَش یک m فرم ِ دیفرانسیل، و در نتیجه متناسب با ε است، یعنی یک میدان ِ اسکالر ِ Σ هست که

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_v = \Sigma\,\varepsilon. \tag{999}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\varepsilon_v &= \mathbf{d}(v^i\,\varepsilon_i),\\ &= (\mathbf{d}\,v^i)\wedge\varepsilon_i + v^i\,\mathbf{d}\,\varepsilon_i,\\ &= (\mathbf{D}_j\,v^i)e^j\wedge\varepsilon_i + v^i\,\mathbf{d}\,\varepsilon_i,\end{aligned} \tag{1000}$$

که e یک میدان- پایه است. با استفاده از (995) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_v = (\mathbf{D}_i\,v^i)\varepsilon + v^i\,\mathbf{d}\,\varepsilon_i. \tag{1001}$$

$(\mathbf{d}\varepsilon_i)$ هم یک m فرم- ِ-دیفرانسیل است. پس برا یِ هر i یک میدان ِ اسکالر ِ $[\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\,i}(e)]$ هست (که به پایه و عنصر- ِ-حجم بستِگی دارد) که

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_i = [\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\,i}(e)]\varepsilon. \tag{1002}$$

از اینجا،

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_v = [\mathbf{D}_i\,v^i + v^i\,\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\,i}(e)]\varepsilon. \tag{1003}$$

رُشن است که

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\varepsilon_i &= \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{e_i}\,\varepsilon,\\ &= \mathbf{L}_{e_i}\,\varepsilon,\end{aligned} \tag{1004}$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{L}_{e_i}\,\varepsilon = [\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\,i}(e)]\varepsilon. \tag{1005}$$

اگر میدان-پایه یِ e مختصاتی باشد، این روابط سادِتر میشوند. در این حالت، از

$$\mathbf{L}_{e_i}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{937}$$

نتیجه میشود

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\,i}(e) = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]. \tag{1006}$$

این را مستقیمَن (با مشتقگیری از ε_i) هم میشد به دست آورد. از (991) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}[\mathbf{o}_i(e)] = 0. \tag{1007}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_i &= \{\mathbf{d}[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\wedge[\mathbf{o}_i(e)],\\ &= \{\mathbf{D}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}e^j\wedge[\mathbf{o}_i(e)],\\ &= \{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}[\mathbf{o}(e)],\\ &= \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\boldsymbol{\varepsilon},\end{aligned} \tag{1008}$$

که هم ان (1006) است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر و ε یک عنصر-ِ-حجم بر آن است. با اثر ِ عنصر-ِ-حجم بر $(m-1)$ بردار، میشود یک یک-فرم تعریف کرد. یک-فرم-ِ-مساحت ِ $\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots v_{m-1})$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots v_{m-1})](u) = \boldsymbol{\varepsilon}(u,v_1,\dots,v_{m-1}). \tag{1009}$$

دیده میشود این یعنی

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots v_{m-1})](u) &= \boldsymbol{\varepsilon}_u(v_1,\dots v_{m-1}),\\ &= u^i\,\boldsymbol{\varepsilon}_i(v_1,\dots v_{m-1}),\end{aligned} \tag{1010}$$

یا

$$\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots v_{n-1}) = e^i[\boldsymbol{\varepsilon}_i(v_1,\dots v_{n-1})], \tag{1011}$$

که $\{(0,e^0),\dots,(m-1,e^{m-1})\}$ یک پایه برا یِ فضا یِ هممماس است. میشود این رابطه را به شکل ِ بستِتر ِ

$$\boldsymbol{\sigma} = e^i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_i \tag{1012}$$

هم نوشت، که البته (1011) از آن کم-ابهامتر است. پس،

$$\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots v_{m-1}) = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]e^i\{[\mathbf{o}_i(e)](v_1,\dots v_{m-1})\}, \tag{1013}$$

یا بستِتر

$$\boldsymbol{\sigma} = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]e^i \otimes [\mathbf{o}_i(e)]. \tag{1014}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots,v_{m-1}) = e^i\,\boldsymbol{\varepsilon}_{i\,j_1\cdots j_{m-1}}\,v_1^{j_1}\cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}. \tag{1015}$$

این رابطه را چنین هم میشود نوشت

$$\boldsymbol{\sigma}_i(v_1,\dots,v_{m-1}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{i\,j_1\cdots j_{m-1}}\,v_1^{j_1}\cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}, \tag{1016}$$

که

$$\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots,v_{m-1}) =: e^i\,\boldsymbol{\sigma}_i(v_1,\dots,v_{m-1}), \tag{1017}$$

و البته نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_i &= \boldsymbol{\varepsilon}_i,\\ &= [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}_i(e)].\end{aligned} \tag{1018}$$

رُشن است که اگر v یک ترکیب ِ خطی از بردارها یِ v_1 تا v_{m-1} باشد،

$$[\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots,v_{m-1})](v)=0. \tag{1019}$$

از جمله،

$$[\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots,v_{m-1})](v_i)=0,\quad 1\le i\le (m-1). \tag{1020}$$

دیده میشود یک-فرم- ِ-مساحت تعمیم ی از حاصل- ِ-ضرب ِ خارجی در یک فضا (خمینه) یِ سه بُعدی ست. در بُعد ِ 3، با 2 بردار یک متوازی‌الاضلاع ساخته میشود که میشود به آن یک بردار ِ مساحت نسبت داد. در بُعد ِ m، با $(m-1)$ بردار یک متوازی‌السطوح ساخته میشود که میشود به آن یک بردار نسبت داد.

البته یک-فرم- ِ-مساحت ِ $(m-1)$ بردار یک همبردار است، نَ یک بردار. وجهها یِ یک متوازی‌السطوح ِ m بُعدی ناحیِها یی $(m-1)$ بُعدی یَند. برا یِ یک متوازی‌السطوح ِ m بُعدی متناظر با کنج ِ $\{(0,v_0),\dots,(m-1,v_{m-1})\}$ در یک فضا یِ m بُعدی، (شبه- ِ-)حاصل- ِ-ضرب ِ درونی یِ بردار- ِ-مساحت ِ وجه ِ متناظر با $\{(1,v_1),\dots,(m-1,v_{m-1})\}$ در بردار ِ v_0، حجم ِ جبری یِ متوازی‌السطوح ِ m بُعدی ست. اینجا اثر ِ $\boldsymbol{\sigma}(v_1,\dots,v_{m-1})$، یعنی یک-فرم- ِ-مساحت ِ وجه ِ متناظر با $\{(1,v_1),\dots,(m-1,v_{m-1})\}$، بر v_0 حجم ِ جبری یِ متوازی‌السطوح ِ m بُعدی ست. برا یِ این که تناظر ِ بین ِ یک-فرم- ِ-مساحت و تعمیم ِ حاصل- ِ-ضرب ِ خارجی در بُعد ِ 3 کامل شود، ابزار ی لازم است که یک همبردار را به بردار تبدیل کند. دیده خاهد شد با یک دُ-فرم ِ ناتکین (در حالت ِ خاص، یک شبه- ِ-ضرب ِ درونی) میشود چنین ابزار ی ساخت.

33 دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. متناظر با میدان ِ برداری یِ v بر خمینه، ε_v یک $(m-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. پس مشتق ِ برونی یِ آن یک m فرم ِ دیفرانسیل و در نتیجه متناسب با ε است. دیورژانس ِ v را با $(\mathbf{div}\,v)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_v=(\mathbf{div}\,v)\varepsilon. \tag{1021}$$

دیده میشود دیورژانسِ یک میدانِ برداری یک میدانِ اسکالر است. به سادگی دیده میشود اگر u و v دُ میدانِ برداری، و α و β دُ اسکالر باشند،

$$\mathbf{div}(\alpha\, u + \beta\, v) = \alpha(\mathbf{div}\, u) + \beta(\mathbf{div}\, v). \tag{1022}$$

همچنین، اگر v یک میدانِ برداری و Σ یک میدانِ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}
[\mathbf{div}(\Sigma\, v)]\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{\Sigma\, v},\\
&= \mathbf{d}(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}_v),\\
&= (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_v + \Sigma\,\mathbf{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_v,\\
&= [(\mathbf{d}\,\Sigma)(v) + \Sigma(\mathbf{div}\, v)]\boldsymbol{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{1023}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{div}(\Sigma\, v) = \mathbf{D}_v\,\Sigma + \Sigma\,\mathbf{div}\, v. \tag{1024}$$

این گونه ای ویژگی یِ لَیبنیتسی برا یِ دیورژانس است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتپذیر و $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک عنصر-ِ-حجم بر آن است. e یک میدان-پایه بر $\mathrm{T}\mathbb{M}$ است. متناظر با میدانِ برداری یِ v،

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\, v &= \mathbf{div}(v^i\, e_i),\\
&= \mathbf{D}_i\, v^i + v^i\,\mathbf{div}\, e_i.
\end{aligned} \tag{1025}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
(\mathbf{div}\, e_i)\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{d}\,\boldsymbol{\varepsilon}_i,\\
&= [\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}(e)]\boldsymbol{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{1026}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{div}\, e_i = \mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}(e). \tag{1027}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{div}\, v = \mathbf{D}_i\, v^i + v^i[\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}(e)]. \tag{1028}$$

اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد، این روابط سادِتر میشوند. در این حالت،

$$(\mathbf{div}\, e_i)\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1029}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{div}\, v = \mathbf{D}_i\, v^i + \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}v^i, \tag{1030}$$

یا

$$\mathbf{div}\, v = \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\, \mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}. \tag{1031}$$

البته رُشن است که این روابط خاص ِ میدان-پایِها یِ مختصاتی یَند. از مقایسه یِ رابطه یِ اخیر با شکل ی که برا یِ $\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon}$ بر حسب ِ میدان-پایِها یِ مختصاتی به دست آمد،

$$\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\Big(\mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\Big)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{936}$$

نتیجه میشود

$$\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{div}\, v)\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1032}$$

روابط ِ (936) و (1031) با میدان-پایِها یِ مختصاتی درست اند. اما دُ-طرف ِ (1032) مستقل از پایه اند. پس (1032) مستقل از پایه درست است. از (1027) ضمنَن دیده میشود

$$(\mathbf{div}\, e_i)\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}(e)][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)], \tag{1033}$$

و اگر e مختصاتی باشد،

$$(\mathbf{div}\, e_i)\boldsymbol{\varepsilon} = \{\mathbf{D}_i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}[\mathbf{o}(e)]. \tag{1034}$$

همچنین،

$$(\mathbf{div}\, v)\boldsymbol{\varepsilon} = \{\mathbf{D}_i\, v^i + v^i[\mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}(e)]\}[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)], \tag{1035}$$

و اگر e مختصاتی باشد،

$$(\mathbf{div}\, v)\boldsymbol{\varepsilon} = \Big(\mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\Big)[\mathbf{o}(e)]. \tag{1036}$$

دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری با عنصر- ِ-حجم تعریف میشود و به آن بستِگی دارد. پس در حالت ِ کلی، با عوض-کردن ِ عنصر- ِ-حجم دیورژانس هم عوض میشود. دیورژانسها یِ متناظر با عنصر- ِ-حجمها یِ $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ را با به ترتیب $\mathbf{div}_a$ و $\mathbf{div}_b$ نشان میدهم. در حالت ِ کلی $\mathbf{div}_b$ با $\mathbf{div}_a$ برابر نیست. یک میدان ِ اسکالر ِ Σ هست که صفر نمیشود و

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \Sigma\, \boldsymbol{\varepsilon}_a, \tag{1037}$$

در این صورت متناظر با میدان ِ برداری یِ v،

$$\begin{aligned}(\mathbf{div}_b\, v)\boldsymbol{\varepsilon}_b &= \mathbf{d}\,(\boldsymbol{\varepsilon}_b)_v,\\ &= \mathbf{d}[\Sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_a)_v],\\ &= \Sigma\,\mathbf{d}\,(\boldsymbol{\varepsilon}_a)_v + (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\boldsymbol{\varepsilon}_a)_v.\end{aligned} \tag{1038}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_a = 0, \tag{1039}$$

چون گونه یِ طرف ِ چپ یک ی بیش از بُعد ِ خمینه است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{i}_v[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\boldsymbol{\varepsilon}_a],\\ &= (\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\Sigma)\boldsymbol{\varepsilon}_a - (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\varepsilon}_a),\\ &= (\mathbf{D}_v\,\Sigma)\boldsymbol{\varepsilon}_a - (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\boldsymbol{\varepsilon}_a)_v,\end{aligned} \tag{1040}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\boldsymbol{\varepsilon}_a)_v=(\mathbf{D}_v\,\Sigma)\boldsymbol{\varepsilon}_a. \tag{1041}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(\mathbf{div}_b\,v)\boldsymbol{\varepsilon}_b&=\Sigma(\mathbf{div}_a\,v)\boldsymbol{\varepsilon}_a+(\mathbf{D}_v\,\Sigma)\boldsymbol{\varepsilon}_a,\\&=(\mathbf{div}_a\,v)\boldsymbol{\varepsilon}_b+\frac{\mathbf{D}_v\,\Sigma}{\Sigma}\,\boldsymbol{\varepsilon}_b,\end{aligned} \tag{1042}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{div}_b\,v=\mathbf{div}_a\,v+\frac{\mathbf{D}_v\,\Sigma}{\Sigma}. \tag{1043}$$

البته از این رابطه، یا مستقیمَن از (1021)، دیده میشود اگر Σ ثابت باشد، $\mathbf{div}_b$ با $\mathbf{div}_a$ برابر است، یعنی اگر عنصر- ِ-حجم در یک ثابت ضرب شود، دیورژانس عوض نمیشود.

برا یِ تعریف ِ دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری، واقعَن لازم نیست خمینه سمتپذیر باشد. متناظر با هر نقشه یِ ϕ_a از خمینه یِ $\mathbb{M}$ یک عنصر- ِ-حجم ِ ϕ_a هست که بر دامنه یِ ϕ_a تعریف شده. گیرم این عنصر- ِ-حجمها چنان َند که متناظر با هر دُ-نقشه یِ ϕ_a و ϕ_b، در هر مئلفه یِ همبندی یِ i از $[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi_b)]$ یک عد ِ ثابت ِ (طبعَن ناصفر ِ) $\mathfrak{c}_{a\,b\,i}$ هست که

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a=\mathfrak{c}_{a\,b\,i}\,\boldsymbol{\varepsilon}_b, \tag{1044}$$

در این صورت میشود $\mathbf{div}_a$ را مثل ِ (1021) و با $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ به جا یِ $\boldsymbol{\varepsilon}$ تعریف کرد. اما از این شرط که در هر مئلفه یِ همبندی یِ $[\mathsf{dom}(\phi_a)]\cap[\mathsf{dom}(\phi_b)]$ عنصر- ِ-حجمها یِ $\boldsymbol{\varepsilon}_a$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_b$ مضرب ِ ثابت ی از هم َند، دیده میشود

$$\mathbf{div}_b=\mathbf{div}_a. \tag{1045}$$

به این ترتیب، $\mathbf{div}_a$ مستقل از نقشه یِ a است و میشود شاخص ِ a را از آن برداشت.

34 قضیه یِ سْتُکس

$\mathbb{B}$ یک گوی به مرکزِ X_0 و شعاعِ r در $\mathbb{R}^m_{-0}$ است، و τ یک $(m-1)$ فرم-ِ-دیفرانسیل است که بر $\mathbb{B}$ تعریف شده و

$$\tau = \frac{\tau_{i_1\cdots i_{m-1}}}{(m-1)!}\,(\mathbf{d}\,X^{i_1})\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,X^{i_{m-1}}). \tag{1046}$$

$$\lim_{|X-X_0|\to r^-}\tau(X)=0. \tag{1047}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}\,\tau = \left[\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\frac{\partial}{\partial\,X^i}\,\frac{\tau_{0\cdots i-1\,i+1\cdots m-1}}{(m-1)!}\right](\mathbf{d}\,X^0)\wedge\cdots\wedge(\mathbf{d}\,X^{m-1}). \tag{1048}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}\mathbf{d}\,\tau &= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\int_{\mathbb{B}}\mathrm{d}X^0\cdots\mathrm{d}X^{m-1}\,\frac{\partial}{\partial\,X^i}\,\frac{\tau_{0\cdots i-1\,i+1\cdots m-1}}{(m-1)!},\\ &= \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\int_{\mathbb{B}_i}\mathrm{d}X^0\cdots\mathrm{d}X^{i-1}\,\mathrm{d}X^{i+1}\cdots\mathrm{d}X^{m-1}\\ &\quad\left[\frac{\tau_{0\cdots i-1\,i+1\cdots m-1}(X^i=X^i_{\max})-\tau_{0\cdots i-1\,i+1\cdots m-1}(X^i=X^i_{\min})}{(m-1)!}\right],\end{aligned} \tag{1049}$$

که $\mathbb{B}_i$ تصویرِ $\mathbb{B}$ بر $X^i=0$ است،

$$X^i_{\max}=\begin{cases}X^i_0+\Delta^i, & i\neq 0\\ \min[(X^0_0+\Delta^0),0], & i=0\end{cases}, \tag{1050}$$

$$X^i_{\min}=X^i_0-\Delta^i, \tag{1051}$$

و

$$\Delta^i=\left[r^2-\sum_{j=0}^{(m-1)\backslash i}(X^j-X^j_0)^2\right]^{1/2}. \tag{1052}$$

از (1047) دیده میشود همه یِ انتگرالها یِ طرف ِ راست ِ دومین برابری در (1049) صفر َند، مگر انتگرال ِ متناظر با $X^0 = X^0_{\max}$، آن هم به شرط ی که $X^0_{\max}$ صفر باشد. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}} \mathbf{d}\,\tau &= \int_{\mathbb{B}\cap\mathbb{R}^m_0} \mathrm{d}X^1\cdots\mathrm{d}X^{m-1}\,\frac{\tau_{1\cdots m-1}(X^0=0)}{(m-1)!},\\ &= \int_{\mathbb{B}\cap\mathbb{R}^n_0} \tau. \end{aligned} \tag{1053}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ فشرده یِ m بُعدی یِ سمتپذیر، و σ یک $(m-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل بر آن است. از این که $\mathbb{M}$ فشرده است نتیجه میشود یک اتلس ِ $\mathbb{A} = \{\phi_a \mid a\}$ هست که تصویر ِ هر یک از اعضا یِ آن یک گوی (با شعاع ِ باپایان) در $\mathbb{R}^m_{-0}$ است. متناظر با این اتلس یک پارش- ِ-یک ِ $\{p_a \mid a\}$ هست. دیده میشود

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M}} \mathbf{d}\,\sigma &= \sum_a \int_{\mathbb{M}} \mathbf{d}(p_a\,\sigma),\\ &= \sum_a \int_{\mathsf{img}(\phi_a)} [(\phi_a)^{-1}]^*[\mathbf{d}(p_a\,\sigma)],\\ &= \sum_a \int_{\mathsf{img}(\phi_a)} \mathbf{d}\{[(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,\sigma)\},\\ &= \sum_a \int_{\mathbb{R}^m_0\cap\mathsf{img}(\phi_a)} [(\phi_a)^{-1}]^*(p_a\,\sigma),\\ &= \sum_a \int_{(\phi_a)^{-1}(\mathbb{R}^m_0)} p_a\,\sigma,\\ &= \sum_a \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} p_a\,\sigma, \end{aligned} \tag{1054}$$

که نتیجه میدهد

$$\int_{\mathbb{M}} \mathbf{d}\,\sigma = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} \sigma. \tag{1055}$$

به این رابطه قضیه یِ سْتُکس میگویند. برا یِ رسیدن به این رابطه فشرده-بودن ِ خمینه مهم است. اگر خمینه فشرده نباشد، ممکن است تصویر ِ همه یِ اعضا یِ اتلس ِ آن باپایان نباشد. در این صورت رابطه یِ (1053) برا یِ تصویر ِ همه یِ اعضا یِ اتلس برقرار نخاهد بود.

با استفاده از

$$\int_{f(\mathbb{M})} \sigma = \int_{\mathbb{M}} f^* \sigma, \tag{901}$$

میشود این قضیه را به حالت ی گسترش داد که ناحیه یِ انتگرالگیری مجموعه ای با بُعد ِ m در یک خمینه یِ n بُعدی ست. $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ سمتپذیر و $\mathbb{N}$ یک خمینه یِ n بُعدی ست، f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{M})$ است و یک همانریختی یِ مشتقپذیر است، و σ در $\mathcal{A}^{m-1}(\mathbb{N})$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\int_{f(\mathbb{M})} \mathbf{d}\,\sigma &= \int_{\mathbb{M}} f^* \,\mathbf{d}\,\sigma,\\ &= \int_{\mathbb{M}} \mathbf{d}\, f^* \,\sigma,\\ &= \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} f^* \,\sigma,\\ &= \int_{f[\mathbf{b}(\mathbb{M})]} \sigma,\\ &= \int_{\mathbf{b}[f(\mathbb{M})]} \sigma.\end{aligned} \tag{1056}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ سمتپذیر و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. با استفاده از عنصر- ِ-حجم و عنصر- ِ-مساحت، و دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری، میشود قضیه یِ سْتُکس را بر حسب ِ یک میدان ِ برداری (v) به این شکل نوشت.

$$\int_{\mathbb{M}} (\mathbf{div}\, v)\varepsilon = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} \varepsilon_v, \tag{1057}$$

یا

$$\int_{\mathbb{M}} (\mathbf{div}\, v)\varepsilon = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} v^i\, \varepsilon_i. \tag{1058}$$

به اینها قضیه یِ دیورژانس هم میگویند.

بر حسب ِ پایه و مئلفِها،

$$\begin{aligned}(\mathbf{div}\, v)\boldsymbol{\varepsilon} &= [\mathbf{div}(v^i\, e_i)]\, \boldsymbol{\varepsilon},\\ &= (\mathbf{D}_i\, v^i + v^i\, \mathbf{div}\, e_i)\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= (\mathbf{D}_j\, v^i)\delta^j_i\, \boldsymbol{\varepsilon} + v^i\, \mathbf{x}_{\boldsymbol{\varepsilon}\, i}\, \boldsymbol{\varepsilon},\\ &= (\mathbf{D}_j\, v^i) e^j \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i + v^i\, \mathbf{d}\, \boldsymbol{\varepsilon}_i,\\ &= (\mathbf{d}\, v^i) \wedge \boldsymbol{\varepsilon}_i + v^i\, \mathbf{d}\, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \end{aligned} \tag{1059}$$

که یعنی

$$(\mathbf{div}\, v)\, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{d}\, (v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_i). \tag{1060}$$

البته این هم ان تعریف ِ دیورژانس است. از قضیه یِ سْتُکس نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{M}} \mathbf{d}(v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \tag{1061}$$

که هم ان (1058) است. به این ترتیب، با استفاده از

$$\mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{div}\, v)\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1032}$$

میشود (1057) و (1058) را چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v\, \boldsymbol{\varepsilon} &= \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} \boldsymbol{\varepsilon}_v,\\ &= \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} v^i\, \boldsymbol{\varepsilon}_i. \end{aligned} \tag{1062}$$

اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد، (1058) به این شکل در میئاید.

$$\int_{\mathbb{M}} \Big(\mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\Big)[\mathbf{o}(e)] = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}_i(e)], \tag{1063}$$

یا

$$\int_{\mathbb{M}} (\mathbf{D}_i\, \tilde{v}^i)[\mathbf{o}(e)] = \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} \tilde{v}^i[\mathbf{o}_i(e)], \tag{1064}$$

که

$$\tilde{v}^i = v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]. \tag{1065}$$

از تعریف ِ $\mathbf{o}_i(e)$ دیده میشود

$$\mathbf{d}[\mathbf{o}_i(e)] = 0. \tag{1066}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\{\tilde{v}^i[\mathbf{o}_i(e)]\} &= (\mathbf{d}\,\tilde{v}^i)[\mathbf{o}_i(e)],\\ &= (\mathbf{D}_j\,\tilde{v}^i)e^j \wedge [\mathbf{o}_i(e)],\\ &= (\mathbf{D}_j\,\tilde{v}^i)\delta^j_i[\mathbf{o}(e)],\end{aligned} \tag{1067}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\{\tilde{v}^i[\mathbf{o}_i(e)]\} = (\mathbf{D}_i\,\tilde{v}^i)[\mathbf{o}(e)]. \tag{1068}$$

به این ترتیب رُشن است که (1064) در واقع یک شکل ِ (1055) است.

$\mathbb{M}$ یک زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ است، چنان که بُعد ِ $\mathbb{M}$ با بُعد ِ $\tilde{\mathbb{M}}$ برابر است. $\tilde{\mathbb{M}}$ سمتدار است و ε یک عنصر- ِ-حجم ِ آن است. Σ یک میدان ِ اسکالر بر $\tilde{\mathbb{M}}$ است، و f در $\mathsf{F}(\tilde{\mathbb{M}};\tilde{\mathbb{M}})$ است و هموار و وارونپذیر است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\int_{f(\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon} &= \int_{\mathbb{M}} f^*(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}),\\ &= \int_{\mathbb{M}}(f^{-1})_*(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}).\end{aligned} \tag{1069}$$

از جمله متناظر با میدان ِ برداری یِ v بر $\tilde{\mathbb{M}}$،

$$\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\mathbb{M}}[\mathsf{fl}(-t\,v)]_*(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{1070}$$

از این نسبت به t مشتق میگیرم. به فرض ِ آن که در طرف ِ راست بشود مشتقگیری را با انتگرالگیری جابِجا کرد،

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right](0)=\int_{\mathbb{M}}\mathbf{L}_v(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}). \tag{1071}$$

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right](0)=\int_{\mathbb{M}}\mathbf{L}_{\Sigma\,v}\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1072}$$

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right](0)=\int_{\mathbb{M}}[\mathbf{div}(\Sigma\,v)]\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1073}$$

به این ترتیب، اگر $\mathbb{M}$ فشرده باشد،

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right](0)=\int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}_v. \tag{1074}$$

از جمله، اگر

$$[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})=\mathbb{M}, \tag{1075}$$

(دست- ِ-کم برا یِ t ها یِ در یک همسایِگی یِ باز ِ 0)

$$\int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})}\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon}_v=0. \tag{1076}$$

$$\int_{\mathbb{M}}[\mathbf{div}(\Sigma\,v)]\boldsymbol{\varepsilon}=0. \tag{1077}$$

$$\int_{\mathbb{M}}\mathbf{L}_v(\Sigma\,\boldsymbol{\varepsilon})=0. \tag{1078}$$

همچنین اگر $\mathbb{M}$ فشرده و بیمرز باشد، (1078) برقرار است. از جمله اگر $\mathbb{M}$ فشرده و بیمرز باشد و Σ و v بر $\mathbb{M}$ تعریف شده باشند، (1078) برقرار است. در واقع متناظر با فرم- ِ-دیفرانسیل ِ دلبخاه ِ τ که گونه اَش با بُعد ِ خمینه برابر است، چه $\mathbb{M}$ فشرده یا بیمرز باشد و چه نباشد،

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\tau\right)\right](0)=\int_{\mathbb{M}}\mathbf{L}_v\,\tau, \tag{1079}$$

و اگر $\mathbb{M}$ فشرده باشد،

$$\left[\mathbf{D}\left(\int_{[\mathsf{fl}(t\,v)](\mathbb{M})}\tau\right)\right](0)=\int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})}\mathbf{i}_v\,\tau, \tag{1080}$$

و اگر $\mathbb{M}$ فشرده و بیمرز باشد

$$\int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v \, \tau = 0. \tag{1081}$$

4

مشتق ِ هموردا

35 افکنش ِ قائم

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$، و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. ξ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ است. برا یِ افکندن ِ ξ بر $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}$ ساختار ِ جدید ی لازم نیست:

$$\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi\} \in \mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{1082}$$

اما برا یِ افکندن ِ ξ بر $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ ساختار ِ جدید ی لازم است. البته اگر U یک بدیهیگر باشد،

$$\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\Big) \in \mathsf{LF}[\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)};\mathrm{T}_z\mathbb{E}]. \tag{1083}$$

این نتیجه میدهد اگر

$$\tilde{\xi} = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\xi, \tag{1084}$$

آنگاه

$$\tilde{\xi} \in \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{1085}$$

در واقع

$$\tilde{\xi} = [(\mathsf{I} \circ U^{-1})(z)]\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\xi, \tag{1086}$$

که I با (275) تعریف شده:

$$\mathsf{I}_a(x, \boldsymbol{\cdot}) = \mathbf{D}[U_a(x, \boldsymbol{\cdot})]. \tag{275}$$

$\tilde{\xi}$ به این ترتیب به دست آمده که ξ با استفاده از بدیهیگر ِ U (در واقع با استفاده از مشتق ِ وارون ِ U) به یک بردار در $\{[\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}] \times [\mathrm{T}_{\overset{0}{(\mathbf{\Pi}_1 \circ U^{-1})}(z)}\mathbb{Y}]\}$ نگاشته شده، بخش ِ متناظر با $[\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}]$ حذف شده، و حاصل به $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ نگاشته شده. حذف ِ بخش ِ متناظر با $[\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}]$ و نگاشته-شدن به $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$، با I انجام شده. اما $\tilde{\xi}$ به بدیهیگر بستِگی دارد. اگر U_a و U_b دُ بدیهیگر باشند، و I_a و I_b به شکل ِ (275) از به ترتیب U_a و U_b ساخته شده باشند،

$$\begin{aligned}
&[(\mathsf{I}_b \circ U_b^{-1})(z)]\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},\\
&= [(\mathsf{I}_a \circ U_a^{-1})(z)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_a^{-1} \circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},\\
&= [(\mathsf{I}_a \circ U_a^{-1})(z)]\{[\mathbf{D}(U_a^{-1} \circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\\
&\quad - [(\mathsf{I}_a \circ U_a^{-1})(z)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(U_a^{-1} \circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},\\
&= [(\mathsf{I}_a \circ U_a^{-1})(z)]\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}\\
&\quad - [(\mathsf{I}_a \circ U_a^{-1})(z)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\},
\end{aligned} \tag{1087}$$

که $U_{a\,b}$ تابع-ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b است. به این ترتیب،

$$\tilde{\xi}_b = \tilde{\xi}_a - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\, U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\} \tag{1088}$$

که

$$u = [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi, \tag{1089}$$

و $\tilde{\xi}_a$ و $\tilde{\xi}_b$ با به ترتیب U_a و U_b ساخته شده اند.

برا یِ نگاشتن ِ $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ بر $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ ساختار ی لازم است، که اصولَن بین ِ دُ تار با x ها یِ مختلف (و البته نزدیک به هم) یک تناظر ِ یک-به-یک برقرار میکند. به این ساختار هموستار میگویند. از جمله با این ساختار میشود تعیین کرد کدام برشها (مُضعَن) ثابت َند (مشتق ِشان صفر است)، به این معنی که با تغییر-دادن ِ x، نقطه یِ رو یِ تار عوض نمیشود. اگر E در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{M})$ باشد، $(\mathbf{D}\,E)(x)$ در $\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E};\mathrm{T}_x\mathbb{M}]$ است. به این ترتیب اثر ِ $(\mathbf{D}\,E)(x)$ بر یک بردار در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ یک بردار در $\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}$ است. این بردار را میشود با اثردادن ِ $\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ E](x)\}$ بر آن به بردار ی در $\mathrm{T}_{(\boldsymbol{\pi}\circ E)(x)}\mathbb{M}$ افکند:

$$\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ E](x)\}\in\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{(\boldsymbol{\pi}\circ E)(x)}\mathbb{M};\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}],\tag{1090}$$

که نتیجه میدهد

$$\Big(\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ E](x)\}[(\mathbf{D}\,E)(x)]\Big)\in\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{(\boldsymbol{\pi}\circ E)(x)}\mathbb{M};\mathrm{T}_x\mathbb{M}].\tag{1091}$$

البته این رابطه بدیهی ست، چون $\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ E](x)\}[(\mathbf{D}\,E)(x)]$ مشتق ِ $(\boldsymbol{\pi}\circ E)$ در نقطه یِ x است. از جمله اگر E یک برش ِ باشد،

$$\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ E](x)\}[(\mathbf{D}\,E)(x)]=\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}.\tag{1092}$$

اما چون برا یِ افکندن ِ اعضا یِ $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ بر $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ چنین-راه ِ طبیعی یی نیست، ساختن ِ تابع ی از رو یِ $(\mathbf{D}\,E)(x)$ که اثر َش بر یک عضو ِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ در $\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x$ باشد به یک ساختار ِ جدید نیاز دارد، که هم ان هموستار است.

36 هموستار

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. میگویم $\boldsymbol{W}$ هموستار است، اگر این ویژگیها برقرار باشد

$\boldsymbol{W}\in\mathsf{F}[\mathrm{T}\mathbb{E};(\mathrm{T}\mathbb{M}\oplus\mathbb{E})].$ **d1**

$\forall\,z\in\mathbb{E}\ :\ \boldsymbol{W}_{\bullet}(z)\in\mathsf{LF}[\mathrm{T}_z\mathbb{E};\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}].$ **d2**

$$\forall\, z \in \mathbb{E} \;:\; [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)] \circ [\boldsymbol{W}_{\bullet}(z)] = -\mathbf{1}_{\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}}. \qquad \textbf{d3}$$

با این ساختار میشود یک بردار ِ ξ که در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ است را به یک بردار در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ افکند. تعریف میکنم

$$\boldsymbol{\nu}\,\xi = \xi + \boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z). \tag{1093}$$

$\boldsymbol{\nu}$ به رُشنی خطی ست. همچنین،

$$\begin{aligned}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\boldsymbol{\nu}\,\xi &= [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi - [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi,\\ &= 0,\end{aligned} \tag{1094}$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\nu}\,\xi) \in \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{1095}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}\{\boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z)\} &= \boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z) + \boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\{\boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z)\}}(z),\\ &= \boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z) + \boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)](-\xi)}(z),\end{aligned} \tag{1096}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\nu}\{\boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z)\} = 0, \tag{1097}$$

و از آنجا،

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\,\xi) = \boldsymbol{\nu}\,\xi, \tag{1098}$$

یا،

$$\boldsymbol{\nu}^2 = \boldsymbol{\nu}, \tag{1099}$$

یعنی $\boldsymbol{\nu}$ یک افکنش است. به این ترتیب رُشن است که $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})$ هم افکنش است:

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^2=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}), \tag{1100}$$

و البته

$$\begin{aligned}0&=\boldsymbol{\nu}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}),\\&=(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu}.\end{aligned} \tag{1101}$$

از جمله رُشن است که اثر ِ $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})$ بر $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ صفر است:

$$[\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}]\subseteq \mathsf{ker}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}). \tag{1102}$$

به این ترتیب، رابطه یِ

$$\xi=\boldsymbol{\nu}\,\xi+(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi, \tag{1103}$$

که ξ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ است، تجزیه یِ ξ به دُ بردار، یک ی در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ و دیگری در فضا یِ متمم ِ آن است:

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_z\mathbb{E}&=[\boldsymbol{\nu}(\mathrm{T}_z\mathbb{E})]\oplus[(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathrm{T}_z\mathbb{E})],\\&=[\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}]\oplus[(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathrm{T}_z\mathbb{E})].\end{aligned} \tag{1104}$$

به $(\boldsymbol{\nu}\,\xi)$ قائم-افکنده یِ ξ، و به $[(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi]$ افقی-افکنده یِ ξ میگوییم. رُشن است که

$$(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi=-\boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z). \tag{1105}$$

U یک بدیهیگر است. متناظر با (u,z) که در $(\mathrm{T}\mathbb{M}\oplus\mathbb{E})$ است، از **d3** نتیجه میشود

$$\begin{aligned}u&=-[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)][\boldsymbol{W}_u(z)]\\&=-\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\Big)[\boldsymbol{W}_u(z)].\end{aligned} \tag{1106}$$

به این ترتیب، با تعریف ِ

$$W_u[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U^{-1})(z)]=\Big(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\Big)[\boldsymbol{W}_u(z)], \tag{1107}$$

یا

$$W_u(y) = \Big(\{\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ [\mathbf{D}(U^{-1})] \circ U\}(x,y)\Big)[(\boldsymbol{W}_u \circ U)(x,y)], \tag{1108}$$

نتیجه میشود

$$\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}[\boldsymbol{W}_u(z)] = \{-u, W_u[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1})(z)]\}, \tag{1109}$$

یا

$$\boldsymbol{W}_u(z) = \{(\mathbf{D}\,U)[U^{-1}(z)]\}\{-u, W_u[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1})(z)]\}, \tag{1110}$$

که میشود آن را چنین هم نوشت.

$$\boldsymbol{W}_u[U(x,y)] = [(\mathbf{D}\,U)(x,y)]\,[-u, W_u(y)], \tag{1111}$$

$W_u(y)$ در $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ است، که $\mathbb{Y}$ تار ُ نُعی یِ $\mathbb{E}$ است. این یعنی هموستار با فقط W مشخص میشود، که در $\mathsf{F}[\mathrm{T}\mathbb{Y}; (\mathrm{T}\mathbb{M} \times \mathbb{Y})]$ است، با این ویژِگی که

$$W_{\bullet}(y) \in \mathsf{F}(\mathrm{T}_y\mathbb{Y}; \mathrm{T}\mathbb{M}), \tag{1112}$$

$$\mathsf{res}[W_{\bullet}(y), \mathrm{T}_x\mathbb{M}] \in \mathsf{LF}(\mathrm{T}_y\mathbb{Y}; \mathrm{T}_x\mathbb{M}). \tag{1113}$$

به این ترتیب، با $\xi = [(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q)$ دیده میشود

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}\,\xi &= [(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q) + [(\mathbf{D}\,U)(x,y)][-u, W_u(y)], \\ &= [(\mathbf{D}\,U)(x,y)][0, q + W_u(y)], \end{aligned} \tag{1114}$$

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{\nu})\xi = [(\mathbf{D}\,U)(x,y)][u, -W_u(y)], \tag{1115}$$

یا

$$\boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q) = [(\mathbf{D}\,U)(x,y)][0, q + W_u(y)]. \tag{1116}$$

$$(\mathbf{1} - \boldsymbol{\nu})[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q) = [(\mathbf{D}\,U)(x,y)][u, -W_u(y)]. \tag{1117}$$

همچنین دیده میشود

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x,y)]\}\boldsymbol{\nu}\,\xi = 0, \tag{1118}$$

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x,y)]\}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi = u, \tag{1119}$$

$$[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi = [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi, \tag{1120}$$

یا

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x,y)]\}\boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q) = 0. \tag{1121}$$

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x,y)]\}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q) = u. \tag{1122}$$

هموستار را میشود به جا یِ W با w مشخص کرد، که

$$w_u(z) = \{[\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\Big(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\Big)[\boldsymbol{W}_u(z)]. \tag{1123}$$

به این ترتیب،

$$w_u(z) = \{[\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\{W_u[(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1})(z)]\}, \tag{1124}$$

یا

$$w_u[U(x,y)] = \{[\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U](x,y)\}[W_u(y)], \tag{1125}$$

که u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. دیده میشود

$$w_u(z) \in \mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}. \tag{1126}$$

به W یا w بخش ِ قائم ِ هموستار (یا گاه ی سادِتر، هموستار) میگویم.

بخش ِ قائم ِ هموستار به بدیهیگر وابسته است. W متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b را با به ترتیب W_a و W_b نمایش میدهم. تابع- ِ-گذار ِ متناظر با U_a و U_b را هم با $U_{a\,b}$ نمایش میدهم. با

$z = U_a(x, y_a) = U_b(x, y_b)$، دیده میشود

$$\begin{aligned}
[-u, W_{a\,u}(y_a)] &= \{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}[\boldsymbol{W}_u(z)],\\
&= \{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}[\boldsymbol{W}_u(z)],\\
&= \{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}[-u, W_{b\,u}(y_b)],\\
&= \{-u, [(\mathbf{D}\,U_{a\,b})(x, y_b)][-u, W_{b\,u}(y_b)]\},
\end{aligned} \tag{1127}$$

که نتیجه میدهد

$$W_{a\,u}(y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x, y_b)\}[W_{b\,u}(y_b)] - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}](x, y_b), \tag{1128}$$

یا

$$W_a(x, y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x, y_b)\}[W_b(x, y_b)] - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}](x, y_b), \tag{1129}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$W_a\circ U_a^{-1}\circ U_b = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}]W_b - \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}. \tag{1130}$$

w متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b را با به ترتیب w_a و w_b نمایش میدهم. از (1128) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
w_{a\,u}(z) &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\{W_{b\,u}[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_b^{-1})(z)]\}\\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\},\\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_b][U_b^{-1}(z)]\}\{W_{b\,u}[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_b^{-1})(z)]\}\\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\},
\end{aligned} \tag{1131}$$

که نتیجه میدهد

$$w_{a\,u}(z) = w_{b\,u}(z) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}, \tag{1132}$$

یا

$$w_a(z) = w_b(z) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}. \tag{1133}$$

از جمله دیده میشود اگر $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ دُ هموستار بر یک کلاف باشند،

$$(W_{2\,a\,u} - W_{1\,a\,u})(y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}](x, y_b)\}[(W_{2\,b\,u} - W_{1\,b\,u})(y_b)], \tag{1134}$$

$$(W_{2\,a} - W_{1\,a})(x, y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}](x, y_b)\}[(W_{2\,b} - W_{1\,b})(x, y_b)], \tag{1135}$$

یا

$$(W_{2\,a} - W_{1\,a}) \circ U_a^{-1} \circ U_b = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}](W_{2\,b} - W_{1\,b}). \tag{1136}$$

همچنین،

$$w_{2\,a} - w_{1\,a} = w_{2\,b} - w_{1\,b}. \tag{1137}$$

یعنی تفاضل ِ w_i ها به بدیهیگر بستِگی ندارد. سرانجام، متناظر با بدیهیگر ِ U،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{W}_{2\,u} - \boldsymbol{W}_{1\,u})[U(x, y)] &= [(\mathbf{D}\, U)(x, y)][0, (W_{2\,u} - W_{1\,u})(y)],\\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U](x, y)\}[(W_{2\,u} - W_{1\,u})(y)].\end{aligned} \tag{1138}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}&\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x, y)]\}\{(\boldsymbol{W}_{2\,u} - \boldsymbol{W}_{1\,u})[U(x, y)]\},\\ &= \{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[U(x, y)]\}[(\mathbf{D}\, U)(x, y)][0, (W_{2\,u} - W_{1\,u})(y)],\\ &= \{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi} \circ U)](x, y)\}[0, (W_{2\,u} - W_{1\,u})(y)],\\ &= \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0[0, (W_{2\,u} - W_{1\,u})(y)],\\ &= 0.\end{aligned} \tag{1139}$$

این یعنی $(\boldsymbol{W}_{2\,u} - \boldsymbol{W}_{1\,u})(z)$ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}z}$ است، هر چند $\boldsymbol{W}_{1\,u}(z)$ و $\boldsymbol{W}_{2\,u}(z)$ هیچ کدام در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}z}$ نیستند.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. متناظر با هر x که در $\mathbb{M}$ است، میشود بدیهیگر ی یافت که بخش ِ قائم ِ هموستار متناظر با آن بدیهیگر، در $\mathbb{E}_x$ صفر شود. این از آنجا میئاید که اگر W_a و W_b بخشها یِ قائم ِ $\boldsymbol{W}$ متناظر با بدیهیگرها یِ به ترتیب a و b باشند، آنگاه از (1129) دیده میشود صفر-شدن ِ $W_b(x,\bullet)$ همئرز است با

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}](x,\bullet) = -W_a[x, U_{a\,b}(x,\bullet)], \tag{1140}$$

این معادله برا یِ $U_{a\,b}$ جواب دارد. در واقع یک جواب ِ ساده یِ آن با

$$\begin{aligned} U_{a\,b}(x,\bullet) &= \mathbf{1}, \\ [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}](x,\bullet) &= -W_a(x,\bullet) \end{aligned} \tag{1141}$$

به دست میئاید. البته با این جواب، معادله یِ (1140) فقط در x برقرار است. به هم ین خاطر با انتخاب ِ $U_{a\,b}$ به شکل ِ بالا، W_b در فقط x صفر میشود. شرط ِ این که (1140) در یک همسایِگی (نَ فقط در یک نقطه) برقرار باشد، از این به دست میئاید که مشتق ِ دوم ِ $U_{a\,b}(\bullet, y_b)$ متقارن است. دیده میشود

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\,U_{a\,b} &= -\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}[W_{a\,j}\circ(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0, U_{a\,b})], \\ &= -[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,W_{a\,j}]\circ(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0, U_{a\,b}) \\ &\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,W_{a\,j}]\circ(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0, U_{a\,b})\}\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,U_{a\,b}], \\ &= \{-\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}W_{a\,j} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,W_{a\,j}]\,W_{a\,i}\}\circ(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0, U_{a\,b}), \end{aligned} \tag{1142}$$

که نشان میدهد شرط ِ وجود ِ $U_{a\,b}$ یی که (1140) را در یک همسایِگی براورَد این است که

$$-\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\,W_{a\,i} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,W_{a\,i}]W_{a\,j} = -\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,W_{a\,j} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,W_{a\,j}]W_{a\,i}. \tag{1143}$$

این شرط در حالت ِ کلی برقرار نیست. پس در حالت ِ کلی نمیشود بخش ِ قائم ِ هموستار را در یک همسایِگی (از یک نقطه در خمینه-یِ-پایه) صفر کرد. اما در حالت ِ کلی میشود بخش ِ قائم ِ هموستار را در یک نقطه از خمینه-یِ-پایه صفر کرد. البته در این حالت هم هموستار، حتا در هم ان نقطه، صفر نیست، چون بر اساس ِ **d3** اثر ِ $(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})$ بر هموستار ناصفر است.

رُشن است که $W(x,\bullet)$ صفر است، اگر و تنها اگر $\mathrm{res}[w;\boldsymbol{\pi}^{-1}(x)]$ صفر باشد. پس صفر-شدن ِ بخش ِ قائم ِ هموستار (در یک نقطه یا یک همسایِگی از خمینه-یِ-پایه) را میشود به جا یِ W

بر حسب ِ w هم بیان کرد.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. هر یک از $W^\alpha(x,y)$ ها یک یک-فرم بر $\mathbb{M}$ است. به اینها یک-فرم- ِ-هموستار میگویم.

$$W = W_i\, e^i,$$
$$W^\alpha = W^\alpha{}_i\, e^i, \tag{1144}$$

که $\{(i, e^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ است. همچنین،

$$w = w_i\, e^i,$$
$$w^r = w^r{}_i\, e^i. \tag{1145}$$

البته یک-فرم- ِ-هموستارها به بدیهیگر بستِگی دارند. از (1129) دیده میشود

$$\begin{aligned} W^\alpha_a(x,y_a) &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^\alpha_{a\,b}](x,y_b)\}[W^\beta_b(x,y_b)] - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U^\alpha_{a\,b}](x,y_b), \\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^\alpha_{a\,b}](x,y_b)\}[W^\beta_b(x,y_b)] - [\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, U^\alpha_{a\,b}](x,y_b), \end{aligned} \tag{1146}$$

یا

$$W^\alpha_a \circ U_a^{-1} \circ U_b = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^\alpha_{a\,b}]W^\beta_b - \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, U^\alpha_{a\,b}. \tag{1147}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} w^r_a(z) &= w^r_b(z) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U^r_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}, \\ &= w^r_b(z) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^r_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, U^\beta_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}. \end{aligned} \tag{1148}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. ξ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ است. $\boldsymbol{\pi}(z)$ را با x، و $\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi\}$ را با u نشان میدهم. متناظر با هر بدیهیگر U_a یک و فقط یک y_a هست که $U_a(x,y_a)$ برابر با z است. دیده میشود اگر

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}\xi = (u, \chi_a), \tag{1149}$$

آنگاه ،

$$(u,\chi_a)=\{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)\}\xi,$$
$$=\{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}[u,\chi_b], \tag{1150}$$

یا

$$(u,\chi_a)=\{u,[(\mathbf{D}\,U_{a\,b})(x,y_b)](u,\chi_b)\}, \tag{1151}$$

که نتیجه میدهد

$$\chi_a=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y_b)\}\chi_b+[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}](x,y_b). \tag{1152}$$

از این رابطه دیده میشود با تبدیلِ u در طرفِ چپِ (1149) به صفر هم نمیشود یک عضوِ $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_x$ به دست آورد که مستقل از بدیهیگر باشد، چون اگر ς در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_x$ باشد،

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}\varsigma=\{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1})](z)]\}\varsigma,$$
$$=\{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}(0,\chi_b),$$
$$=\Big(0,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\chi_b\Big), \tag{1153}$$

که نشان میدهد

$$\chi_a=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\chi_b, \tag{1154}$$

و این با (1152) سازگار نیست. اما $(\boldsymbol{\nu}\,\xi)$ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_x$ است:

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}(\boldsymbol{\nu}\,\xi)=\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}[\xi+\boldsymbol{W}_u(z)],$$
$$=[0,\chi_a+W_{a\,u}(y_a)],$$
$$=\Big(0,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y_b)]\}[\chi_b+W_{b\,u}(y_b)]\Big), \tag{1155}$$

یا سادِتر (با حذفِ مثلفه یِ صفرمِ طرفِ راست، که 0 است)،

$$[\chi_a+W_{a\,u}(y_a)]=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y_b)]\}[\chi_b+W_{b\,u}(y_b)], \tag{1156}$$

با مشتق ِ یک برش هم میشود کمیتها یِ مشابه ی ساخت. E در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ است. پس

$$[(\mathbf{D}\,E)(x)] \in \mathsf{LF}[\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E};\mathrm{T}_x\mathbb{M}]. \tag{1157}$$

از

$$\boldsymbol{\pi}\circ\,E=\mathbf{1}_{\mathbb{M}}, \tag{432}$$

نتیجه میشود

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[E(x)]\}[(\mathbf{D}\,E)(x)]=\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}. \tag{1158}$$

از ترکیب ِ این با **d3** هم نتیجه میشود اگر $\boldsymbol{W}$ یک هموستار باشد،

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[E(x)]\}\{(\mathbf{D}\,E)(x)+\boldsymbol{W}[E(x)]\}=0, \tag{1159}$$

که نتیجه میدهد اگر u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد،

$$\{(\mathbf{D}_u\,E)(x)+\boldsymbol{W}_u[E(x)]\}\in\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x. \tag{1160}$$

به این ترتیب،

$$\{(\mathbf{D}\,E)(x)+\boldsymbol{W}[E(x)]\}\in\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x;\mathrm{T}_x\mathbb{M}]. \tag{1161}$$

به زبان ِ بدیهیگر،

$$[x,y_a(x)]=U_a^{-1}[E(x)], \tag{1162}$$

که نتیجه میدهد

$$[\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}},(\mathbf{D}\,y_a)(x)]=[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ E)](x), \tag{1163}$$

یا

$$[u,(\mathbf{D}_u\,y_a)(x)]=[\mathbf{D}_u(U_a^{-1}\circ E)](x). \tag{1164}$$

با بدیهیگر ِ U_b نتیجه میشود

$$[\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}, (\mathbf{D}\, y_a)(x)] = \{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][(U_b^{-1}\circ E)(x)]\}\{[\mathbf{D}(U_b^{-1}\circ E)](x)\},$$
$$= \{[\mathbf{D}(U_a^{-1}\circ U_b)][(U_b^{-1}\circ E)(x)]\}[\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}, (\mathbf{D}\, y_b)(x)], \quad (1165)$$

یا

$$[u, (\mathbf{D}_u\, y_a)(x)] = \Big(u, \{(\mathbf{D}\, U_{a\,b})[x, y_b(x)]\}[u, (\mathbf{D}_u\, y_b)(x)]\Big), \quad (1166)$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{D}_u\, y_a)(x) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}[(\mathbf{D}_u\, y_b)(x)]$$
$$+ \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}u, \quad (1167)$$

یا

$$(\mathbf{D}\, y_a)(x) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}[(\mathbf{D}\, y_b)(x)]$$
$$+ \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}. \quad (1168)$$

رابطه یِ (1164) نشان میدهد $[(\mathbf{D}_u\, E)(x)]$ در $\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x$ نیست. چون اگر ς در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_x$ باشد،

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}\varsigma = (0, \chi_a). \quad (1169)$$

با تبدیل ِ u در طرف ِ چپ ِ (1164) به صفر هم نمیشود یک عضو ِ $\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x$ به دست آورد که مستقل از بدیهیگر باشد، چون اگر ς در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_x$ باشد، (1154) نتیجه میشود، که با (1167) سازگار نیست. اما دیده میشود $\{(\mathbf{D}_u\, E)(x) + \boldsymbol{W}_u[E(x)]\}$ در $\mathrm{T}_{E(x)}\mathbb{E}_x$ است:

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})][E(x)]\}\{(\mathbf{D}_u\, E)(x) + \boldsymbol{W}_u[E(x)]\},$$
$$= \{0, (\mathbf{D}_u\, y_a)(x) + W_{a\,u}[y_a(x)]\},$$
$$= \Big(0, \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}\{(\mathbf{D}_u\, y_b)(x) + W_{b\,u}[y_b(x)]\}\Big), \quad (1170)$$

یا سادِتر (با حذفِ مئلفه یِ صفرمِ طرفِ راست، که 0 است)،

$$(\mathbf{D}_u\, y_a)(x) + W_{a\,u}[x, y_a(x)] = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}][x, y_b(x)]\}$$
$$\{(\mathbf{D}_u\, y_b)(x) + W_{b\,u}[x, y_b(x)]\}, \tag{1171}$$

یا

$$(\mathbf{D}\, y_a)(x) + W_a[x, y_a(x)] = \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b})[x, y_b(x)]\}$$
$$\{(\mathbf{D}\, y_b)(x) + W_b[x, y_b(x)]\}. \tag{1172}$$

37 مشتقِ هموردا

$\mathbb{E}$ یک کلافِ هموار با افکنشِ $\boldsymbol{\pi}$ است، که بر آن هموستارِ $\boldsymbol{W}$ تعریف شده. $\mathbb{L}$ یک خمینه و $\mathfrak{E}$ تابع ی هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ است. با r در $\mathbb{L}$،

$$[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)] \in \{\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{\mathfrak{E}(r)}\mathbb{E}; \mathrm{T}_r\mathbb{L}]\}. \tag{1173}$$

به این ترتیب،

$$\{\boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]\} \in \{\mathsf{LF}[\mathrm{T}_{\mathfrak{E}(r)}\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}; \mathrm{T}_r\mathbb{L}]\}, \tag{1174}$$

که $\boldsymbol{\nu}$ با هموستارِ $\boldsymbol{W}$ تعریف شده. مشتقِ هموردا یِ $\mathfrak{E}$ را با $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})$ نمایش میدهم و اثرِ $[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]$ بر بردارِ θ (که در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ است) را چنین تعریف میکنم.

$$[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]\theta = \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]\theta. \tag{1175}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) = \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]. \tag{1176}$$

اثر ِ $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)$ بر θ را با $(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})$ نمایش میدهم. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E} = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}). \tag{1177}$$

باز-شده یِ اینها را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]\theta &= (\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})(r),\\ &= (\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})(r) + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)\}\theta}[\mathfrak{E}(r)],\\ &= \Big((\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r) + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)\}\bullet}[\mathfrak{E}(r)]\Big)\theta.\end{aligned} \tag{1178}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r) + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)\}\bullet}[\mathfrak{E}(r)]. \tag{1179}$$

با $(U^{-1}\circ\mathfrak{E})(r) = [x(r), y(r)]$ دیده میشود

$$\{[\mathbf{D}(U^{-1}])[\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)] = \Big(0, (\mathbf{D}\,y)(r) + \{W[x(r), y(r)]\}[(\mathbf{D}\,x)(r)]\Big), \tag{1180}$$

یا

$$\begin{aligned}\Big(\{[\mathbf{D}(U^{-1})][\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]\Big)^\alpha &= (\mathbf{D}\,y^\alpha)(r) + \{W^\alpha[x(r), y(r)]\}[(\mathbf{D}\,x)(r)],\\ &= (\mathbf{d}\,y^\alpha)(r) + \{W^\alpha[x(r), y(r)]\}[(\mathbf{D}\,x)(r)].\end{aligned} \tag{1181}$$

گاه ی این را سادِتر

$$(\nabla\,\mathfrak{E})^\alpha(r) = (\mathbf{d}\,y^\alpha)(r) + \{W^\alpha[x(r), y(r)]\}[(\mathbf{D}\,x)(r)] \tag{1182}$$

مینویسم، که

$$(\nabla\,\mathfrak{E})(r) = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\Big(\{[\mathbf{D}(U^{-1})][\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]\Big), \tag{1183}$$

یا باز هم سادِتر،

$$(\nabla\,\mathfrak{E})(r) = \{[\mathbf{D}(U^{-1})][\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)], \tag{1184}$$

و به شکل ِ مئلفِئی

$$(\nabla_\lambda\,\mathfrak{E})^\alpha(r) = (\mathbf{D}_\lambda\,y^\alpha)(r) + \{W^\alpha{}_i[x(r),y(r)]\}[(\mathbf{D}_\lambda\,x^i)(r)]. \tag{1185}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) &= \Big((\mathbf{D}\,U)\{U^{-1}[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)[0,(\nabla\,\mathfrak{E})(r)],\\ &= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]\{U^{-1}[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)[(\nabla\,\mathfrak{E})(r)].\end{aligned} \tag{1186}$$

مشتق ِ هموردا یِ یک برش حالت ِ خاص ی از مشتق ِ هموردا یِ تابعها یِ با مقدار در کلاف است. اگر E یک برش باشد، $(\boldsymbol{\pi}\circ E)$ همانی ست. در این حالت r هم ان x است، و $\mathbb{L}$ هم ان $\mathbb{M}$ (خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$) است. به این ترتیب، مانستِها یِ (1178) تا (1182) برا یِ برش ِ E و بردار ِ u (که در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است) میشوند

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\nabla}\,E)(x)]u &= [(\mathbf{D}\,E)(x)]\,u + \{\boldsymbol{W}[E(x)]\}u,\\ &= (\mathbf{D}_u\,E)(x) + \boldsymbol{W}_u[E(x)].\end{aligned} \tag{1187}$$

$$\{[\mathbf{D}(U^{-1})][E(x)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,E)(x)] = \{0,(\mathbf{D}\,y)(x) + W[x,y(x)]\}. \tag{1188}$$

$$\begin{aligned}\Big(\{[\mathbf{D}(U^{-1})][E(x)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,E)(x)]\Big)^\alpha &= (\mathbf{D}\,y^\alpha)(x) + W^\alpha[x,y(x)],\\ &= (\mathbf{d}\,y^\alpha)(x) + W^\alpha[x,y(x)].\end{aligned} \tag{1189}$$

$$(\nabla\,E)^\alpha(x) = (\mathbf{d}\,y^\alpha)(x) + W^\alpha[x,y(x)]. \tag{1190}$$

مانسته یِ (1185) هم میشود

$$(\nabla_i\,E)^\alpha(x) = (\mathbf{D}_i\,y^\alpha)(x) + W^\alpha{}_i[x,y(x)]. \tag{1191}$$

$\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار است، که U یک بدیهیگرِ آن است. از خطی-بودنِ $\check{U}(x)$ نتیجه میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U](x,y) = \check{U}(x). \tag{1192}$$

به این ترتیب اگر $\mathfrak{E}$ یک تابعِ هموار باشد که در کلافِ برداری یِ هموارِ $\mathbb{E}$ مقدار میگیرد، $\boldsymbol{\pi}$ افکنشِ $\mathbb{E}$ باشد، و U یک بدیهیگر برا یِ $\mathbb{E}$ باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) = \{\check{U}[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[(\nabla\,\mathfrak{E})(r)]. \tag{1193}$$

$\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار با افکنشِ $\boldsymbol{\pi}$ است، و $\mathbb{L}$ و $\mathbb{N}$ خمینه اند. f و $\mathfrak{E}$ تابعها یی هموار در، به ترتیب، $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{L})$ و $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{N})$ اند. به این ترتیب $(\mathfrak{E}\circ f)$ تابع ی هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ است. با هموستارِ $\boldsymbol{W}$ بر $\mathbb{E}$، میشود مشتقِ هموردا یِ $(\mathfrak{E}\circ f)$ را حساب کرد. با θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_\theta(\mathfrak{E}\circ f) &= \boldsymbol{\nu}[\mathbf{D}_\theta(\mathfrak{E}\circ f)],\\
&= \mathbf{D}_\theta(\mathfrak{E}\circ f) + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E}\circ f)](r)\}\theta}[(\mathfrak{E}\circ f)(r)],\\
&= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})[f(r)]\}\,(\mathbf{D}_\theta\, f) + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})][f(r)]\}[(\mathbf{D}_\theta)f]}\{\mathfrak{E}[f(r)]\},\\
&= \Big((\mathbf{D}\,\mathfrak{E})[f(r)] + \boldsymbol{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})][f(r)]\}}.\{\mathfrak{E}[f(r)]\}\Big)(\mathbf{D}_\theta\, f).
\end{aligned} \tag{1194}$$

پس،

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta(\mathfrak{E}\circ f) = \{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})[f(r)]\}(\mathbf{D}_\theta\, f), \tag{1195}$$

یا

$$[\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{E}\circ f)](r) = \{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})[f(r)]\}[(\mathbf{D}\, f)(r)]. \tag{1196}$$

نتیجه شبیهِ قاعده یِ زنجیرئی برا یِ مشتقِ تابعها یِ مرکب است. این رابطه را میشود چنین هم نوشت.

$$(\boldsymbol{\nabla}\, f^*\,\mathfrak{E})(r) = [(\mathbf{D}\, f)(r)]^*(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})[f(r)], \tag{1197}$$

که با مقایسه با اثرِ f^* بر یک میدانِ تانسری یِ نُعِ $(0,1)$ نشان میدهد $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})$ شبیهِ یک میدانِ تانسری یِ نُعِ $(0,1)$ است. به این معنی، میشود نوشت

$$\boldsymbol{\nabla}\, f^*\,\mathfrak{E} = f^*\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}. \tag{1198}$$

رُشن است که این نتایج برا یِ حالت ِ خاص ی که $\mathfrak{E}$ یا $(\mathfrak{E} \circ f)$ برش باشند هم برقرار است. در این حالتها، به ترتیب، $\mathbb{N}$ یا $\mathbb{L}$ خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$ اند.

همچنین، به سادِگی دیده میشود اگر f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{L})$ باشد و وارون َش هموار باشد، و $\mathfrak{F}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ باشد و هموار باشد، $(f_* \mathfrak{F})$ تابع ی هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{N})$ است و

$$\boldsymbol{\nabla} f_* \mathfrak{F} = f_* \boldsymbol{\nabla} \mathfrak{F}. \tag{1199}$$

و باز رُشن است که این نتیجه هم برا یِ حالتها یِ خاص ی که $\mathfrak{F}$ یا $(\mathfrak{F} \circ f^{-1})$ برش باشند هم برقرار است.

38 هموستارها یِ القاییده

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، $\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر $\mathbb{E}$ است، و $\mathbb{L}$ و $\mathbb{N}$ خمینِها یِ هموار َند. $\mathfrak{E}$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$، و $\mathfrak{B}$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{E})$ است. پس $(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{E})$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{L})$ است. برا یِ $\mathfrak{E}$ مشتق ِ هموردا تعریف شده. قاعده یِ زنجیرِئی برا یِ مشتق ِ $(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{E})$ در نقطه یِ r (که در $\mathbb{L}$ است) میشود

$$[\mathbf{D}(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{E})](r) = \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]. \tag{1200}$$

با استفاده از تعریف ِ مشتق ِ هموردا برا یِ $\mathfrak{E}$، مشتق ِ $\mathfrak{E}$ را به شکل ِ مجموع ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{E}$ و یک جمله یِ دیگر مینویسم. با θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$،

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_\theta(\mathfrak{B} \circ \mathfrak{E}) &= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}),\\
&= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[\boldsymbol{\nu}(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}) + (\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})],\\
&= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E} + (\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})],\\
&= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}) + \Big((\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}).
\end{aligned} \tag{1201}$$

البته چون $\boldsymbol{\nu}$ و $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})$ هر-دُ افکنش َند، رابطه یِ بالا را چنین هم میشود نوشت.

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\theta(\mathfrak{B}\circ\mathfrak{E}) &= \{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[\boldsymbol{\nu}^2(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})+(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^2(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})],\\ &= \Big(\boldsymbol{\nu}^*\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)\boldsymbol{\nu}(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})\\ &\quad+\Big((\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}),\\ &= \Big(\boldsymbol{\nu}^*\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})\\ &\quad+\Big((\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}\Big)(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})(\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E}).\end{aligned}\tag{1202}$$

جمله یِ اول بر حسب ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{E}$ نوشته شده. میخاهم مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{B}$ را چنان تعریف کنم که جمله یِ دوم بر حسب ِ $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})$ آن نوشته شود. پس $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})$ (مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{B}$) را چنان تعریف میکنم که اگر ξ در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ باشد،

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]\xi &= [(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi,\\ &= \{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)]\}\xi,\end{aligned}\tag{1203}$$

یا

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z) = (\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)].\tag{1204}$$

با این تعریف، دیده میشود اثر ِ $[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]$ بر $\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}$ صفر است:

$$[\forall\,\xi\in\mathrm{T}_z\mathbb{E}_{\boldsymbol{\pi}(z)}]:\quad [(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]\,\xi = 0.\tag{1205}$$

U_a یک بدیهیگر برا یِ $\mathbb{E}$ است. با $z=U_a(x,y_a)$ و $\xi\in\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ و $u=[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\,\xi$،

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]\xi &= [(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi,\\ &= -\{[\mathbf{D}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U^{-1}(z)]\}\{[\mathbf{D}(U^{-1})](z)\}\{\boldsymbol{W}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}(z)\},\\ &= \{[\mathbf{D}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y_a)\}[u,-W_{a\,u}(y_a)],\\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y_a)\}u\\ &\quad-\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y)\}[W_a(x,y_a)]u,\end{aligned}$$

$$= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y_a) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y)\}[W_a(x,y_a)]\Big)u, \tag{1206}$$

که نتیجه میدهد

$$[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]\xi = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y_a) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)](x,y)\}[W_a(x,y_a)]\Big)[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi, \tag{1207}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z) = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)] - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]\}[(W_a\circ U_a^{-1})(z)]\Big)[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]. \tag{1208}$$

از این برابری دیده میشود طرف ِ راست به بدیهیگر بستِگی ندارد، چون طرف ِ چپ مستقل از بدیهیگر تعریف شده. این را صریحَن هم میشود دید. اگر U_b یک بدیهیگر ِ دیگر باشد،

$$\begin{aligned}
&[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)] \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}[(W_b\circ U_b^{-1})(z)], \\
&= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a\circ U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)] \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a\circ U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}[(W_b\circ U_b^{-1})(z)], \\
&= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)] \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\} \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]\} \\
&\quad \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}\circ U_b)][U_b^{-1}(z)]\}[(W_b\circ U_b^{-1})(z)], \\
&= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)] - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]\} \\
&\quad \Big(-[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)] + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}[(W_b\circ U_b^{-1})(z)]\Big),
\end{aligned}$$

$$= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]$$
$$- \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U_a)][U_a^{-1}(z)]\}[(W_a\circ U_a^{-1})(z)], \tag{1209}$$

که صریحَن نشان میدهد طرف ِ راست ِ (1208) به بدیهیگر بستِگی ندارد. پس مینویسم

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z) = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)][U^{-1}(z)]$$
$$- \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)][U^{-1}(z)]\}[(W\circ U^{-1})(z)]\Big)[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)], \tag{1210}$$

یا

$$[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})\circ U](x,y) = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[W(x,y)]\Big)$$
$$\{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})\circ U](x,y)\}. \tag{1211}$$

از (1210) دیده میشود با $[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi = u$،

$$[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z)]\xi = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)][U^{-1}(z)]$$
$$- \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)][U^{-1}(z)]\}[(W\circ U^{-1})(z)]\Big)u. \tag{1212}$$

در واقع دیده میشود

$$\{[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})\circ U](x,y)\}[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q),$$
$$= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[W(x,y)]\Big)u, \tag{1213}$$

یعنی طرف ِ راست به q بستِگی ندارد. از اینجا $(\boldsymbol{\nabla}_u\,\mathfrak{B})(z)$ را چنین تعریف میکنم.

$$(\boldsymbol{\nabla}_u\,\mathfrak{B})(z) = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}\,[W(x,y)]\Big)u. \tag{1214}$$

طرف ِ راست به بدیهیگر بستِگی ندارد. و رابطه یِ بالا را میشود چنان نوشت که استقلال َش از بدیهیگر صریحَن دیده شود:

$$(\boldsymbol{\nabla}_u\,\mathfrak{B})(z) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\xi, \quad [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\,\xi = u. \tag{1215}$$

البته ξ با $[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi = u$ به طُر ِ یکتا از u تعیین نمیشود، اما طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا با تغییردادن ِ ξ به شرط ِ این که $[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi = u$ برقرار بماند تغییر نمیکند. همچنین میشود نوشت

$$\{\boldsymbol{\nabla}_{[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\xi}\mathfrak{B}\}(z) = [(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(z)]\,(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})\,\xi. \tag{1216}$$

سرانجام، با تعریف ِ

$$(\nabla_u\,\mathfrak{B})(x,y) = \{[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})\circ U](x,y)\}[(\mathbf{D}\,U)(x,y)](u,q), \tag{1217}$$

با توجه به این که طرف ِ راست به q بستِگی ندارد،

$$\begin{aligned}(\nabla_u\,\mathfrak{B})(x,y) &= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[W(x,y)]\Big)u,\\ &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\\ &\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[(W_u)^{\alpha}(y)],\end{aligned} \tag{1218}$$

یا مئلفِئی،

$$\begin{aligned}(\nabla_i\,\mathfrak{B})(x,y) &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\\ &\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[W^{\alpha}{}_i(x,y)].\end{aligned} \tag{1219}$$

سادِتر ِ اینها هم میشود

$$(\nabla\,\mathfrak{B})(x,y) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)](x,y)\}[W(x,y)], \tag{1220}$$

و از اینجا،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})(z) = \{(\nabla\,\mathfrak{B})[U^{-1}(z)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]. \tag{1221}$$

مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{B}$ به طُر ِ مئثر با یک هموستار تعریف شده. این هموستار در جمله یِ دوم ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{B}$ (جمله ای که شامل ِ W است) وارد میشود. به این هموستار (که به $\boldsymbol{W}$ مربوط است) هموستار ِ القاییده از $\boldsymbol{W}$ میگویم. البته رُشن است که اثر ِ این هموستار ِ القاییده، بر حسب ِ مشتق ِ $\mathfrak{B}$ (نسبت به متغیر ِ تار) بیان میشود.

به این ترتیب دیده میشود اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار باشد که هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ بر آن تعریف شده، $\mathfrak{E}$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E},\mathbb{L})$ باشد، و $\mathfrak{B}$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{E})$ باشد،

$$[\mathbf{D}(\mathfrak{B}\circ\mathfrak{E})](r)=\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]+\{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]. \quad (1222)$$

U را یک بدیهیگر برا یِ $\mathbb{E}$ میگیرم. با $U(x,y)=\mathfrak{E}$،

$$\begin{aligned}\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)]&=\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})\circ U][x(r),y(r)]\}\{(\mathbf{D}\,U)[x(r),y(r)]\}\\&\quad[0,(\nabla\,\mathfrak{E})(r)],\\&=\{[\mathbf{D}(\mathfrak{B}\circ U)][x(r),y(r)]\}[0,(\nabla\,\mathfrak{E})(r)],\\&=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{B}\circ U)][x(r),y(r)]\}[(\nabla\,\mathfrak{E})(r)]. \qquad (1223)\end{aligned}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]&=\{(\nabla\,\mathfrak{B})[(U^{-1}\circ\mathfrak{E})(r)]\}\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)],\\&=\{(\nabla\,\mathfrak{B})[x(r),y(r)]\}\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ U)][(U^{-1}\circ\mathfrak{E})(r)]\}\\&\quad\{[\mathbf{D}(U^{-1}\circ\mathfrak{E})](r)\},\\&=\{(\nabla\,\mathfrak{B})[x(r),y(r)]\}\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0[(\mathbf{D}\,x)(r),(\mathbf{D}\,y)(r)]\\&=\{(\nabla\,\mathfrak{B})[x(r),y(r)]\}[(\mathbf{D}\,x)(r)]. \qquad (1224)\end{aligned}$$

به این ترتیب دیده میشود در (1222)، جمله یِ اول با تغییرات در راستا یِ قائم (تار)، و جمله یِ دوم با تغییرات در راستا یِ افقی (خمینه-یِ-پایه) متناظر است.

تعریف ِ مشتق ِ هموردا را میشود به تابعها یِ از یک کلاف به یک کلاف ِ دیگر هم گسترش داد. $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی هموار با افکنشها یِ به ترتیب $\boldsymbol{\pi}_1$ و $\boldsymbol{\pi}_2$ اند، و $\mathfrak{F}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_2;\mathbb{E}_1)$ است و هموار است. اگر $\mathfrak{E}$ تابع ِ هموار ی در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_1;\mathbb{L})$ باشد، که $\mathbb{L}$ یک خمینه است، $(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{E})$ تابع ِ هموار ی در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_2;\mathbb{L})$ است. با هموستار ِ $\boldsymbol{W}_2$ برا یِ $\mathbb{E}_2$، مشتق ِ هموردا یِ $(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{E})$ ساخته میشود. اگر بر $\mathbb{E}_1$ هم یک هموستار تعریف شده باشد، مشتق ِ هموردا یِ $(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{E})$ را میشود به مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{E}$ مربوط کرد، درست شبیه ِ کار ی که برا یِ مشتق ِ ترکیب ِ یک تابع به کلاف و یک تابع از کلاف انجام شد. گیرم یک هموستار بر $\mathbb{E}_1$ تعریف شده. این هموستار را با $\boldsymbol{W}_1$ نشان میدهم. افکنش- ِ-قائمها یِ

متناظر با $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ را هم با به ترتیب $\boldsymbol{\nu}_1$ و $\boldsymbol{\nu}_2$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{E})](r) &= \boldsymbol{\nu}_2\{[\mathbf{D}(\mathfrak{F}\circ\mathfrak{E})](r)\},\\ &= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})[\mathfrak{E}(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)],\\ &= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})[\mathfrak{E}(r)]\}\boldsymbol{\nu}_1[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)]\\ &\quad+\boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})[\mathfrak{E}(r)]\}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)].\end{aligned}\tag{1225}$$

اینجا هم میخاهم جمله یِ دوم را بر حسب ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{F}$ بنویسم. به این ترتیب $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})$ (مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{F}$) را چنان تعریف میکنم که اگر ξ_1 در $\mathrm{T}_{z_1}\mathbb{E}_1$ باشد،

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z_1)]\xi_1 &= \boldsymbol{\nu}_2[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)\xi_1,\\ &= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z_1)]\}\xi_1,\\ &= \{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)^*\boldsymbol{\nu}_2[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z_1)]\}\xi_1,\end{aligned}\tag{1226}$$

یا

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z_1) &= \boldsymbol{\nu}_2(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z_1)],\\ &= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)^*\boldsymbol{\nu}_2[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z_1)].\end{aligned}\tag{1227}$$

با این تعریف، دیده میشود اثر ِ $[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z_1)]$ بر $\mathrm{T}_{z_1}[(\mathbb{E}_1)_{\boldsymbol{\pi}_1(z_1)}]$ صفر است:

$$\{\forall\,\xi_1\in\mathrm{T}_{z_1}[(\mathbb{E}_1)_{\boldsymbol{\pi}_1(z_1)}]\}:\quad [(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z_1)]\xi_1=0.\tag{1228}$$

U_i یک بدیهیگر برا یِ $\mathbb{E}_i$ است. تعریف میکنم

$$(x_2,y_2)(x_1,y_1)=(U_2^{-1}\circ\mathfrak{F}\circ U_1)(x_1,y_1),\tag{1229}$$

$$z_1=U_1(x_1,y_1),\tag{1230}$$

$$u_1=[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)(z_1)]\xi_1,\tag{1231}$$

که ξ_1 در $\mathrm{T}_{z_1}\mathbb{E}_1$ است. تعریف میکنم

$$(\boldsymbol{\nabla}_{u_1}\mathfrak{F})(z_1)=\boldsymbol{\nu}_2[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z_1)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)\xi_1.\tag{1232}$$

عبارت ِ طرف- ِ-چپ خُش-تعریف است، چون با تغییر-دادن ِ ξ_1 به شرط ی که ξ_1 در $\mathrm{T}_{z_1}\mathbb{E}_1$ باشد، طرف ِ راست تغییر نمیکند. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_{u_1}\mathfrak{F})(z_1) &= \boldsymbol{\nu}_2\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})[U_1(x_1,y_1)]\}[(\mathbf{D}\,U_1)(x_1,y_1)][u_1,-(W_1)_{u_1}(y_1)],\\
&= \boldsymbol{\nu}_2\Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}(\mathfrak{F}\circ U_1)](x_1,y_1)\\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(\mathfrak{F}\circ U_1)](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1)\Big),\\
&= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}\Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}(U_2^{-1}\circ\mathfrak{F}\circ U_1)](x_1,y_1)\\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(U_2^{-1}\circ\mathfrak{F}\circ U_1)](x_1,y_1)\}\,(W_1)_{u_1}(y_1)\Big),\\
&= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}\Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}(x_2,y_2)](x_1,y_1)\\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(x_2,y_2)](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1)\Big).
\end{aligned}
\tag{1233}
$$

با

$$
(u_2,q_2) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}(x_2,y_2)](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}(x_2,y_2)](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1), \tag{1234}
$$

دیده میشود

$$
\begin{aligned}
u_2 &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}\,x_2](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1),\\
&= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x_2](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{\bullet}(x_1,y_1)\Big)\\
&\quad [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)(z_1)]\xi_1.
\end{aligned}
\tag{1235}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}\,y_2](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1),\\
&= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,y_2](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{\bullet}(x_1,y_1)\Big)\\
&\quad [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)(z_1)]\xi_1.
\end{aligned}
\tag{1236}
$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_{u_1}\,\mathfrak{F})(z_1) &= \boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}(u_2,q_2),\\
&= \{(\mathbf{D}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}[0,q_2+(W_2)_{u_2}(y_2)].
\end{aligned}
\tag{1237}
$$

تعریف میکنم

$$[\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F}][U_1(x_1,y_1)] = \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}[(\nabla\,\mathfrak{F})(x_1,y_1)]$$
$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)[U_1(x_1,y_1)]\}. \tag{1238}$$

$$[\boldsymbol{\nabla}_{u_1}\,\mathfrak{F}][U_1(x_1,y_1)] = \{(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_2)[(x_2,y_2)(x_1,y_1)]\}[(\nabla_{u_1}\,\mathfrak{F})(x_1,y_1)]$$
$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)[U_1(x_1,y_1)]\}\xi_1. \tag{1239}$$

به این ترتیب،

$$(\nabla_{u_1}\,\mathfrak{F})(x_1,y_1) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}\,y_2](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(y_1)$$
$$+ (W_2)_{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u_1}\,x_2](x_1,y_1)}(y_2)$$
$$- (W_2)_{\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x_2](x_1,y_1)\}(W_1)_{u_1}(x_1)}(y_2). \tag{1240}$$

مفصلتر، با همه یِ شاخصها،

$$(\nabla_{i_1}\,\mathfrak{F})^{\alpha_2} = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i_1}\,y_2^{\alpha_2}](x_1,y_1)$$
$$- \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha_1}\,y_2^{\alpha_2}](x_1,y_1)\}[(W_1)^{\alpha_1}{}_{i_1}(x_1,y_1)]$$
$$+ [(W_2)^{\alpha_2}{}_{i_2}(x_2,y_2)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i_1}\,x_2^{i_2}](x_1,y_1)\}$$
$$- [(W_2)^{\alpha_2}{}_{i_2}(x_2,y_2)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha_1}\,x_2^{i_2}](x_1,y_1)\}$$
$$[(W_1)^{\alpha_1}{}_{i_1}(x_1,y_1)]. \tag{1241}$$

یک حالت ِ خاص این است که x_2 به y_1 بستِگی نداشته باشد. به شکل ِ مستقل از بدیهیگر، این یعنی

$$[\boldsymbol{\pi}_1(z_1') = \boldsymbol{\pi}_1(z_1)] \Rightarrow [(\boldsymbol{\pi}_2 \circ \mathfrak{F})(z_1') = (\boldsymbol{\pi}_2 \circ \mathfrak{F})(z_1)], \tag{1242}$$

یعنی یک تابع ِ $\boldsymbol{\pi}_{\mathfrak{F}}$ هست که

$$\boldsymbol{\pi}_2 \circ \mathfrak{F} = \boldsymbol{\pi}_{\mathfrak{F}} \circ \boldsymbol{\pi}_1. \tag{1243}$$

به تابع ِ $\mathfrak{F}$ با این ویژگی یک تابع ِ تاری میگویم. متناظر با یک تابع ِ تاری، تصویر ِ هر تار از کلاف ِ مبدئ زیرمجموعه یِ یک تار از کلاف ِ مقصد است. دیده میشود اگر $\mathfrak{F}$ یک تابع ِ تاری باشد، جمله یِ آخر در (1241) صفر است:

$$(\nabla_{i_1}\mathfrak{F})^{\alpha_2} = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i_1}\, y_2^{\alpha_2}](x_1,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}](x_1,y_1)\}[(W_1)^{\alpha_1}{}_{i_1}(x_1,y_1)]$$
$$+ [(W_2)^{\alpha_2}{}_{i_2}(x_2,y_2)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i_1}\, x_2^{i_2}](x_1,y_1)\}. \tag{1244}$$

یک حالت ِ خاص برا یِ تابع ِ تاری یِ $\mathfrak{F}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_2;\mathbb{E}_1)$ این است که خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}_2$ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}_1$ برابر باشد و $\mathfrak{F}$ مبنا یِ متغیر َش را تغییر ندهد. در این حالت

$$\boldsymbol{\pi}_2 \circ \mathfrak{F} = \boldsymbol{\pi}_1, \tag{1245}$$

یا

$$\boldsymbol{\pi}_{\mathfrak{F}} = \mathbf{1}. \tag{1246}$$

به تابع ِ $\mathfrak{F}$ با چنین-ویژگی یی یک تابع ِ مبنا-نگهدار میگویم. اگر $\mathfrak{F}$ مبنا-نگهدار باشد، x_2 و x_1 در (1244) با هم برابر َند. در این صورت (1244) میشود

$$(\nabla_{i}\mathfrak{F})^{\alpha_2} = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, y_2^{\alpha_2}](x,y_1) - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha_1}\, y_2^{\alpha_2}](x,y_1)\}[(W_1)^{\alpha_1}{}_{i}(x,y_1)]$$
$$+ [(W_2)^{\alpha_2}{}_{i}(x,y_2)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, x_2^{i_2}](x_1,y_1)\}. \tag{1247}$$

رابطه یِ (1227) یک تعریف ِ کلی برا یِ مشتق ِ هموردا ست، که حالتها یِ خاص َش وقت ی ست که دامنه یِ $\mathfrak{F}$ یک خمینه باشد، یا $\mathfrak{F}$ در یک خمینه مقدار بگیرد. میخاهم این حالتها یِ خاص را از حالت ِ کلی بسازم. برا یِ این کار برا یِ یک خمینه افکنش ِ قائم و افقی میسازم. $\mathbb{M}$ یک خمینه است. $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ یک کلاف است که افکنش ِ متناظر با آن همانی ست. از اینجا معلوم میشود اگر $\boldsymbol{W}_0$ یک هموستار بر $\mathbf{B}_0(\mathbb{M})$ باشد، و u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد،

$$(\boldsymbol{W}_0)_u(x) = [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_0)(x)][(\boldsymbol{W}_0)_u(x)],$$
$$= -u, \tag{1248}$$

$\boldsymbol{\pi}_0$ افکنش ِ $\mathsf{B}_0(\mathbb{M})$ است، و همانی ست. افکنش ِ قائم بر $\mathsf{B}_0(\mathbb{M})$ را با $\boldsymbol{\nu}_0$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_0\, u &= u + (\boldsymbol{W}_0)_u(x),\\ &= u - u,\\ &= 0.\end{aligned} \tag{1249}$$

این را به یک شکل ِ دیگر هم میشود دید:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_0\, u &= [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_0)(x)](\boldsymbol{\nu}_0\, u),\\ &= 0.\end{aligned} \tag{1250}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nu}_0 = 0. \tag{1251}$$

از $\mathbb{M}$ کلاف ِ $\mathsf{B}_1(\mathbb{M})$ هم ساخته میشود. خمینه-یِ-پایه یِ $\mathsf{B}_1(\mathbb{M})$ فقط یک نقطه دارد. پس فضا یِ مماس بر این خمینه-یِ-پایه در هر نقطه صفر-بُعدی ست، یعنی $\{0\}$ است. از اینجا دیده میشود هموستار ِ متناظر با $\mathsf{B}_1(\mathbb{M})$ صفر است. این هموستار را با $\boldsymbol{W}_1$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{W}_1 = 0. \tag{1252}$$

افکنش ِ قائم ِ متناظر را با $\boldsymbol{\nu}_1$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{1}. \tag{1253}$$

تابع ِ $\mathfrak{E}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ است، که $\mathbb{L}$ یک خمینه و $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار است. متناظر با این تابع، تابع ِ $\mathfrak{E}_0$ در $\mathsf{F}[\mathbb{E};\mathsf{B}_0(\mathbb{L})]$ را در نظر میگیرم، که در واقع هم ان $\mathfrak{E}$ است، فقط دامنه اَش کلاف ِ $\mathsf{B}_0(\mathbb{L})$ شده، که به عنوان ِ مجموعه هم ان $\mathbb{L}$ است. افکنش ِ $\mathbb{E}$ را با $\boldsymbol{\nu}$، و افکنش ِ $\mathsf{B}_0(\mathbb{L})$ را با $\boldsymbol{\nu}_0$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}_0)(r) &= \boldsymbol{\nu}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_0)^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_0)(r)],\\ &= \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r)],\end{aligned} \tag{1254}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}_0 = \boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}. \tag{1255}$$

طرف ِ راست هم ان است که قبلَن به عنوان ِ مشتق ِ هموردا یِ یک تابع از یک خمینه به یک کلاف تعریف شده بود.

تابع ِ $\mathfrak{B}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{E})$ است، که $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار و $\mathbb{N}$ یک خمینه است. متناظر با این تابع، تابع ِ $\mathfrak{B}_0$ در $\mathsf{F}[\mathbf{B}_1(\mathbb{N});\mathbb{E}]$ را در نظر میگیرم، که در واقع هم ان $\mathfrak{B}$ است، فقط مقدارها یَش را در کلاف ِ $\mathbf{B}_1(\mathbb{N})$ میگیرد، که به عنوان ِ مجموعه هم ان $\mathbb{N}$ است. افکنش ِ $\mathbb{E}$ را با $\boldsymbol{\nu}$، و افکنش ِ $\mathbf{B}_1(\mathbb{M})$ را با $\boldsymbol{\nu}_1$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B}_1)(r) &= \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{B}_1)(r)],\\ &= (\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu})^*[(\mathbf{D}\,\mathfrak{B})(r)],\end{aligned} \tag{1256}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B}_1 = \boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{B}. \tag{1257}$$

طرف ِ راست هم ان است که قبلَن به عنوان ِ مشتق ِ هموردا یِ یک تابع از یک کلاف به یک خمینه تعریف شده بود.

سرانجام، تابع ِ هموار ِ f در $\mathsf{F}(\mathbb{N};\mathbb{L})$ است، که $\mathbb{L}$ و $\mathbb{N}$ خمینه اند. متناظر با این تابع، تابع ِ $f_{1\,0}$ در $\mathsf{F}[\mathbf{B}_1(\mathbb{N});\mathbf{B}_0(\mathbb{L})]$ را میگیرم، که در واقع هم ان f است، فقط دامنه اَش کلاف ِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{L})$ شده و خُد َش در کلاف ِ $\mathbf{B}_1(\mathbb{N})$ مقدار میگیرد، که به عنوان ِ مجموعه به ترتیب هم ان $\mathbb{L}$ و $\mathbb{N}$ اند. افکنشها یِ $\mathbf{B}_0(\mathbb{L})$ و $\mathbf{B}_1(\mathbb{N})$ را با به ترتیب $\boldsymbol{\nu}_0$ و $\boldsymbol{\nu}_1$ نشان میدهم، که به ترتیب صفر و همانی اند. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,f_{1\,0})(r) &= \boldsymbol{\nu}_1(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_0)^*[(\mathbf{D}\,f_{1\,0}(r)],\\ &= (\mathbf{D}\,f)(r),\end{aligned} \tag{1258}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}\,f_{1\,0} = \mathbf{D}\,f. \tag{1259}$$

این پیشنهاد میکند $\boldsymbol{\nabla} f$ (مشتق ِ هموردا یِ f) چنین تعریف شود.

$$\boldsymbol{\nabla} f = \mathbf{D} f. \tag{1260}$$

با تعریف ِ مشتق ِ هموردا برا یِ تابعها یِ از یک کلاف به یک کلاف ِ دیگر، دیده میشود اگر $\mathbb{E}_0$ و $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی هموار باشند، که $\boldsymbol{\nu}_i$ افکنش ِ قائم ِ متناظر با $\mathbb{E}_i$ باشد، و $\mathfrak{F}$ و $\mathfrak{G}$ تابعها یی هموار در به ترتیب $\mathsf{F}(\mathbb{E}_1;\mathbb{E}_0)$ و $\mathsf{F}(\mathbb{E}_2;\mathbb{E}_1)$ باشند،

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{G}\circ\mathfrak{F})](z) &= \{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{G})[\mathfrak{F}(z)]\}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_1)[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_0)\\ &\quad+\boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{G})[\mathfrak{F}(z)]\}\boldsymbol{\nu}_1[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z)], \qquad (1261)\\ &= \{(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{G})[\mathfrak{F}(z)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{F})(z)](\mathbf{1}-\boldsymbol{\nu}_0)\\ &\quad+\boldsymbol{\nu}_2\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{G})[\mathfrak{F}(z)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{F})(z)]. \qquad (1262)\end{aligned}$$

$\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر کلاف ِ هموار ِ $\mathbb{E}$ است. متناظر با خمینه یِ $\mathbb{N}$، تابع ِ $\boldsymbol{W}^{\mathbb{N}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{W}^{\mathbb{N}}_{v,u}(z) = [-v, \boldsymbol{W}_u(z)]. \tag{1263}$$

به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{W}^{\mathbb{N}}$ یک هموستار بر $\mathbb{E}^{\mathbb{N}}$ است.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ اند، و $\boldsymbol{W}_i$ هموستار ی بر $\mathbb{E}_i$ است. $\boldsymbol{W}$ را در $\mathsf{F}[\mathrm{T}(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2);\mathrm{T}\mathbb{M}\oplus(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)]$ میگیرم، چنان که

$$\boldsymbol{W}_u(z_1\oplus z_2) = [\boldsymbol{W}_{1\,u}(z_1)]\oplus[\boldsymbol{W}_{2\,u}(z_2)], \tag{1264}$$

یا

$$\boldsymbol{W}(z_1\oplus z_2) = [\boldsymbol{W}_1(z_1)]\oplus[\boldsymbol{W}_2(z_2)]. \tag{1265}$$

به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر $(\mathbb{E}_1\oplus\mathbb{E}_2)$ است. این را هموستار ِ القاییده از هموستارها یِ $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ مینامم. رابطه یِ $\boldsymbol{W}$ با $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ را میشود بر حسب ِ W ها نوشت:

$$W(x,y_1,y_2) = [W_1(x,y_1), W_2(x,y_2)]. \tag{1266}$$

برحسب ِ مئلفِها،

$$W^{\alpha}(x,y_1,y_2)=\begin{cases}W_1^{\alpha}(x,y_1), & \alpha\leq d_1\\ W_2^{\alpha-d_1}(x,y_2), & d_1<\alpha\end{cases}, \tag{1267}$$

که d_1 بُعد ِ تار- ِ-نُعی ی ِ $\mathbb{E}_1$ است.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یی هموار با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ یکسان َند، $\mathbb{L}$ یک خمینه است، و $\mathfrak{E}_i$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_i;\mathbb{L})$ است. دیده میشود $\{[\mathfrak{E}_1(r)]\oplus[\mathfrak{E}_2(r)]\}$ تعریف شده است، اگر مبنا ی ِ $\mathfrak{E}_2(r)$ با مبنا ی ِ $\mathfrak{E}_1(r)$ یکسان باشد. افکنش ِ $\mathbb{E}_i$ را با $\boldsymbol{\pi}_i$ نشان میدهم. میگویم $\mathfrak{E}_1$ و $\mathfrak{E}_2$ هممبنا یَند، اگر

$$\boldsymbol{\pi}_2\circ\mathfrak{E}_2=\boldsymbol{\pi}_1\circ\mathfrak{E}_1. \tag{1268}$$

به این ترتیب $\{[\mathfrak{E}_1(r)]\oplus[\mathfrak{E}_2(r)]\}$ خُش-تعریف است اگر $\mathfrak{E}_1$ و $\mathfrak{E}_2$ هممبنا باشند. فرض میکنم چنین است. تعریف میکنم

$$(\mathfrak{E}_1\oplus\mathfrak{E}_2)(r)=[\mathfrak{E}_1(r)]\oplus[\mathfrak{E}_2(r)]. \tag{1269}$$

از (1268) دیده میشود

$$\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}_2\circ\mathfrak{E}_2)=\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}_1\circ\mathfrak{E}_1). \tag{1270}$$

به این ترتیب اگر θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ باشد، مبنا ی ِ $\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_2)(r)]\,\theta\}$ با مبنا ی ِ $\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_1)(r)]\,\theta\}$ برابر است:

$$\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_2)[\mathfrak{E}_2(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_2)(r)]\theta=\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_1)[\mathfrak{E}_1(r)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_1)(r)]\theta. \tag{1271}$$

پس $\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_1)(r)]\,\theta\}\oplus\{[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_2)(r)]\,\theta\}$ خُش-تعریف است. به سادِگی دیده میشود

$$[\mathbf{D}(\mathfrak{E}_1\oplus\mathfrak{E}_2)](r)=[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_1)(r)]\oplus[(\mathbf{D}\,\mathfrak{E}_2)(r)]. \tag{1272}$$

در نتیجه با هموستار ِ القاییده،

$$[\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{E}_1\oplus\mathfrak{E}_2)](r)=[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}_1)(r)]\oplus[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}_2)(r)], \tag{1273}$$

یا سادِتر،

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2) = (\boldsymbol{\nabla}\, \mathfrak{E}_1) \oplus (\boldsymbol{\nabla}\, \mathfrak{E}_2). \tag{1274}$$

بر حسب ِ مئلفِها،

$$[\nabla(\mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2)]^\alpha = \begin{cases} (\nabla\, \mathfrak{E}_1)^\alpha, & \alpha \leq d_1 \\ (\nabla\, \mathfrak{E}_2)^{\alpha - d_1}, & d_1 < \alpha \end{cases}, \tag{1275}$$

که d_1 بُعد ِ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_1$ است.

رُشن است که اگر E_1 و E_2 برشها یی بر به ترتیب $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ باشند (که خمینه-یِ-پایِها یِ $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ یکسان َند)، E_1 و E_2 هممبنا یَند. پس

$$\mathbf{D}(E_1 \oplus E_2) = (\mathbf{D}\, E_1) \oplus (\mathbf{D}\, E_2). \tag{1276}$$

درنتیجه با هموستار ِ القاییده،

$$\boldsymbol{\nabla}(E_1 \oplus E_2) = (\boldsymbol{\nabla}\, E_1) \oplus (\boldsymbol{\nabla}\, E_2), \tag{1277}$$

و بر حسب ِ مئلفِها،

$$[\nabla(E_1 \oplus E_2)]^\alpha = \begin{cases} (\nabla\, E_1)^\alpha, & \alpha \leq d_1 \\ (\nabla\, E_2)^{\alpha - d_1}, & d_1 < \alpha \end{cases}, \tag{1278}$$

که d_1 بُعد ِ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}_1$ است.

$\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یِ برداری یِ هموار ی با خمینه-یِ-پایه یِ یکسان َند. افکنش ِ $\mathbb{E}_i$ را با $\boldsymbol{\pi}_i$، و افکنش ِ $(\mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2)$ را با $\boldsymbol{\pi}$ نشان میدهم. $\boldsymbol{W}_i$ یک هموستار بر $\mathbb{E}_i$ است. $\boldsymbol{W}_a$ را تابع ی در $\mathsf{F}[\mathrm{T}(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2); \mathrm{T}\mathbb{M} \oplus (\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)]$ میگیرم، چنان که

$$\begin{aligned}(\mathsf{K}_a \circ \boldsymbol{W}_{a\,u})(z_1 \otimes z_2) = \{-u, [(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_{1\,a} \circ \boldsymbol{W}_{1\,u})(z_1)] \otimes z_2 \\ + z_1 \otimes [(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_{2\,a} \circ \boldsymbol{W}_{2\,u})(z_2)]\},\end{aligned} \tag{1279}$$

که $\mathsf{K}_{i\,a}$ ها و K_a تناظر- ِ-یک-به-یکها یی یَند که با

$$\mathsf{K}_a = [\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}, \check{U}_a(x)] \circ \{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}, \tag{295}$$

برا یِ به ترتیب $\mathbb{E}_i$ ها و $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ تعریف شده اند. دیده میشود

$$\begin{aligned}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z_1 \otimes z_2)][\boldsymbol{W}_{a\,u}(z_1 \otimes z_2)] &= (\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0 \circ \mathsf{K}_a)[\boldsymbol{W}_{a\,u}(z_1 \otimes z_2)],\\ &= -u,\end{aligned} \tag{1280}$$

از

$$[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi}_i)(z_i)][\boldsymbol{W}_{i\,u}(z_i)] = -u, \tag{1281}$$

و با $x = \boldsymbol{\pi}_i(z_i)$، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a \circ \boldsymbol{W}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_b)(z_1 \otimes z_2),\\ &= -\Big([\check{U}_{1\,a}(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{1\,a\,b}][U_{1\,b}^{-1}(z_1)]\}\Big) \otimes z_2\\ &\quad - z_1 \otimes \Big([\check{U}_{2\,a}(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{2\,a\,b}][U_{2\,b}^{-1}(z_2)]\}\Big),\end{aligned} \tag{1282}$$

که $U_{i\,a\,b}$ تابع- ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ $U_{i\,a}$ و $U_{i\,b}$ است. دیده میشود

$$z_i = [\check{U}_{i\,a}(x)][(U_{i\,a\,b} \circ U_{i\,b}^{-1})(z_i)]. \tag{1283}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}&(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a \circ \boldsymbol{W}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_b)(z_1 \otimes z_2),\\ &= -\{[\check{U}_{1\,a}(x)] \otimes [\check{U}_{2\,a}(x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z_1 \otimes z_2)]\},\\ &= [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z_1 \otimes z_2)]\}\\ &\quad [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z_1 \otimes z_2)][\boldsymbol{W}_a(z_1 \otimes z_2)],\end{aligned} \tag{1284}$$

که با توجه به

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b = [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)], \tag{298}$$

نتیجه میدهد

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_b = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_a. \tag{1285}$$

از تعریف ِ (1279) هم دیده میشود

$$\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_b = \overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_0 \circ \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_a. \tag{1286}$$

پس

$$\mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_b = \mathsf{K}_b \circ \boldsymbol{W}_a, \tag{1287}$$

و چون K_b وارونپذیر است،

$$\boldsymbol{W}_b = \boldsymbol{W}_a. \tag{1288}$$

پس $\boldsymbol{W}_a$ به بدیهیگر وابسته نیست. به هم ین خاطر شاخص ِ a را از آن بر میدارم. به $\boldsymbol{W}$ با

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}_u(z_1 \otimes z_2) = \mathsf{K}_a^{-1}\{-u, [(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_{1\,a} \circ \boldsymbol{W}_{1\,u})(z_1)] \otimes z_2 \\ + z_1 \otimes [(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_{2\,a} \circ \boldsymbol{W}_{2\,u})(z_2)]\}\end{aligned} \tag{1289}$$

هموستار ِ القاییده از هموستارها یِ $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ میگویم. دیده میشود ارتباط ِ $\boldsymbol{W}$ با $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ را میشود بر حسب ِ $y_i = (\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ U_i^{-1})(z_i)$ چنین نوشت.

$$W_u(y_1 \otimes y_2) = [W_{1\,u}(y_1)] \otimes y_2 + y_1 \otimes [W_{2\,u}(y_2)]. \tag{1290}$$

و بر حسب ِ مثلفِها

$$W_u^{\alpha\,\mu}(y_1 \otimes y_2) = [W_{1\,u}^{\alpha}(y_1)]y_2^{\mu} + y_1^{\alpha}[W_{2\,u}^{\mu}(y_2)], \tag{1291}$$

یا

$$W^{\alpha\,\mu}{}_i(x, y_1 \otimes y_2) = [W_1^{\alpha}{}_i(x, y_1)]y_2^{\mu} + y_1^{\alpha}[W_2^{\mu}{}_i(x, y_2)]. \tag{1292}$$

سرانجام، $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ کلافها یِ برداری یِ هموار ی با خمینه-یِ-پایه یِ یکسان َند، $\mathbb{L}$ یک خمینه است، و $\mathfrak{E}_i$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}_i;\mathbb{L})$ است. $\{[\mathfrak{E}_1(r)]\otimes[\mathfrak{E}_2(r)]\}$ برا یِ همه یِ r ها یی که در $\mathbb{L}$ اند تعریف شده است، اگر $\mathfrak{E}_1$ و $\mathfrak{E}_2$ هممبنا باشند. فرض میکنم چنین است. تعریف میکنم

$$(\mathfrak{E}_1\otimes\mathfrak{E}_2)(r)=[\mathfrak{E}_1(r)]\otimes[\mathfrak{E}_2(r)]. \tag{1293}$$

به این ترتیب اگر θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ باشد،

$$[\nabla_\theta(\mathfrak{E}_1\otimes\mathfrak{E}_2)]^{\alpha\,\mu}(r)=[(\nabla_\theta\,\mathfrak{E}_1)^\alpha(r)][\mathfrak{E}_2^\mu(r)]+[\mathfrak{E}_1^\alpha(r)][(\nabla_\theta\,\mathfrak{E}_2)^\mu(r)]. \tag{1294}$$

این را میشود نوشت

$$\nabla_\theta(\mathfrak{E}_1\otimes\mathfrak{E}_2)=(\nabla_\theta\,\mathfrak{E}_1)\otimes\mathfrak{E}_2+\mathfrak{E}_1\otimes(\nabla_\theta\,\mathfrak{E}_2), \tag{1295}$$

که با استفاده از

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r)=\{\check{U}[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[(\nabla\,\mathfrak{E})(r)], \tag{1193}$$

میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta(\mathfrak{E}_1\otimes\mathfrak{E}_2)=(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}_1)\otimes\mathfrak{E}_2+\mathfrak{E}_1\otimes(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}_2). \tag{1296}$$

از جمله رُشن است که اگر E_1 و E_2 برشها یی بر به ترتیب $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ باشند،

$$[\nabla_u(E_1\otimes E_2)]^{\alpha\,\mu}(x)=[(\nabla_u\,E_1)^\alpha(x)][E_2^\mu(x)]+[E_1^\alpha(x)][(\nabla_u\,E_2)^\mu(x)]. \tag{1297}$$

در نتیجه

$$\nabla_u(E_1\otimes E_2)=(\nabla_u\,E_1)\otimes E_2+E_1\otimes(\nabla_u\,E_2), \tag{1298}$$

یا،

$$\boldsymbol{\nabla}_u(E_1\otimes E_2)=(\boldsymbol{\nabla}_u\,E_1)\otimes E_2+E_1\otimes(\boldsymbol{\nabla}_u\,E_2). \tag{1299}$$

مشتقِ هموردا را برا یِ میدانِ اسکالر هم میشود تعریف کرد. برا یِ این کار از خمینه یِ $\mathbb{M}$ کلافِ بدیهی یِ $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ را میسازم. هموستارِ کلافِ $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ را با $\boldsymbol{W}^{\mathfrak{s}}$ نشان میدهم. اگر خاسته شود $\boldsymbol{W}^{\mathfrak{s}}$ هم ان هموستارِ القاییده از $\boldsymbol{W}^{\mathfrak{s}}$ و $\boldsymbol{W}^{\mathfrak{s}}$ باشد، از (1290) نتیجه میشود

$$W_u^{\mathfrak{s}}(s_1\,s_2)=[W_u^{\mathfrak{s}}(s_1)]s_2+s_1[W_u^{\mathfrak{s}}(s_2)], \tag{1300}$$

که s_1 و s_2 اسکالر َند. با تعریفِ

$$\mathfrak{W}(s)=\frac{W_u^{\mathfrak{s}}(s)}{s}, \tag{1301}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{W}(s_1\,s_2)=\mathfrak{W}(s_1)+\mathfrak{W}(s_2), \tag{1302}$$

که با شرطِ پیوستِگی یِ $\mathfrak{W}$ به ازا یِ متغیرها یِ ناصفر نتیجه میدهد

$$\mathfrak{W}(s)=c\,\ln|s|, \tag{1303}$$

که c یک ثابت است. به این ترتیب،

$$W_u^{\mathfrak{s}}(s)=c\,s\,\ln|s|. \tag{1304}$$

از این، با فرضِ هموار-بودنِ $W_u^{\mathfrak{s}}$ (از جمله در صفر) نتیجه میشود c صفر است، یعنی

$$W_u^{\mathfrak{s}}=0. \tag{1305}$$

از این پس فرضها یِ بالا را برقرار میگیرم. به این ترتیب، مشتقِ هموردا یِ یک میدانِ اسکالر هم ان مشتقِ معمولی یِ آن میدان است. این یعنی متناظر با Σ که یک میدانِ اسکالر بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ است، برشِ $\Sigma^{\mathfrak{s}}$ را مثلِ

$$\Sigma^{\mathfrak{s}}(x)=[x,\Sigma(x)] \tag{434}$$

میگیرم. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma^{\mathfrak{s}} = \mathbf{D}\,\Sigma. \tag{1306}$$

این رابطه را سادِتر چنین مینویسم.

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma = \mathbf{D}\,\Sigma. \tag{1307}$$

یک راهِ دیگرِ رسیدن به این رابطه توجه به این است که میدانِ اسکالرِ Σ یک تابع از یک خمینه $(\mathbb{M})$ به یک خمینه $(\mathbb{R})$ است. مشتقِ هموردا یِ Σ را مشتقِ هموردا یِ Σ_{10} میگیرم، که Σ_{10} هم ان Σ است که دامنه اَش $\mathsf{B}_0(\mathbb{M})$ است و در $\mathsf{B}_1(\mathbb{R})$ مقدار میگیرد. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma_{10} = \mathbf{D}\,\Sigma, \tag{1308}$$

که شکلِ ساده اَش هم ان (1307) است.

$\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. دیده میشود

$$(\mathbb{M}\times\mathbb{R})\otimes\mathbb{E} = \mathbb{E}. \tag{1309}$$

میخاهم (1296) با هموستارها یِ متناظر با $(\mathbb{M}\times\mathbb{R})$ و $\mathbb{E}$ و $\mathbb{E}$ برقرار باشد. نتیجه میشود اگر Σ یک میدانِ اسکالر بر $\mathbb{M}$، E یک برش بر $\mathbb{E}$، و u یک بردار باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u(\Sigma\,E) &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\Sigma)E + \Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,E,\\ &= (\mathbf{D}_u\,\Sigma)E + \Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,E.\end{aligned} \tag{1310}$$

از جمله اگر $\boldsymbol{W}$ هموستارِ $\mathbb{E}$ باشد،

$$W(x, s\,y) = s\,W(x,y), \tag{1311}$$

که s اسکالر است.

دیده میشود (1310) حالتِ خاصِ این است: اگر $\mathbb{E}$ یک کلافِ برداری یِ هموار و $\mathbb{L}$ یک خمینه باشد، $\mathfrak{E}$ یک تابعِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ و $\mathfrak{S}$ یک تابعِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{R};\mathbb{L})$ باشد، $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{S}$ هممبنا

باشند، و θ در $\mathrm{T}\mathbb{L}$ باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta(\mathfrak{S}\,\mathfrak{E}) = (\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{S})\mathfrak{E} + \mathfrak{S}\,\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}. \tag{1312}$$

البته رُشن است که خُدِ (1312) هم حالتِ خاص ی از (1296)، مشتقِ هموردا یِ حاصل-ِ-ضربِ تانسری، است.

39 هموستارِ آفین

اگر کلافِ $\mathbb{E}$ برداری باشد، $(\mathbf{D}\,E)(x)$ نسبت به E خطی ست. اما لازم نیست $\boldsymbol{W}_u$ خطی باشد. اگر $\boldsymbol{W}_u$ خطی باشد، میگویم $\boldsymbol{W}$ یک هموستارِ آفین است. در چنین حالت ی W_u خطی ست.

به سادگی دیده میشود اگر $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ هموستارها یی آفین بر $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ باشند، هموستارِ القاییده از $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ بر $(\mathbb{E}_1 \otimes \mathbb{E}_2)$ هم آفین است.

اگر W بخشِ قائمِ یک هموستارِ آفین، و $\mathbb{M}$ خمینه-یِ-پایه یِ کلافِ برداری یِ متناظر باشد، $\check{W}$ (بخشِ قائمِ خطی یِ آن هموستار) را تابع ی خطی از $\mathrm{T}\mathbb{M}$ تعریف میکنم که مقدارَش یک تابعِ خطی از تار-ِ-نُعی به فضا یِ مماس به تار-ِ-نُعی (یا به خُدِ تار-ِ-نُعی، با توجه به تناظرِ تار-ِ-نُعی با فضا یِ مماس بر آن در یک نقطه از تار-ِ-نُعی) است، که

$$\check{W}_u\, y = W_u(y), \tag{1313}$$

دیده میشود

$$\check{W}_u\, y =: \check{W}_{u\,\beta}\, y^\beta. \tag{1314}$$

$$(\check{W}_u)^\alpha\, y =: (\check{W}_u)^\alpha{}_\beta\, y^\beta. \tag{1315}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$\check{W}_u\, y =: [\check{W}_{i\,\beta}(x)]u^i\, y^\beta, \tag{1316}$$

$$(\check{W}_u)^\alpha\, y =: [\check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}(x)]u^i\, y^\beta. \tag{1317}$$

سرانجام، یک-فرمها یِ ماتریسی یِ $\check{W}$ چنین تعریف میشوند

$$\check{W} = \check{W}_i\, e^i, \tag{1318}$$

که $\{(i, e^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ است، و

$$\check{W}_u = [\check{W}_i(x)]u^i. \tag{1319}$$

همچنین،

$$\check{W}^\alpha{}_\beta = \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\, e^i. \tag{1320}$$

با استفاده از بستِگی یِ W به بدیهیگر، بستِگی یِ $\check{W}$ به بدیهیگر به دست میئاید. U_a و U_b دُ بدیهیگر، و $\check{U}_{b\,a}$ و $\check{U}_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار- ِ-خطیها یِ متناظر َند. با $z = U_a(x, y_a) = U_b(x, y_b)$،

$$\begin{aligned} W_{a\,u}(y_a) &= \check{W}_{a\,u}\, y_a, \\ &= \check{W}_{a\,u}[U_{a\,b}(x, y_b)], \\ &= \check{W}_{a\,u}[\check{U}_{a\,b}(x)]y_b. \end{aligned} \tag{1321}$$

به این ترتیب از

$$W_{a\,u}(y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}](x, y_b)\}[W_{b\,u}(y_b)] - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\, U_{a\,b}](x, y_b), \tag{1128}$$

نتیجه میشود

$$\check{W}_{a\,u}[\check{U}_{a\,b}(x)]y_b = [\check{U}_{a\,b}(x)]\check{W}_{b\,u}\, y_b - [(\mathbf{D}_u\, \check{U}_{a\,b})(x)]y_b, \tag{1322}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} \check{W}_{a\,u} &= [\check{U}_{a\,b}(x)]\check{W}_{b\,u}[\check{U}_{b\,a}(x)] - [(\mathbf{D}_u\, \check{U}_{a\,b})(x)][\check{U}_{b\,a}(x)], \\ &= [\check{U}_{a\,b}(x)]\check{W}_{b\,u}[\check{U}_{b\,a}(x)] + [\check{U}_{a\,b}(x)][(\mathbf{D}_u\, \check{U}_{b\,a})(x)], \end{aligned} \tag{1323}$$

همچنین،

$$\check{W}_a = \check{U}_{a\,b}\,\check{W}_b\,\check{U}_{b\,a} - (\mathbf{D}\,\check{U}_{a\,b})\check{U}_{b\,a},$$
$$= \check{U}_{a\,b}\,\check{W}_b\,\check{U}_{b\,a} + \check{U}_{a\,b}\,\mathbf{D}\,\check{U}_{b\,a}, \tag{1324}$$

یا

$$\check{W}_a = \check{U}_{a\,b}\,\check{W}_b\,\check{U}_{b\,a} - (\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})\check{U}_{b\,a},$$
$$= \check{U}_{a\,b}\,\check{W}_b\,\check{U}_{b\,a} + \check{U}_{a\,b}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a}. \tag{1325}$$

این کارها را میشود با w (به جا یِ W) هم انجام داد. تعریف میکنم

$$\check{w}_u\,z = w_u(z). \tag{1326}$$

$$\check{w}_u = [\check{w}_i(x)]u^i, \tag{1327}$$

$$\check{w} = \check{w}_i\,e^i. \tag{1328}$$

به این ترتیب از

$$w_u(z) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\{W_u[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1})(z)]\}, \tag{1124}$$

نتیجه میشود

$$\check{w}_u\,z = \{\check{U}[\boldsymbol{\pi}(z)]\}\check{W}_u\{\check{U}^{-1}[\boldsymbol{\pi}(z)]\}z, \tag{1329}$$

یا

$$\check{w}_u = [\check{U}(x)]\check{W}_u[\check{U}^{-1}(x)]. \tag{1330}$$

از اینجا معلوم میشود

$$\check{w}_{a\,u} = \check{w}_{b\,u} + [\check{U}_b(x)][(\mathbf{D}_u\,\check{U}_{b\,a})(x)][\check{U}_a^{-1}(x)]. \tag{1331}$$

$$\check{w}_a = \check{w}_b + \check{U}_b(\mathbf{D}\,\check{U}_{b\,a})\check{U}_a^{-1},$$
$$= \check{w}_b + \check{U}_b(\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a})\check{U}_a^{-1}. \tag{1332}$$

همچنین، تعریف میکنم

$$\check{\boldsymbol{W}}_u\, z = \boldsymbol{W}_u(z), \tag{1333}$$

$$\check{\boldsymbol{W}}_u = [\check{\boldsymbol{W}}_i(x)]u^i, \tag{1334}$$

$$\check{\boldsymbol{W}} = \check{\boldsymbol{W}}_i\, e^i, \tag{1335}$$

و رُشن است که

$$[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]\check{\boldsymbol{W}}_u\, z = -u. \tag{1336}$$

$\boldsymbol{W}$ یک هموستار ِ آفین است. رد ِ $\check{W}_i$ را با $\grave{W}_i$، و رد ِ $\check{w}_i$ را با $\grave{w}_i$ نشان میدهم:

$$\grave{W}_i = \check{W}^{\alpha}{}_{i\,\alpha}. \tag{1337}$$

$$\grave{w}_i = \check{w}^{r}{}_{i\,r}. \tag{1338}$$

رابطه یِ $\check{w}$ با $\check{W}$:

$$\check{w}_i(x) = [\check{U}(x)][\check{W}_i(x)][\check{U}(x)]^{-1}, \tag{1339}$$

نشان میدهد $\check{w}_i$ تبدیل- ِ-تشابهی-یافته یِ $\check{W}_i$ است. پس رد ِ $\check{w}_i$ با رد ِ $\check{W}_i$ برابر است:

$$\grave{w}_i = \grave{W}_i. \tag{1340}$$

U_a و U_b دُ بدیهیگر، و $\check{U}_{a\,b}$ و $\check{U}_{b\,a}$ تابع- ِ-گذار- ِ-خطیها یِ متناظر َند. از رابطه یِ $\check{W}_a$ با $\check{W}_b$:

$$\check{W}_{a\,i} = \check{U}_{a\,b}\,\check{W}_{b\,i}\,\check{U}_{b\,a} + \check{U}_{a\,b}\,\mathbf{D}_i\,\check{U}_{b\,a}, \tag{1341}$$

نتیجه میشود

$$\grave{W}_{a\,i} = \grave{W}_{b\,i} + \mathsf{tr}(\check{U}_{a\,b}\,\mathbf{D}_i\,\check{U}_{b\,a}). \tag{1342}$$

یک-فرم ِ $\grave{W}$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\grave{W} = \grave{W}_i\, e^i. \tag{1343}$$

به این ترتیب،

$$\grave{W}_a = \grave{W}_b + \mathsf{tr}(\check{U}_{a\,b}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a}). \tag{1344}$$

دیده میشود $\grave{W}$ به بدیهیگر بستِگی دارد. همچنین،

$$\mathbf{d}\,\grave{W}_a = \mathbf{d}\,\grave{W}_b + \mathsf{tr}[(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a})]. \tag{1345}$$

$$\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a} = -\check{U}_{b\,a}(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})\check{U}_{b\,a}. \tag{1346}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathsf{tr}[(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a})] &= -\mathsf{tr}\{(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge [\check{U}_{b\,a}(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})\check{U}_{b\,a}]\},\\ &= -\mathsf{tr}[(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})].\end{aligned} \tag{1347}$$

طرف ِ راست ِ رابطه یِ اخیر صفر است، چون $(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})$ یک-فرم است. البته $(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})$ ماتریسی ست:

$$(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})^{\alpha}{}_{\beta} =: \mathfrak{M}^{\alpha}{}_{i\,\beta}\,e^i. \tag{1348}$$

در نتیجه ضرب ِ برونی یِ آن در خُد َش صفر نمیشود. اما رد ِ این حاصل ِضرب صفر است:

$$\mathsf{tr}[(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})] = \mathfrak{M}^{\alpha}{}_{i\,\beta}\,\mathfrak{M}^{\beta}{}_{j\,\alpha}\,e^i \wedge e^j. \tag{1349}$$

ضریب ِ $(e^i \wedge e^j)$ نسبت به i و j متقارن است. پس طرف ِ راست صفر است. به این ترتیب،

$$\mathsf{tr}[(\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\check{U}_{b\,a}\,\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b})] = 0. \tag{1350}$$

از اینجا،

$$\mathsf{tr}[(\mathbf{d}\,\check{U}_{a\,b}) \wedge (\mathbf{d}\,\check{U}_{b\,a})] = 0, \tag{1351}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\,\grave{W}_a = \mathbf{d}\,\grave{W}_b. \tag{1352}$$

یعنی $(\mathbf{d}\,\grave{W})$ به بدیهیگر بستِگی ندارد. این را با $\grave{f}$ نشان میدهم:

$$\grave{f} = \mathbf{d}\,\grave{W}. \tag{1353}$$

در طرف ِ راست شاخص ِ بدیهیگر حذف شده، چون نتیجه به بدیهیگر بستِگی ندارد.

سرانجام، اگر $\mathfrak{E}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ باشد، که $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ هموار و $\mathbb{L}$ یک خمینه است، و $\boldsymbol{W}$ یک هموستار ِ آفین بر $\mathbb{E}$ باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{E})(r) + \check{\boldsymbol{W}}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\bullet}\,[\mathfrak{E}(r)]. \tag{1354}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})(r) = (\mathbf{D}_\theta\,\mathfrak{E})(r) + \check{\boldsymbol{W}}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta}\,[\mathfrak{E}(r)]. \tag{1355}$$

از جمله اگر E یک برش باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,E)(x) = (\mathbf{D}\,E)(x) + \check{\boldsymbol{W}}_{\bullet}\,[E(x)]. \tag{1356}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_u\,E)(x) = (\mathbf{D}_u\,E)(x) + \check{\boldsymbol{W}}_u\,[E(x)]. \tag{1357}$$

$h^{\mathbb{Y}}$ یک پایه برا یِ $\mathbb{Y}$ (تار ُنُعی یِ کلاف) است، چنان که

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ \mathfrak{E})(r) = [y^\alpha(r)]h^{\mathbb{Y}}_\alpha. \tag{1358}$$

نتیجه میشود

$$(\nabla_\theta\,\mathfrak{E})^\alpha(r) = (\mathbf{D}_\theta\,y^\alpha)(r) + \{(\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\alpha{}_\beta[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[y^\beta(r)], \tag{1359}$$

یا

$$\begin{aligned}(\nabla_\theta\,\mathfrak{E})(r) = \Big(&(\mathbf{D}_\theta\,y^\alpha)(r)\\ &+ \{(\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\alpha{}_\beta[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[y^\beta(r)]\Big)h^{\mathbb{Y}}_\alpha.\end{aligned} \tag{1360}$$

با تعریف ِ

$$h_\alpha(x) = [\check{U}(x)]h^{\mathbb{Y}}_\alpha, \tag{1361}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{E}(r) = [y^\alpha(r)]\{h_\alpha[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}. \tag{1362}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})(r) = \Big((\mathbf{D}_\theta\,y^\alpha)(r) + \{(\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\alpha{}_\beta[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[y^\beta(r)]\Big)\\ \{h_\alpha[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}.\end{aligned} \tag{1363}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E})(r) = \Big((\mathbf{d}\,y^\alpha)(r) + \{(\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\bullet})^\alpha{}_\beta[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}[y^\beta(r)]\Big)\\ \otimes\{h_\alpha[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}.\end{aligned} \tag{1364}$$

با این روابط، یک طرح ِ دیگر برا یِ مشتق ِ هموردا یِ یک برش بر یک کلاف ِ برداری به دست میئید. از (1362) نمیشود به این شکل مشتق گرفت که مقدار ِ آن در دُ نقطه یِ نزدیک به هم از هم کم شود، چون هر چند $\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ یک فضا یِ خطی ست، مقدارها یِ $\mathfrak{E}$ در دُ نقطه یِ متمایز علی‌الاصول در دُ فضا یِ خطی یِ متفاوت َند. اگر به این توجه نمیشد، میشد نوشت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta(y^\alpha\,h_\alpha) &= (\boldsymbol{\nabla}_\theta\,y^\alpha)h_\alpha + y^\alpha\,\boldsymbol{\nabla}_\theta\,h_\alpha,\\ &= (\mathbf{D}_\theta\,y^\alpha)h_\alpha + y^\alpha\,\boldsymbol{\nabla}_\theta\,h_\alpha.\end{aligned} \tag{1365}$$

اگر تعریف شود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u\,h_\alpha &= \check{W}^\beta{}_{i\,\alpha}\,u^i\,h_\beta,\\ &= (\check{W}_u)^\beta{}_\alpha\,h_\beta,\\ &= \check{U}\,(\check{W}_u)^\beta{}_\alpha\,h^{\mathbb{Y}}_\beta,\\ &= \check{U}\,\check{W}_u\,h^{\mathbb{Y}}_\alpha,\\ &= \check{U}\,\check{W}_u\,\check{U}^{-1}\,h_\alpha,\\ &= \check{w}_u\,h_\alpha,\end{aligned} \tag{1366}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}\, h_\alpha = \check{W}^\beta{}_\alpha \otimes h_\beta, \tag{1367}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta\, h_\alpha &= \check{W}^\beta{}_{i\,\alpha}\{[\mathbf{D}_a(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})^i](r)]\}\theta^a\, h_\beta,\\ &= \check{W}^\beta{}_{i\,\alpha}\{[\mathbf{D}_\theta(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})^i](r)]\}h_\beta,\\ &= (\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\beta{}_\alpha\, h_\beta,\end{aligned} \tag{1368}$$

رابطه یِ (1365) میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta(y^\alpha\, h_\alpha) &= [\mathbf{D}_\theta\, y^\alpha + (\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\alpha{}_\beta\, y^\beta]h_\alpha,\\ &= \Big((\mathbf{D}_a\, y^\alpha)\theta^a + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\{[\mathbf{D}_\theta(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})^i](r)]\}y^\beta\Big)\, h_\alpha,\\ &= \Big(\mathbf{D}_a\, y^\alpha + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\{[\mathbf{D}_a(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})^i](r)]\}y^\beta\Big)\theta^a\, h_\alpha.\end{aligned} \tag{1369}$$

پس،

$$\begin{aligned}(\nabla_\theta\, \mathfrak{E})^\alpha(r) &= (\nabla_\theta\, y^\alpha)(r) + (\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})^\alpha{}_\beta[y^\beta(r)],\\ &= \Big((\mathbf{D}_\lambda\, y^\alpha)(r)\\ &\quad + \{\check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}[(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)]\}\{[\mathbf{D}_\lambda\,(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})^i](r)]\}[(y^\beta)(r)]\Big)\theta^\lambda,\end{aligned} \tag{1370}$$

که شبیه ِ (1359) است. به این ترتیب، هموستار در واقع مشتق ِ بردارها یِ پایه را مشخص میکند. با $x = \boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E}$ میشود (1370) را چنین هم نوشت.

$$(\nabla_\lambda\, \mathfrak{E})^\alpha(r) = (\mathbf{D}_\lambda\, y^\alpha)(r) + \{\check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}[x(r)]\}[y^\beta(r)][(\mathbf{D}_\lambda\, x^i)(r)]. \tag{1371}$$

یک حالت ِ خاص این است که به جا یِ $\mathfrak{E}$ برش ِ E به کار رود. دیده میشود

$$(\nabla_u\, E)^\alpha = \nabla_u\, y^\alpha + (\check{W}_u)^\alpha{}_\beta\, y^\beta, \tag{1372}$$

$$(\nabla_i\, E)^\alpha = \nabla_i\, y^\alpha + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\, y^\beta. \tag{1373}$$

پایه ی ِ h به مبنا بستِگی دارد. اما پایه ی ِ $h^{\mathbb{Y}}$ چنین نیست. به این ترتیب، با $u = \mathbf{D}_\theta(\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{E})$ میشود $\nabla \mathfrak{E}$ را چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\nabla_\theta\, \mathfrak{E} &= (\mathbf{D}_\theta + \check{W}_u)(\check{U}^{-1}\, \mathfrak{E}),\\ \nabla\, \mathfrak{E} &= e^a \otimes [\mathbf{D}_a + \check{W}_i\, \mathbf{D}_a\, (\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{E})^i](\check{U}^{-1}\, \mathfrak{E}),\end{aligned} \tag{1374}$$

که e یک پایه ی ِ فضا ی ِ مماس بر $\mathbb{L}$ است. همچنین، (1374) را میشود به این شکل ِ بستِتر نوشت.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta\, \mathfrak{E} &= \check{U}\, (\mathbf{D}_\theta + \check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})(\check{U}^{-1}\, \mathfrak{E}),\\ &= \check{U}\, \mathbf{D}_\theta(\check{U}^{-1}\, \mathfrak{E}) + \check{w}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta}\, \mathfrak{E},\end{aligned} \tag{1375}$$

یا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta &= [\mathbf{m}(\check{U})][\mathbf{D}_\theta + \mathbf{m}(\check{W}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta})][\mathbf{m}(U^{-1}],\\ &= [\mathbf{m}(\check{U})]\mathbf{D}_\theta[\mathbf{m}(U^{-1}] + \mathbf{m}(\check{w}_{\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})](r)]\}\theta}).\end{aligned} \tag{1376}$$

در رابطِها ی ِ اخیر تعریف ِ ضربگر برا ی ِ میدانها یی که مئلفِها یِشان تانسر (ِ یک فضا ی ِ دیگر) اند گسترش داده شده:

$$\{[\mathbf{m}(\mathfrak{X})]\mathfrak{Y}\}^\alpha = [\mathbf{m}(\mathfrak{X}^\alpha{}_\beta)]\mathfrak{Y}^\beta. \tag{1377}$$

سرانجام، اگر E یک برش در $\mathbb{E}$ باشد،

$$\begin{aligned}\nabla_u\, E &= (\mathbf{D}_u + \check{W}_u)(\check{U}^{-1}\, E),\\ \nabla\, E &= e^i \otimes (\mathbf{D}_i + \check{W}_i)(\check{U}^{-1}\, E),\end{aligned} \tag{1378}$$

که e یک پایه ی ِ فضا ی ِ مماس بر خمینه-ی ِ-پایه ی ِ کلاف است. همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u\, E &= \check{U}(\mathbf{D}_u + \check{W}_u)(\check{U}^{-1}\, E),\\ &= \check{U}\, \mathbf{D}_u(\check{U}^{-1}\, E) + \check{w}_u\, E,\end{aligned} \tag{1379}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_u = [\mathbf{m}(\check{U})][\mathbf{D}_u + \mathbf{m}(\check{W}_u)][\mathbf{m}(U^{-1}],$$
$$= [\mathbf{m}(\check{U})]\mathbf{D}_u[\mathbf{m}(U^{-1}] + \mathbf{m}(\check{w}_u). \tag{1380}$$

شکلها یِ (1363) یا (1366) و (1367) برا یِ مشتق ِ هموردا، به تناظر ِ بین ِ یک خمینه یِ خطی و فضا یِ مماس بر آن در یک نقطه متکی یَند. $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ و خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، و $\mathfrak{E}$ یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ است. اگر θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ باشد، $(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})(r)$ در $\mathrm{T}_{\mathfrak{E}(r)}\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ است. چون $\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ یک خمینه یِ خطی ست، $\mathrm{T}_{\mathfrak{E}(r)}\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ با $\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ یکریخت است (یا سادِتر، هم ان $\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}$ است). به این ترتیب،

$$[(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E})(r)] \in \mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{E})(r)}. \tag{1381}$$

رُشن است که اگر θ یک میدان ِ برداری در $\mathbb{L}$ باشد هم $\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}$ خُش-تعریف است. از جمله گیرم E در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ است و u یک میدان ِ برداری در $\mathbb{M}$ است. در این صورت u با E هممبنا ست و $(\boldsymbol{\nabla}_u\,E)$ خُش-تعریف است. در واقع $(\boldsymbol{\nabla}_u\,E)$ در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ است. اگر هموستار آفین باشد، $(\boldsymbol{\nabla}_u\,E)$ نسبت به E خطی ست.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری یِ هموار ِ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و هموستار ِ آفین ِ $\boldsymbol{W}$ است. از تعریف ِ

$$\mathsf{K}_a = [\mathbf{1}_{\mathrm{T}_x\mathbb{M}}, \check{U}_a(x)] \circ \{[\mathbf{D}(U_a^{-1})](z)\}, \tag{295}$$

دیده میشود

$$\mathsf{K}_a[\boldsymbol{W}_u(z)] = \{-u, U_a[\boldsymbol{\pi}(z), (W_{a\,u} \circ U_a^{-1})(z)]\}. \tag{1382}$$

تابع ِ $\tilde{\boldsymbol{W}}_a$ با دامنه یِ $(\mathrm{T}\mathbb{M} \oplus \mathbb{E}^*)$ را با

$$\varrho\{(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a)[\boldsymbol{W}_u(z)]\} + \{(\overset{\mathrm{o}}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{\mathsf{K}}_a)[\tilde{\boldsymbol{W}}_{a\,u}(\varrho)]\}(z) = 0, \tag{1383}$$

$$[(\mathbf{D}\tilde{\boldsymbol{\pi}})(\varrho)][\tilde{\boldsymbol{W}}_{a\,u}(\varrho)] = -u, \tag{1384}$$

تعریف میکنم، که $\tilde{\mathsf{K}}_a$ تناظر-ِ-یک-به-یکِ (295) متناظر با بدیهیگرِ $\tilde{U}_a$ است، که $\tilde{U}_a$ و U_a با یک نقشه تعریف شده اند. $\tilde{\boldsymbol{\pi}}$ هم افکنشِ $\mathbb{E}^*$ است. دیده میشود $\tilde{\boldsymbol{W}}_a$ یک هموستارِ آفین است. از

$$[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)][\boldsymbol{W}_u(z)] = -u, \tag{1385}$$

و با $x = \boldsymbol{\pi}(z) = \tilde{\boldsymbol{\pi}}(\varrho)$ نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
&\{(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{\mathsf{K}}_a)[\tilde{\boldsymbol{W}}_{a\,u}(\varrho)] - (\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{\mathsf{K}}_b)[\tilde{\boldsymbol{W}}_{b\,u}(\varrho)]\}(z),\\
&= \varrho\Big([\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}\Big),\\
&= [(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{U}_a^{-1})(\varrho)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\},\\
&= \Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}](x,\boldsymbol{\cdot})\}^*[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{U}_a^{-1})(\varrho)]\Big)[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U_b^{-1})(z)],\\
&= \Big([\tilde{\check{U}}_b(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,U_{a\,b}](x,\boldsymbol{\cdot})\}^*[(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{U}_a^{-1})(\varrho)]\Big)(z),\\
&= \Big[\Big([\tilde{\check{U}}_b(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U^*_{b\,a}][\tilde{U}_a^{-1}(\varrho)]\}\Big)(u)\Big](z),\\
&= -\Big[\Big([\tilde{\check{U}}_b(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U^*_{b\,a}][\tilde{U}_a^{-1}(\varrho)]\}\Big)\{[(\mathbf{D}\tilde{\boldsymbol{\pi}})(\varrho)][\tilde{\boldsymbol{W}}_{a\,u}(\varrho)]\}\Big](z),
\end{aligned} \tag{1386}$$

که $U_{a\,b}$ تابع-ِ-گذارِ متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b است، و در برابری یِ آخر (1384) به کار رفته. به این ترتیب، از مانسته یِ

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_a - \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \mathsf{K}_b = [\check{U}_a(x)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)], \tag{298}$$

برا یِ $\tilde{\mathsf{K}}$ ها نتیجه میشود

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_b = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ \tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_a. \tag{1387}$$

از (1384) هم دیده میشود

$$\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0 \circ \tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_b = \overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0 \circ \tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_a. \tag{1388}$$

پس

$$\tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_b = \tilde{\mathsf{K}}_b \circ \tilde{\boldsymbol{W}}_a, \tag{1389}$$

و چون $\tilde{\mathsf{K}}_b$ وارونپذیر است،

$$\tilde{\boldsymbol{W}}_b = \tilde{\boldsymbol{W}}_a. \tag{1390}$$

پس $\tilde{\boldsymbol{W}}_a$ به بدیهیگر وابسته نیست. به هم ین خاطر شاخص ِ a را از آن بر میدارم. به $\tilde{\boldsymbol{W}}$ هموستار ِ القاییده از $\boldsymbol{W}$ میگویم. رابطه ی ِ $\tilde{\boldsymbol{W}}$ با $\boldsymbol{W}$ را بر حسب ِ بخشها ی ِ قائم مینویسم. با $\zeta = (\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ \tilde{U}^{-1})(\varrho)$ و $y = (\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ U^{-1})(z)$،

$$\zeta[W_u(y)] + [\tilde{W}_u(\zeta)](y) = 0. \tag{1391}$$

بر حسب ِ مئلفِها،

$$(\check{W}_u)^\alpha{}_\beta + (\check{\tilde{W}}_u)_\beta{}^\alpha = 0, \tag{1392}$$

یا

$$\check{W}^\alpha{}_{i\,\beta} + \check{\tilde{W}}_{\beta\,i}{}^\alpha = 0. \tag{1393}$$

سرانجام، اگر $\mathfrak{E}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{L})$ و $\mathfrak{Z}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E}^*;\mathbb{L})$ باشد، که $\mathbb{L}$ یک خمینه و $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری ی ِ هموار است، و اگر $\mathfrak{E}$ و $\mathfrak{Z}$ هممبنا باشند،

$$\mathbf{D}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})] = (\nabla\,\mathfrak{Z})_\alpha\,(U^{-1}\circ\mathfrak{E})^\alpha + (\tilde{U}^{-1}\circ\mathfrak{Z})_\alpha\,(\nabla\,\mathfrak{E})^\alpha, \tag{1394}$$

که U یک بدیهیگر برا ی ِ $\mathbb{E}$ است، و U و $\tilde{U}$ با یک نقشه تعریف شده اند. به این ترتیب،

$$\mathbf{D}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})] = (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}), \tag{1395}$$

که با استفاده از

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma = \mathbf{D}\,\Sigma, \tag{1307}$$

میشود

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})] = (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{E}), \tag{1396}$$

و اگر θ یک بردار در $\mathrm{T}\mathbb{L}$ باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta[\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})] &= \mathbf{D}_\theta[\mathfrak{Z}(\mathfrak{E})],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{Z})(\mathfrak{E}) + \mathfrak{Z}(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}).\end{aligned} \tag{1397}$$

یک حالت ِ خاص این است که E و Ξ برشها یی بر به ترتیب $\mathbb{E}$ و $\mathbb{E}^*$ باشند. در این صورت،

$$\mathbf{D}[\Xi(E)] = (\nabla\,\Xi)_\alpha\,(U^{-1}\circ E)^\alpha + (\tilde{U}^{-1}\circ\Xi)_\alpha\,(\nabla\,E)^\alpha, \tag{1398}$$

یا

$$\mathbf{D}[\Xi(E)] = (\boldsymbol{\nabla}\,\Xi)(E) + \Xi(\boldsymbol{\nabla}\,E), \tag{1399}$$

که میشود

$$\boldsymbol{\nabla}[\Xi(E)] = (\boldsymbol{\nabla}\,\Xi)(E) + \Xi(\boldsymbol{\nabla}\,E), \tag{1400}$$

و اگر u بردار ی در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ باشد، که $\mathbb{M}$ خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$ است،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u[\Xi(E)] &= \mathbf{D}_u[\Xi(E)],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\Xi)(E) + \Xi(\boldsymbol{\nabla}_u\,E).\end{aligned} \tag{1401}$$

از

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta(\mathfrak{E}_1\otimes\mathfrak{E}_2) = (\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}_1)\otimes\mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_1\otimes(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,\mathfrak{E}_2), \tag{1296}$$

که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u(\Sigma\,E) &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\Sigma)E + \Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,E,\\ &= (\mathbf{D}_u\,\Sigma)E + \Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,E,\end{aligned} \tag{1310}$$

یک حالت ِ خاص َش است، همراه با (1307) و (1397) دیده میشود اگر $\boldsymbol{W}$ یک هموستار ِ آفین بر کلاف ِ برداری ی ِ E باشد، برا ی ِ مشخص-کردن ِ آن (و هموستارها ی ِ القاییده بر کلافها ی ِ دُگان و حاصل- ِ-ضربها ی ِ تانسری) کافی ست اثر ِ $\boldsymbol{W}$ بر یک پایه از تار ِ E معلوم باشد. در واقع اگر $h(x)$ یک پایه برا ی ِ $\mathbb{E}_x$ باشد، که مشتق ِ هموردا یَش با (1366) داده میشود، و u یک بردار در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد، که $\mathbb{M}$ خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{E}$ است، مانسته ی ِ (1366) برا ی ِ دُگان ِ h میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_u\, h^\alpha = -h^\alpha\, \check{U}\, \check{W}_u\, \check{U}^{-1}, \tag{1402}$$

که $\check{U}$ بدیهیگر- ِ-خطی یی ست که $\check{W}$ متناظر با آن است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی ی ِ $\mathbb{Y}$ است. E در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{R}\times\mathbb{M})$ است، چنان که به ازا ی ِ هر s در $\mathbb{R}$، تابع ِ $E(s,\boldsymbol{\cdot})$ یک برش در $\mathbb{E}$ است. رُشن است که متناظر با بردار ِ u که در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است و هموستار ِ $\boldsymbol{W}$،

$$\Big(\{\boldsymbol{\nabla}_u[E(s,\boldsymbol{\cdot})]\}(x)\Big) \in [\mathrm{T}_{E(s,x)}\mathbb{E}]. \tag{1403}$$

تعریف میکنم

$$[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E](s,x) = \{\boldsymbol{\nabla}_u[E(s,\boldsymbol{\cdot})]\}(x), \tag{1404}$$

و دیده میشود اگر U یک بدیهیگر باشد:

$$U[x, y(s,x)] = E(s,x), \tag{1405}$$

آنگاه

$$[\overset{0}{\nabla}_{(1)\,u}\, E]^\alpha(s,x) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,u}\, y^\alpha](s,x) + W^\alpha_u[x, y(s,x)]. \tag{1406}$$

رُشن است که $[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E]$ در $\mathsf{F}(\text{Ŧ}\mathbb{E};\mathbb{R}\times\mathbb{M})$ است، و به ازا ی ِ هر s در $\mathbb{R}$ تابع ِ $[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E](s,\boldsymbol{\cdot})$ یک برش در $(\text{Ŧ}\mathbb{E})$ است. از اینجا دیده میشود $\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E]\}$ هم در $\mathsf{F}(\text{Ŧ}\mathbb{E};\mathbb{R}\times\mathbb{M})$ است، و به ازا ی ِ هر s در $\mathbb{R}$ تابع ِ $\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E]\}(s,\boldsymbol{\cdot})$ یک برش در $(\text{Ŧ}\mathbb{E})$ است.

$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E]$ در $\mathsf{F}(\mathbb{TE};\mathbb{R}\times\mathbb{M})$ است، و به ازا یِ هر s در $\mathbb{R}$ تابع ِ $[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E](s,\boldsymbol{.})$ یک برش در $(\mathbb{TE})$ است. $\mathbb{TE}$ یک کلاف ِ برداری ست. بنابراین $\{\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E]\}$ هم در $\mathsf{F}(\mathbb{TE};\mathbb{R}\times\mathbb{M})$ است، و به ازا یِ هر s در $\mathbb{R}$ تابع ِ $\{\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E]\}(s,\boldsymbol{.})$ یک برش در $(\mathbb{TE})$ است. البته مشتق ِ هموردا برا یِ $(\mathbb{TE})$ باید با هموستار ی در $(\mathbb{TE})$ تعریف شود. میخاهم این هموستار (این مشتق ِ هموردا) را چنان تعریف کنم که

$$\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E] = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)\,u}\, E]. \tag{1407}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}[\overset{0}{\nabla}_{(1)\,u}\, E]^{\alpha}\}(s,x) &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,u}\, y^{\alpha}](s,x)\\ &\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}_{u}][x,y(s,x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y^{\beta}](s,x)\},\\ &= \{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y^{\alpha}]\}(s,x)\\ &\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}_{u}][x,y(s,x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y^{\beta}](s,x)\}.\end{aligned} \tag{1408}$$

از اینجا معلوم میشود

$$\begin{aligned}\{\overset{0}{\nabla}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E]\}^{\alpha}(s,x) &= \{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y^{\alpha}]\}(s,x)\\ &\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}_{u}][x,y(s,x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y^{\beta}](s,x)\}.\end{aligned} \tag{1409}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E(s,x) &= \Big(\mathbf{D}\{U[x,y(\boldsymbol{.},x)]\}\Big)(s),\\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U][x,y(s,x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y](s,x)\}.\end{aligned} \tag{1410}$$

$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U]$ بدیهیگر ِ متناظر با U برا یِ $(\mathbb{TE})$ است. $[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, y]$ را با q نشان میدهم. دیده میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, E](s,x) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U][x,y(s,x)]\}[q(s,x)]. \tag{1411}$$

به این ترتیب، (1409) میشود

$$\{\overset{0}{\nabla}_{(1)\,u}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,E]\}^{\alpha}(s,x) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,u}\,q^{\alpha}](s,x) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\alpha}_{u}][x,y(s,x)]\}[q(s,x)]. \tag{1412}$$

از اینجا یک هموستار (مشتق ِ هموردا) برا یِ (ŦE) تعریف میکنم. E را یک برش در (ŦE) میگیرم، که

$$\begin{aligned} y(x) &= \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}}[q(x)], \\ \mathsf{E}(x) &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][x,y(x)]\}[q(x)], \end{aligned} \tag{1413}$$

که U یک بدیهیگر است.

$$(\nabla_u\,\mathsf{E})^{\alpha}(x) = (\mathbf{D}_u\,q^{\alpha})(x) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,W^{\alpha}_{u}][x,y(x)]\}[q(x)]. \tag{1414}$$

مفصلتر ِ این میشود

$$(\nabla_u\,\mathsf{E})^{\alpha}(x) = (\mathbf{D}_u\,q^{\alpha})(x) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\alpha}_{u}][x,y(x)]\}[q^{\beta}(x)]. \tag{1415}$$

هموستار ی که به این ترتیب برا یِ (ŦE) تعریف شده مستقل از بدیهیگر است. این را میشود از این نتیجه گرفت که طرف ِ راست ِ (1407) مستقل از بدیهیگر است، پس طرف ِ چپ هم چنین است، یا مستقیمَن ثابت کرد. برا یِ اثبات ِ مستقیم، بدیهیگرها یِ U_a و U_b، و $U_{a\,b}$ (تابع- ِ-گذار ِ متناظر) را میگیرم، که q_a و y_a، و q_b و y_b متناظر با به ترتیب U_a و U_b تعریف شده اند. دیده میشود

$$q_a(x) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][x,y_b(x)]\}[q_b(x)], \tag{1416}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_u\,q^{\alpha}_a)(x) = \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}][x,y_b(x)] \\ + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}][x,y_b(x)]\}[(\mathbf{D}_u\,y^{\gamma}_b)(x)]\Big)[q^{\beta}_b(x)] \\ + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}][x,y_b(x)]\}[(\mathbf{D}_u\,q^{\beta}_b)(x)]. \end{aligned} \tag{1417}$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
&\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, W^{\alpha}_{a\,u}][x, y_a(x)]\}[q^{\gamma}_a(x)],\\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, W^{\alpha}_{a\,u}][x, y_a(x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\gamma}_{a\,b}][x, y_b(x)]\}[q^{\beta}_b(x)],\\
&= \Big[\Big(\mathbf{D}_{\beta}\{W^{\alpha}_{a\,u}[x, U_{a\,b}(x, \boldsymbol{\cdot})]\}\Big)[y_b(x)]\Big][q^{\beta}_b(x)],\\
&= \Big\{\Big[\mathbf{D}_{\beta}\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, U^{\alpha}_{a\,b}](x, \boldsymbol{\cdot})\}[W^{\gamma}_{b\,u}(x, \boldsymbol{\cdot})] - \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\, U^{\alpha}_{a\,b}(x, \boldsymbol{\cdot})\Big)\Big][y_b(x)]\Big\}[q^{\beta}_b(x)],\\
&= \Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, U^{\alpha}_{a\,b}][x, y_b(x)]\}\{W^{\gamma}_{b\,u}[x, y_b(x)]\}\\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, U^{\alpha}_{a\,b}][x, y_b(x)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\gamma}_{b\,u}][x, y_b(x)]\}\\
&\quad - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,u}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\alpha}_{a\,b}][x, y_b(x)]\Big)[q^{\beta}_b(x)].
\end{aligned}
\tag{1418}
$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
(\nabla_u\, \mathsf{E})^{\alpha}_a(x) &= (\mathbf{D}_u\, q^{\alpha}_a)(x) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W^{\alpha}_{a\,u}][x, y_a(x)]\}[q_a(x)],\\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\alpha}_{a\,b}][x, y_b(x)]\}\\
&\quad \Big(\{(\mathbf{D}_u\, y^{\gamma}_b)(x) + W^{\gamma}_{b\,u}[x, y_b(x)]\}\Big)[q^{\beta}_b(x)]\\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\alpha}_{a\,b}][x, y_b(x)]\}\\
&\quad \Big((\mathbf{D}_u\, q^{\beta}_b)(x) + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\gamma}_{b\,u}][x, y_b(x)]\}[q^{\beta}_b(x)]\Big).
\end{aligned}
\tag{1419}
$$

با استفاده از

$$
[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\, \mho_{a\,b}](x, q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U_{a\,b}](x, y)\}\, q^{\beta}, \tag{415}
$$

$$
[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\alpha}\, \mho_{a\,b}](x, q) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\, U_{a\,b}](x, y), \tag{416}
$$

نتیجه میشود

$$
[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, \mho^{\alpha}_{a\,b}](x, q_b) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\alpha}_{a\,b}](x, y_b)\} q^{\beta}_b, \tag{1420}
$$

$$
[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\beta}\, \mho^{\alpha}_{a\,b}](x, q_b) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^{\alpha}_{a\,b}](x, y_b), \tag{1421}
$$

به این ترتیب،

$$(\nabla_u \mathsf{E})^\alpha_a(x) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\gamma}\, \mho^\alpha_{a\,b}][x, q_b(x)]\}[(\mathbf{D}_u\, E)^\gamma_b(x)] + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\beta}\, \mho^\alpha_{a\,b}][x, q_b(x)]\}[(\nabla_u \mathsf{E})^\beta_b(x)], \tag{1422}$$

که

$$E := \boldsymbol{\pi} \circ \mathsf{E}. \tag{1423}$$

رابطه یِ (1422) هم ان رابطه یِ معمول ِ تبدیل ِ مئلفِها یِ مشتق ِ هموردا ست. البته باید توجه کرد که E دُ دسته متغیر دارد. یک شکل ِ بسته یِ تبدیل ِ مولفِها یِ مشتق ِ هموردا متناظر با این دُ دسته متغیر چنین است.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}(\nabla_u E)^\alpha\\(\nabla_u \mathsf{E})^\alpha\end{pmatrix}_a(x) &= \left[\begin{pmatrix}\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, U^\alpha_{a\,b} & \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\beta}\, U^\alpha_{a\,b}\\ \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mho^\alpha_{a\,b} & \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\beta}\, \mho^\alpha_{a\,b}\end{pmatrix}[x, q_b(x)]\right]\left[\begin{pmatrix}(\nabla_u E)^\beta\\(\nabla_u \mathsf{E})^\beta\end{pmatrix}_b(x)\right]\\ &= \begin{pmatrix}(\mathbf{D}_\beta\, U^\alpha_{a\,b})[x, y_b(x)] & 0\\ [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mho^\alpha_{a\,b}][x, q_b(x)] & [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)\,\beta}\, \mho^\alpha_{a\,b}][x, q_b(x)]\end{pmatrix}\\ &\quad\left[\begin{pmatrix}(\nabla_u E)^\beta\\(\nabla_u \mathsf{E})^\beta\end{pmatrix}_b(x)\right]\end{aligned} \tag{1424}$$

دیده میشود هموستار ی که به این شکل تعریف شد مشتق ِ هموستار ِ متناظر با $\mathbb{E}$ نسبت به متغیر ِ تار است. به این هموستار هموستار ِ القاییده از W (یا $\boldsymbol{W}$) میگویم، و آن را با $\mathcal{W}$ (یا $\boldsymbol{\mathcal{W}}$) نشان میدهم:

$$\mathcal{W}_u(x, q) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W_u](x, y)\}q. \tag{1425}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(\nabla_u \mathsf{E})^\alpha(x) &= (\mathbf{D}_u\, q^\alpha)(x) + \{\mathcal{W}^\alpha_u[x, y(x)]\}[q(x)],\\ &= (\mathbf{D}_u\, q^\alpha)(x) + \{[(\mathcal{W}_u)^\alpha{}_\beta[x, y(x)]\}[q^\beta(x)].\end{aligned} \tag{1426}$$

مشتق ِ هموردا برا یِ برشها یِ $\mathbb{TE}$ را به سادگی میشود به مشتق ِ هموردا برا یِ تابعها یی از یک خمینه به $\mathbb{TE}$ گسترش داد. F یک تابع ِ هموار در $\mathsf{F}(\mathbb{TE}; \mathbb{L})$ است، که $\mathbb{E}$ یک کلاف و $\mathbb{L}$ یک خمینه

است، و

$$x(r) = \boldsymbol{\pi}_{\mathbb{TE}\to\mathbb{M}}[\mathfrak{E}(r)],$$
$$y(r) = \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}}[q(r)],$$
$$\mathsf{F}(r) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U][x(r), y(r)]\}[q(r)]. \tag{1427}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}(\nabla_\theta\, \mathsf{F})^\alpha(r) &= (\mathbf{D}_\theta\, q^\alpha)(r) + \Big(\{\mathit{W}^\alpha_{[(\mathbf{D}\, x)(r)]\theta}\}[x(r), y(r)]\Big)[q(r)],\\ &= (\mathbf{D}_\theta\, q^\alpha)(r) + \Big(\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W^\alpha_{[(\mathbf{D}\, x)(r)]\theta}\}[x(r), y(r)]\Big)[q(r)],\end{aligned} \tag{1428}$$

یا مفصلتر

$$\begin{aligned}(\nabla_\theta\, \mathsf{F})^\alpha(r) &= (\mathbf{D}_\theta\, q^\alpha)(r) + \Big(\{\mathit{W}_{[(\mathbf{D}\, x)(r)]\theta}\}^\alpha{}_\beta[x(r), y(r)]\Big)[q^\beta(r)],\\ &= (\mathbf{D}_\theta\, q^\alpha)(r) + \Big(\{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha_{[(\mathbf{D}\, x)(r)]\theta}\}[x(r), y(r)]\Big)[q^\beta(r)],\end{aligned} \tag{1429}$$

که θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ است.

اگر $\mathbb{E}$ خطی و $\boldsymbol{W}$ آفین باشد، آنگاه

$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W_u](x, y)\}\,(q) = [\check{W}_{u\,\alpha}(x)]q^\alpha, \tag{1430}$$

که برا یِ q مختصات ِ دِکَرتی یِ وابسته به کار رفته. دیده میشود در این حالت W به دسته یِ اول ِ متغیرها یَش بستِگی ندارد. در این حالت از مقایسه یِ اثر ِ W_u بر (x, y) با اثر ِ W_u بر (x, q)، دیده میشود به یک بیان ِ نادقیق،

$$\mathit{W}_u(x, q) = W_u(x, q). \tag{1431}$$

در این حالت به بیان ی نادقیق میگویم هموستار ِ القاییده از $\boldsymbol{W}$ بر $(\mathbb{TE})$ هم ان $\boldsymbol{W}$ است:

$$\mathit{W} = W. \tag{1432}$$

دیده میشود در این حالت اگر E یک برش در $\mathbb{E}$ باشد، که

$$y(x) = \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}}[q(x)],$$
$$\mathsf{E}(x) = [\check{U}(x)][q(x)], \tag{1433}$$

که $\mathbb{Y}$ تار ُ نُعی ی ِ $\mathbb{E}$ است،

$$(\nabla_u\,\mathsf{E})^\alpha(x) = (\mathbf{D}_u\,q^\alpha)(x) + (\check{W}_u)^\alpha{}_\beta[q^\beta(x)], \tag{1434}$$

که u در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ است، که $\mathbb{M}$ خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{E}$ است. همچنین، اگر $\mathbb{L}$ یک خمینه باشد و F در $\mathsf{F}(\text{Ŧ}\mathbb{E};\mathbb{L})$ باشد، که

$$x(r) = \boldsymbol{\pi}_{\text{Ŧ}\mathbb{E}\to\mathbb{M}}[\mathfrak{E}(r)],$$
$$y(r) = \boldsymbol{\pi}_{\mathrm{T}\mathbb{Y}\to\mathbb{Y}}[q(r)],$$
$$\mathsf{F}(r) = [\check{U}(x)][q(r)], \tag{1435}$$

آنگاه،

$$(\nabla_\theta\,\mathsf{F})^\alpha(r) = (\mathbf{D}_\theta\,q^\alpha)(r) + \{\check{W}_{[(\mathbf{D}\,x)(r)]\theta}\}^\alpha{}_\beta[q^\beta(r)], \tag{1436}$$

که θ در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ است.

40 خمش

برش ِ E در x_0 به معنی ی ِ هموستاری ایستا ست، وقت ی مشتق ِ هموردا ی ِ آن در x_0 صفر باشد. این بر حسب ِ بدیهیگر یعنی

$$[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ E)](x_0) + (W \circ U^{-1} \circ E)(x_0) = 0. \tag{1437}$$

برش E در مجموعه ی ِ $\mathbb{S}$ به معنی ی ِ هموستاری ثابت است، اگر در کل ِ آن مجموعه مشتق ِ هموردا ی ِ این برش صفر باشد. این یعنی برا ی ِ هر x در $\mathbb{S}$،

$$[\mathbf{D}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ E)](x) + (W \circ U^{-1} \circ E)(x) = 0, \tag{1438}$$

یا بازتر،

$$(\mathbf{D}_i\, y^\alpha)(x) + W^\alpha{}_i[x, y(x)] = 0, \qquad (1439)$$

که y هم ان $(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ E)$ است. اما این معادله لزومَن برا یِ E جواب ندارد، حتا مُضعَن. در واقع اگر $\mathbb{S}$ یک مجموعه یِ باز باشد، شرط ِ لازم برا یِ وجود ِ جواب این است که مشتق ِ کامل ِ $W^\alpha{}_i$ نسبت به x^j، در i و j متقارن باشد:

$$\mathbf{D}_i\{W^\alpha{}_j[\boldsymbol{.}, y(\boldsymbol{.})]\} - \mathbf{D}_j\{W^\alpha{}_i[\boldsymbol{.}, y(\boldsymbol{.})]\} = 0. \qquad (1440)$$

دیده میشود

$$\Big(\mathbf{D}_i\{W^\alpha{}_j[\boldsymbol{.}, y(\boldsymbol{.})]\}\Big)(x) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, W^\alpha{}_j][x, y(x)] + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha{}_j][x, y(x)]\}\mathbf{D}_i\, y^\beta. \qquad (1441)$$

به این ترتیب، شرط ِ لازم ِ وجود ِ جواب برا یِ (1438) این است که

$$F^\alpha{}_{i\,j} = 0, \qquad (1442)$$

که

$$F^\alpha{}_{i\,j} = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, W^\alpha{}_j - \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\, W^\alpha{}_i + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha{}_i]W^\beta{}_j - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha{}_j]W^\beta{}_i. \qquad (1443)$$

دیده میشود (1442) هم ان شرط ِ

$$-\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\, W_{a\,i} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W_{a\,i}]W_{a\,j} = -\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, W_{a\,j} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, W_{a\,j}]W_{a\,i}, \qquad (1143)$$

است: شرط ِ این که بشود بخش ِ قائم ِ هموستار را در یک همسایِگی در خمینه-یِ-پایه صفر کرد. به این ترتیب، وجود ِ یک برش ِ به-معنی-یِ-هموستاری-ایستا در یک همسایِگی در خمینه-یِ-پایه، همئرز است با این که بشود بخش ِ قائم ِ هموستار را در آن همسایِگی در خمینه-یِ-پایه صفر کرد.

با $F^\alpha{}_{i\,j}$ ها میدانها یِ دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل ِ F^α بر خمینه-یِ-پایه تعریف میشود:

$$F^\alpha = \frac{1}{2}\, F^\alpha{}_{i\,j}(\mathbf{d}\, x^i) \wedge (\mathbf{d}\, x^j), \qquad (1444)$$

که به آنها دُ-فرمها یِ خمش میگویم. اینها را مئلفِها یِ F (دُ-فرم ِ خمش) میگیرم. دُ-فرم ِ خمش در $\mathsf{F}\Big(\mathrm{T}\mathbb{Y};\{[\mathrm{T}^{(2,0)}\mathbb{M}]\times\mathbb{Y}\}\Big)$ است، با این ویژگی که $F_{(u,v)}(y)$ در $\mathrm{T}_y\mathbb{Y}$ است (و البته رُشن است که $F_{(u,v)}$ نسبت به جابِجایی یِ u با v پادمتقارن است). همچنین، $F_{i\,j}$ (که مئلفِها یَش $F^{\alpha}{}_{i\,j}$ ها یَند) در $\mathsf{F}[\mathrm{T}\mathbb{Y};(\mathbb{M}\times\mathbb{Y})]$ است. از (1443) و (1444) نتیجه میشود

$$F^{\alpha}=\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^{\alpha}+[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\alpha}]\wedge W^{\beta}. \tag{1445}$$

دُ-فرم ِ خمش هم به بدیهیگر وابسته است. بدیهیگرها یِ U_a و U_b با تابع- ِ-گذار ِ $U_{a\,b}$ را میگیرم. با $z=U_a(x,y_a)=U_b(x,y_b)$، اگر ω یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل (بر خمینه-یِ-پایه) تابع ِ y_a باشد،

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\omega](x,y_a)&=\Big(\mathbf{d}\{\omega[\boldsymbol{\cdot},U_{a\,b}(\boldsymbol{\cdot},y_b)]\}\Big)(x)\\&\quad-(-1)^s\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,\omega](x,y_a)\}\wedge\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\mu}_{a\,b}](x,y_b)\}.\end{aligned} \tag{1446}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^{\alpha}_a](x,y_a)&=\Big(\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}]W^{\beta}_b-\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\alpha}_{a\,b}\}\Big)(x,y_b)\\&\quad+\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,W^{\alpha}_a](x,y_a)\}\wedge\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\mu}_{a\,b}](x,y_b)\},\\&=\Big(\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}]W^{\beta}_b\}\Big)(x,y_b)\\&\quad+\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,W^{\alpha}_a](x,y_a)\}\wedge\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\mu}_{a\,b}](x,y_b)\}.\end{aligned} \tag{1447}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,W^{\alpha}_a]\wedge W^{\mu}_a\}(x,y_a)&=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,W^{\alpha}_a](x,y_a)\}\\&\quad\wedge\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\mu}_{a\,b}]\,W^{\beta}_b-\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\alpha}_{a\,b}\}(x,y_b)\Big).\end{aligned} \tag{1448}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}F^{\alpha}_a(x,y_a)&=\Big(\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}]W^{\beta}_b\}\Big)(x,y_b)\\&\quad+\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,W^{\alpha}_a](x,y_a)\}\wedge\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\mu}_{a\,b}]W^{\beta}_b\}(x,y_b)\Big),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\} \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)] \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^{\beta}_{b}](x,y_b)\} \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}(W^{\alpha}_{a}\circ U^{-1}_{a}\circ U_b)](x,y_b)\} \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)], \\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\} \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)] \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^{\beta}_{b}](x,y_b)\} \\
&\quad + \Big[\Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,U^{\alpha}_{a\,b}]W^{\mu}_{b} - \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,U^{\alpha}_{a\,b}\}\Big)(x,y_b)\Big] \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)], \\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}\{[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^{\beta}_{b}](x,y_b)\} \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\mu}_{b}](x,y_b)\} \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)] \\
&\quad + \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}[W^{\mu}_{b}(x,y_b)] \wedge [W^{\beta}_{b}(x,y_b)]. \qquad (1449)
\end{aligned}
$$

جمله یِ آخر صفر است، چون نسبت به جابِجایی یِ β با μ، عامل ِ اول متقارن و حاصل- ِ-ضرب ِ برونی پادمتقارن است. به این ترتیب،

$$F^{\alpha}_{a}(x,y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}](x,y_b)\}F^{\beta}_{b}(x,y_b), \qquad (1450)$$

یا

$$F^{\alpha}_{a}\circ U^{-1}_{a}\circ U_b = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,U^{\alpha}_{a\,b}]F^{\beta}_{b}, \qquad (1451)$$

که میشود آنها را چنین نوشت

$$F_a(x,y_a) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y_b)\}F_b(x,y_b), \qquad (1452)$$

یا

$$F_a\circ U^{-1}_{a}\circ U_b = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}]F_b. \qquad (1453)$$

دُ-فرم ِ خمش را میشود چنان تعریف کرد که مستقل از بدیهیگر باشد. متناظر با بدیهیگر ِ U_a، تعریف میکنم

$$f_{a\,i\,j}(z) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U^{-1}_{a}(z)]\}[(F_{a\,i\,j}\circ U^{-1}_{a})(z)]. \qquad (1454)$$

از (1452) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} f_{a\,i\,j}(z) &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][U_b^{-1}(z)]\}[(F_{b\,i\,j}\circ U_b^{-1})(z)],\\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_b][U_b^{-1}(z)]\}[(F_{b\,i\,j}\circ U_b^{-1})(z)],\\ &= f_{b\,i\,j}, \end{aligned} \tag{1455}$$

که نتیجه میدهد $f_{a\,i\,j}$ به a بستِگی ندارد. پس شاخص ِ بدیهیگر را از آن برمیدارم:

$$f_{i\,j}(z) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}[(F_{a\,i\,j}\circ U_a^{-1})(z)]. \tag{1456}$$

به f با

$$f = \frac{1}{2}\,f_{i\,j}(\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j), \tag{1457}$$

دُ-فرم ِ مستقل-از-بدیهیگر ِ خمش (یا سادِتر دُ-فرم ِ خمش) میگویم. دیده میشود

$$f = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][U_a^{-1}(z)]\}[(F_a\circ U_a^{-1})(z)]. \tag{1458}$$

میشود این را مستقیمَن با w نوشت. چون طرف ِ راست به بدیهیگر بستِگی ندارد، شاخص ِ a را حذف میکنم. دیده میشود

$$\begin{aligned} f^r(z) &= \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]\{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,W^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^\alpha]\wedge W^\beta\}\Big)[U^{-1}(z)],\\ &= \Big[\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]W^\alpha\} - \{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}[\mathbf{D}_{(1)\,\alpha}\,U^r]\}W^\alpha\\ &\quad + \Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]W^\alpha\} - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]W^\alpha\Big)\wedge W^\beta\Big]\\ &\quad [U^{-1}(z)]. \end{aligned} \tag{1459}$$

جمله یِ آخر صفر است. در بقیه یِ جملِها W را بر حسب ِ w مینویسم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned} f^r(z) = \Big(&\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}(w^r\circ U) - \{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}\,(w\circ U)\}^\alpha\\ &+ [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}(w^r\circ U)]\wedge\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}\,(w\circ U)\}^\beta\Big)[U^{-1}(z)] \end{aligned} \tag{1460}$$

رُشن است که $f_{i\,j}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{TE};\mathbb{E})$ است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار است، که بر آن هموستارها یِ $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ تعریف شده. خمش ِ متناظر با هموستار ِ $\boldsymbol{W}_i$ را با F_i نشان میدهم. تعریف میکنم

$$W_2 - W_1 = \mathfrak{V}. \tag{1461}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}(F_2 - F_1)^\alpha = {}& \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathfrak{V}^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge W_1^\beta + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W_1^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta \\ & + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta.\end{aligned} \tag{1462}$$

همچنین تعریف میکنم

$$w_2 - w_1 = \mathfrak{v}. \tag{1463}$$

رُشن است که

$$\mathfrak{v}(z) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U][U^{-1}(z)]\}\{\mathfrak{V}[U^{-1}(z)]\}, \tag{1464}$$

که U بدیهیگر است، و البته دیده شده بود که $\mathfrak{v}$ به بدیهیگر بستِگی ندارد. دیده میشود

$$\begin{aligned}(f_2 - f_1)(z) = {}& \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U]\{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,\mathfrak{V}^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge W_1^\beta + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W_1^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta \\ & + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta\}\Big)[U^{-1}(z)].\end{aligned} \tag{1465}$$

رُشن است که $(f_2 - f_1)$ هم به بدیهیگر بستِگی ندارد. $(f_2 - f_1)$ را میشود بر حسب ِ $\mathfrak{v}$ (به جا یِ $\mathfrak{V}$) هم نوشت. از (1460) دیده میشود

$$\begin{aligned}(f_2 - f_1)^r(z) = {}& \Big(\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}(\mathfrak{v}^r \circ U) - \{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\alpha}\,U^r]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}(\mathfrak{v} \circ U)\}^\alpha \\ & + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}(\mathfrak{v}^r \circ U)] \wedge \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}(w_1 \circ U)\}^\beta \\ & + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}(w_1^r \circ U)] \wedge \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}(\mathfrak{v} \circ U)\}^\beta \\ & + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}(\mathfrak{v}^r \circ U)] \wedge \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U]^{-1}(\mathfrak{v} \circ U)\}^\beta\Big)[U^{-1}(z)].\end{aligned} \tag{1466}$$

رابطه یِ (1462) را میشود بر حسب ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{V}$ نوشت. $\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$، تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$، و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. $\boldsymbol{W}_1$ و $\boldsymbol{W}_2$ هموستارها یی بر $\mathbb{E}$ اند (که مشتق- ِ-هموردا یِ متناظر با آنها را با، به ترتیب، $\boldsymbol{\nabla}_1$ و $\boldsymbol{\nabla}_2$ نشان میدهم)، و $\{(i, \mathbf{d}\,x^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ مختصاتی برا یِ $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ است. $\mathfrak{V}$ با (1461) تعریف شده. $\mathfrak{V}_i$ در $\mathsf{F}[\mathrm{T}\mathbb{Y}; (\mathbb{M} \times \mathbb{Y})]$ است، که با آن یک تابع در $\mathsf{F}(\text{Ŧ}\mathbb{E}; \mathbb{E})$ ساخته میشود. این تابع هم ان $\mathfrak{v}_i$ است، که با (1463) تعریف شده:

$$\mathfrak{v}_i(z) = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U][U^{-1}(z)]\}\{\mathfrak{V}_i[U^{-1}(z)]\}. \tag{1467}$$

دیده میشود اگر $z = U(x, y)$، آنگاه $\mathfrak{v}_i(z)$ در $\mathrm{T}\mathbb{E}_x$ است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{v}_i = \boldsymbol{\pi}. \tag{1468}$$

از اینجا دیده میشود $\mathfrak{v}_i$ یک تابع ِ تاری ست. در واقع $\mathfrak{v}_i$ یک تابع ِ مبنا-نگهدار است. با توجه به مشتق ِ هموردا یِ برشها یِ $\text{Ŧ}\mathbb{E}$، و مشتق ِ هموردا یِ تابعها یِ از $\mathbb{E}$ به یک خمینه یِ هموار، مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{v}_i$ متناظر با هموستار ِ $\boldsymbol{W}_1$ چنین میشود

$$(\nabla_{1\,i}\, \mathfrak{v}_j)^\alpha = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, \mathfrak{V}^\alpha{}_j + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W_1{}^\alpha{}_i]\mathfrak{V}^\beta{}_j - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mathfrak{V}^\alpha{}_j]W_1{}^\beta{}_i. \tag{1469}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
(\nabla_{1\,i}\, \mathfrak{v}_j)^\alpha(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j) &= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, \mathfrak{V}^\alpha{}_j](\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j) \\
&\quad + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W_1{}^\alpha{}_i]\mathfrak{V}^\beta{}_j(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j) \\
&\quad - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mathfrak{V}^\alpha{}_j]W_1{}^\beta{}_i(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j), \\
&= \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, \mathfrak{V}^\alpha \\
&\quad + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W_1{}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mathfrak{V}^\alpha] \wedge W_1{}^\beta.
\end{aligned} \tag{1470}$$

از مقایسه یِ این با (1462) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
(F_2 - F_1)^\alpha &= (\nabla_{1\,i}\, \mathfrak{v}_j)^\alpha(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j) + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta, \\
&= 2\,\mathsf{aSym}[(\nabla_1\, \mathfrak{v})^\alpha] + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta,
\end{aligned} \tag{1471}$$

که یک شکل ِ بستِتِر َش این است.

$$(F_2 - F_1)^\alpha = (\nabla_1 \wedge \mathfrak{v})^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta. \tag{1472}$$

و البته به هم ین ترتیب،

$$\begin{aligned}(F_1 - F_2)^\alpha &= -(\nabla_{2\,i}\,\mathfrak{v}_j)^\alpha(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j) + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta,\\ &= -2\,\mathsf{aSym}[(\nabla_2\,\mathfrak{v})^\alpha] + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta,\\ &= -(\nabla_2 \wedge \mathfrak{v})^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta. \end{aligned} \tag{1473}$$

یک نتیجه یِ فرعی یِ اینها هم این است که

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,\mathfrak{V}^\alpha] \wedge \mathfrak{V}^\beta &= \frac{1}{2}\,[(\nabla_2 - \nabla_1)_i\,\mathfrak{v}_j]^\alpha(\mathbf{d}\,x^i) \wedge (\mathbf{d}\,x^j),\\ &= \mathsf{aSym}\{[(\nabla_2 - \nabla_1)\mathfrak{v}]^\alpha\}, \qquad (1474)\\ &= \frac{1}{2}\,[(\nabla_2 - \nabla_1) \wedge \mathfrak{v}]^\alpha. \qquad (1475)\end{aligned}$$

اگر هموستار آفین باشد، (1445) میشود

$$F^\alpha(x,y) = [(\mathbf{d}\,\check{W}^\alpha)(x)]y + [\check{W}^\alpha{}_\beta(x)] \wedge [\check{W}^\beta(x)]y, \tag{1476}$$

که نتیجه میدهد $F^\alpha(x,y)$ نسبت به y خطی ست. $\check{F}$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\check{F}^\alpha(x)]y = F^\alpha(x,y), \tag{1477}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\check{F}^\alpha = \mathbf{d}\,\check{W}^\alpha + \check{W}^\alpha{}_\beta \wedge \check{W}^\beta. \tag{1478}$$

با

$$[\check{F}^\alpha(x)]y =: [\check{F}^\alpha{}_\beta(x)]y^\beta \tag{1479}$$

هم معلوم میشود

$$\check{F}^{\alpha}{}_{\beta} = \mathbf{d}\,\check{W}^{\alpha}{}_{\beta} + \check{W}^{\alpha}{}_{\mu} \wedge \check{W}^{\mu}{}_{\beta}. \tag{1480}$$

در این حالت (1452) میشود

$$\check{F}_a = \check{U}_{a\,b}\,\check{F}_b\,\check{U}_{b\,a}, \tag{1481}$$

که نشان میدهد رد ِ $\check{F}$ به بدیهیگر بستِگی ندارد:

$$(\check{F}_a)^{\alpha}{}_{\alpha} = (\check{F}_b)^{\alpha}{}_{\alpha}. \tag{1482}$$

همچنین، از (1480) دیده میشود

$$\check{F}^{\alpha}{}_{\alpha} = \mathbf{d}\,\check{W}^{\alpha}{}_{\alpha}. \tag{1483}$$

بنابراین،

$$\grave{f} = \check{F}^{\alpha}{}_{\alpha}, \tag{1484}$$

که مفصلتر َش میشود

$$\grave{f}_{i\,j} = \check{F}^{\alpha}{}_{\alpha\,i\,j}. \tag{1485}$$

قبلَن معلوم شده بود مشتق ِ برونی یِ رد ِ یک هموستار ِ آفین به بدیهیگر بستِگی ندارد. اینجا معلوم شد مشتق ِ برونی یِ رد ِ یک هموستار ِ آفین (یا رد ِ مشتق ِ برونی یِ یک هموستار ِ آفین)، هم ان رد ِ خمش است. با تغییر-دادن ِ بدیهیگر، خمش با یک تبدیل ِ تشابهی عوض میشود، پس رد ِ آن تغییر نمیکند.

متناظر با یک کلاف ِ برداری با هموستارها یِ آفین ِ W_1 و W_2، تعریف میکنم

$$\check{W}_2 - \check{W}_1 =: \check{\mathfrak{V}}, \tag{1486}$$

نتیجه میشود

$$(\check{F}_2 - \check{F}_1)^\alpha = \mathrm{d}\,\check{\mathfrak{V}}^\alpha + \check{W}_1{}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{W}_1{}^\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta, \tag{1487}$$

یا

$$(\check{F}_2 - \check{F}_1)^\alpha{}_\beta = \mathrm{d}\,\check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta + \check{W}_1{}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{W}_1{}^\mu{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta. \tag{1488}$$

رُشن است که اینها را هم میشود بر حسب ِ مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{V}$ نوشت:

$$(\nabla_i\,\check{\mathfrak{v}}_j)^\alpha = \mathbf{D}_i\,\check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_j + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\,\check{\mathfrak{V}}^\beta{}_j - \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_{j\,\beta}\,\check{W}^\beta{}_i. \tag{1489}$$

$$(\nabla_i\,\check{\mathfrak{v}}_j)^\alpha{}_\beta = \mathbf{D}_i\,\check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_{j\,\beta} + \check{W}^\alpha{}_{i\,\mu}\,\check{\mathfrak{V}}^\mu{}_{j\,\beta} - \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_{j\,\mu}\,\check{W}^\mu{}_{i\,\beta}. \tag{1490}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}(\check{F}_2 - \check{F}_1)^\alpha &= 2\,[\mathsf{aSym}(\nabla_1\,\check{\mathfrak{v}})]^\alpha + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta,\\ &= (\nabla_1 \wedge \check{\mathfrak{v}})^\alpha + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta.\end{aligned} \tag{1491}$$

$$\begin{aligned}(\check{F}_2 - \check{F}_1)^\alpha{}_\beta &= 2\,[\mathsf{aSym}(\nabla_1\,\check{\mathfrak{v}})]^\alpha{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta,\\ &= (\nabla_1 \wedge \check{\mathfrak{v}})^\alpha{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta.\end{aligned} \tag{1492}$$

همچنین رُشن است که

$$\begin{aligned}(\check{F}_1 - \check{F}_2)^\alpha &= -2\,[\mathsf{aSym}(\nabla_2\,\check{\mathfrak{v}})]^\alpha + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta,\\ &= -(\nabla_2 \wedge \check{\mathfrak{v}})^\alpha + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta \wedge \check{\mathfrak{V}}^\beta.\end{aligned} \tag{1493}$$

$$\begin{aligned}(\check{F}_1 - \check{F}_2)^\alpha{}_\beta &= -2\,[\mathsf{aSym}(\nabla_2\,\check{\mathfrak{v}})]^\alpha{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta,\\ &= -(\nabla_2 \wedge \check{\mathfrak{v}})^\alpha{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}^\mu{}_\beta.\end{aligned} \tag{1494}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\check{\mathfrak{V}}^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\check{\mathfrak{V}}^{\beta} &= \mathsf{aSym}[(\nabla_2-\nabla_1)\check{\mathfrak{v}})]^{\alpha},\\ &= \frac{1}{2}\,[(\nabla_2-\nabla_1)\wedge\check{\mathfrak{v}})]^{\alpha}. \qquad (1495)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\check{\mathfrak{V}}^{\alpha}{}_{\mu}\wedge\check{\mathfrak{V}}^{\mu}{}_{\beta} &= \mathsf{aSym}[(\nabla_2-\nabla_1)\check{\mathfrak{v}})]^{\alpha}{}_{\beta},\\ &= \frac{1}{2}\,[(\nabla_2-\nabla_1)\wedge\check{\mathfrak{v}})]^{\alpha}{}_{\beta}. \qquad (1496)\end{aligned}$$

وقت ی هموستار آفین باشد، $f_{i\,j}$ هم خطی ست. در این حالت با تعریف ِ $\check{f}$ با

$$\check{f}_{i\,j}\,z = f_{i\,j}(z), \qquad (1497)$$

از (1456) نتیجه میشود

$$\check{f}_{i\,j} = \check{U}_a\,\check{F}_{a\,i\,j}\,\check{U}_a^{-1}, \qquad (1498)$$

یا

$$\check{f} = \check{U}_a\,\check{F}_a\,\check{U}_a^{-1}. \qquad (1499)$$

از (1481) دیده میشود

$$\check{U}_a\,\check{F}_a\,\check{U}_a^{-1} = \check{U}_b\,\check{F}_b\,\check{U}_b^{-1}, \qquad (1500)$$

که همراه با (1499) مستقیمَن نشان میدهد $\check{f}$ به بدیهیگر بستِگی ندارد. همچنین، از (1480) دیده میشود

$$\begin{aligned}\check{f}^{\alpha}{}_{\beta} &= \check{U}(\mathbf{d}\,\check{W}^{\alpha}{}_{\beta}+\check{W}^{\alpha}{}_{\mu}\wedge\check{W}^{\mu}{}_{\beta})\check{U}^{-1},\\ &= \check{U}[\mathbf{d}(\check{U}^{-1}\,\check{w}^{\alpha}{}_{\beta}\,\check{U})]\check{U}^{-1}+\check{w}^{\alpha}{}_{\mu}\wedge\check{w}^{\mu}{}_{\beta}. \qquad (1501)\end{aligned}$$

اینجا هم با تعریف ِ

$$\check{w}_2-\check{w}_1 =: \check{\mathfrak{v}}, \qquad (1502)$$

دیده میشود

$$(\check{f}_2 - \check{f}_1)^\alpha{}_\beta = \check{U}(\mathbf{d}\,\check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{W}_1{}^\mu{}_\beta + \check{W}_1{}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}_1{}^\mu{}_\beta + \check{\mathfrak{V}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{V}}_1{}^\mu{}_\beta)\check{U}^{-1},$$
$$= \check{U}[\mathbf{d}(\check{U}^{-1}\,\check{\mathfrak{v}}^\alpha{}_\beta\,\check{U})]\check{U}^{-1} + \check{\mathfrak{v}}^\alpha{}_\mu \wedge \check{w}_1{}^\mu{}_\beta + \check{w}_1{}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{v}}^\mu{}_\beta$$
$$+ \check{\mathfrak{v}}_1{}^\alpha{}_\mu \wedge \check{\mathfrak{v}}^\mu{}_\beta. \tag{1503}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است، و h یک میدان-پایه برا یِ $\mathbb{E}$ است که با

$$h_\alpha(x) = [\check{U}(x)]h^{\mathbb{Y}}_\alpha \tag{1361}$$

به پایه یِ $h^{\mathbb{Y}}$ برا یِ تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ مربوط است. e یک میدان-پایه یِ مختصاتی برا یِ $\mathrm{T}\mathbb{M}$، و $\boldsymbol{W}$ یک هموستار ِ آفین بر $\mathbb{E}$ است. با استفاده از

$$\check{W}_i = \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\, h^{\mathbb{Y}}_\alpha \otimes h^{\mathbb{Y}\,\beta}, \tag{1504}$$
$$\check{F}_{i\,j} = (\check{F}^\alpha{}_\beta)_{i\,j}\, h^{\mathbb{Y}}_\alpha \otimes h^{\mathbb{Y}\,\beta}, \tag{1505}$$

رابطه یِ (1480) را میشود چنین نوشت.

$$\check{F}_{i\,j} = \mathbf{D}_i\,\check{W}_j - \mathbf{D}_j\,\check{W}_i + \check{W}_i\,\check{W}_j - \check{W}_j\,\check{W}_i. \tag{1506}$$

همچنین اگر E یک برش بر $\mathbb{E}$ باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\,\boldsymbol{\nabla}_{e_j}\,E)^\alpha = \mathbf{D}_i\,(\boldsymbol{\nabla}_{e_j}\,E)^\alpha + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\,(\boldsymbol{\nabla}_{e_j}\,E)^\beta,$$
$$= \mathbf{D}_i(\mathbf{D}_j\,E^\alpha + \check{W}^\alpha{}_{j\,\beta}\,E^\beta) + \check{W}^\alpha{}_{i\,\beta}\,(\mathbf{D}_j\,E^\beta + \check{W}^\beta{}_{j\,\gamma}\,E^\gamma). \tag{1507}$$

از اینجا دیده میشود

$$[(\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\,\boldsymbol{\nabla}_{e_j} - \boldsymbol{\nabla}_{e_j}\,\boldsymbol{\nabla}_{e_i})E]^\alpha,$$
$$= \{\mathbf{D}_i\,\check{W}^\alpha{}_{j\,\beta} - \mathbf{D}_j\,\check{W}^\alpha{}_{i\,\beta} + \check{W}^\alpha{}_{i\,\mu}\,\check{W}^\mu{}_{j\,\beta} - \check{W}^\alpha{}_{j\,\mu}\,\check{W}^\mu{}_{i\,\beta}\}E^\beta,$$
$$= (\check{F}^\alpha{}_\beta)_{i\,j}\,E^\beta. \tag{1508}$$

همچنین،

$$\check{f}_{i\,j} = (\check{F}^{\alpha}{}_{\beta})_{i\,j}\, h_{\alpha} \otimes h^{\beta}. \tag{1509}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{m}(\check{f}_{i\,j}) = [\boldsymbol{\nabla}_{e_i}, \boldsymbol{\nabla}_{e_j}]. \tag{1510}$$

u و v میدانها یی برداری در $\mathbb{M}$ اند. E در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ است، که $\mathbb{E}$ کلاف ی برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. پس $(\boldsymbol{\nabla}_u\, E)$ و $(\boldsymbol{\nabla}_v\, E)$ در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ اند، و $(\boldsymbol{\nabla}_u\, \boldsymbol{\nabla}_v\, E)$ و $(\boldsymbol{\nabla}_v\, \boldsymbol{\nabla}_u\, E)$ هم در $\mathsf{S}(\mathbb{E})$ اند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_v]E &= u^i\, \boldsymbol{\nabla}_{e_i}(v^j\, \boldsymbol{\nabla}_{e_j}\, E) - v^i\, \boldsymbol{\nabla}_{e_i}(u^j\, \boldsymbol{\nabla}_{e_j}\, E),\\
&= u^i\, v^j\, (\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\, \boldsymbol{\nabla}_{e_j} - \boldsymbol{\nabla}_{e_j}\, \boldsymbol{\nabla}_{e_i})E + (u^i\, \boldsymbol{\nabla}_{e_i}\, v^j - v^i\, \boldsymbol{\nabla}_{e_i}\, u^j)\boldsymbol{\nabla}_{e_j} E,\\
&= u^i\, v^j\, [\boldsymbol{\nabla}_{e_i}, \boldsymbol{\nabla}_{e_j}]E + (u \diamond v)^j\, \boldsymbol{\nabla}_{e_j}\, E,\\
&= u^i\, v^j\, \check{f}_{i\,j}\, E + \boldsymbol{\nabla}_{u \diamond v}\, E,
\end{aligned} \tag{1511}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{m}[\check{f}(u, v)] = [\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_v] - \boldsymbol{\nabla}_{u \diamond v}. \tag{1512}$$

41 اتحاد ِ بیانکی

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار است که بر آن هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ تعریف شده. برا یِ خمش ِ F،

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, F^{\alpha} &= \overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, W^{\alpha} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}] \wedge W^{\beta}\},\\
&= [\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}] \wedge W^{\beta} - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}] \wedge [\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, W^{\beta}],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\{F^\alpha - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\alpha] \wedge W^\mu\}\Big) \wedge W^\beta \\
&\quad - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha] \wedge \{F^\beta - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\beta] \wedge W^\mu\}, \\
&= [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, F^\alpha] \wedge W^\beta - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha] \wedge F^\beta \\
&\quad - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\alpha] \wedge W^\beta \wedge W^\mu \\
&\quad - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\alpha] \wedge [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\mu] \wedge W^\beta \\
&\quad + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha] \wedge [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\beta] \wedge W^\mu. \qquad (1513)
\end{aligned}
$$

دُ جمله یِ آخر با هم حذف میشوند. همچنین،

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\mu}\, W^\alpha] \wedge W^\beta \wedge W^\mu = 0, \qquad (1514)$$

چون مشتق نسبت به β و μ متقارن، و $(W^\beta \wedge W^\mu)$ نسبت به β و μ پادمتقارن است. به این ترتیب،

$$\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\, F^\alpha + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha] \wedge F^\beta - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, F^\alpha] \wedge W^\beta = 0. \qquad (1515)$$

به این رابطه اتحاد ِ بیانکی (یا اتحاد ِ دوم ِ بیانکی) میگویند.

اتحاد ِ بیانکی را میشود بر حسب ِ مشتق ِ هموردا یِ F (یا f) نوشت. $\mathbb{E}$ یک کلاف با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{Y}$ و هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ است، و $\{(i, \mathbf{d}\, x^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ مختصاتی ی برا یِ $\mathrm{T}^*\mathbb{M}$ است. دیده میشود $F_{i\,j}$ در $\mathsf{F}[\mathrm{T}\mathbb{Y}; (\mathbb{M} \times \mathbb{Y})]$ به $\mathrm{T}\mathbb{Y}$ است، که با آن یک تابع در $\mathsf{F}(\text{Ŧ}\mathbb{E}; \mathbb{E})$ ساخته میشود. این تابع هم ان $f_{i\,j}$ است. رُشن است که اگر $z = U(x, y)$، آنگاه $f_{i\,j}(z)$ در $\mathrm{T}\mathbb{E}_x$ است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\pi} \circ f_{i\,j} = \boldsymbol{\pi}. \qquad (1516)$$

از اینجا دیده میشود $f_{i\,j}$ یک تابع ِ تاری ست. در واقع $f_{i\,j}$ یک تابع ِ مبنا-نگهدار است. با توجه به مشتق ِ هموردا یِ برشها یِ $\text{Ŧ}\mathbb{E}$، و مشتق ِ هموردا یِ تابعها یِ از $\mathbb{E}$ به یک خمینه یِ هموار، مشتق ِ هموردا یِ $f_{i\,j}$ چنین میشود

$$(\nabla_i\, f_{j\,k})^\alpha = \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\, F^\alpha{}_{j\,k} + [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^\alpha{}_i] F^\beta{}_{j\,k} - [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, F^\alpha{}_{j\,k}] W^\beta{}_i. \qquad (1517)$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_i f_{j\,k})^\alpha(\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j)\wedge(\mathbf{d}\,x^k),\\
&=[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,i}\,F^\alpha{}_{j\,k}](\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j)\wedge(\mathbf{d}\,x^k)\\
&\quad+[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^\alpha{}_i]F^\beta{}_{j\,k}(\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j)\wedge(\mathbf{d}\,x^k)\\
&\quad-[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,F^\alpha{}_{j\,k}]W^\beta{}_i(\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j)\wedge(\mathbf{d}\,x^k),\\
&=2\{\overset{0}{\mathbf{d}}_{(0)}\,F^\alpha+[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^\alpha]\wedge F^\beta-[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,F^\alpha]\wedge W^\beta\}. \qquad (1518)
\end{aligned}
$$

از مقایسه یِ این با (1515) این شکلها برا یِ اتحاد ِ بیانکی نتیجه میشود

$$(\nabla_i\,f_{j\,k})^\alpha(\mathbf{d}\,x^i)\wedge(\mathbf{d}\,x^j)\wedge(\mathbf{d}\,x^k)=0, \qquad (1519)$$

$$\mathsf{aSym}[(\nabla\,f)^\alpha]=0, \qquad (1520)$$

یا بستِتر

$$(\nabla\wedge f)^\alpha=0. \qquad (1521)$$

$$\nabla\wedge f=0. \qquad (1522)$$

اگر هموستار آفین باشد، اتحاد ِ بیانکی میشود

$$\mathbf{d}\,\check{F}^\alpha+\check{W}^\alpha{}_\beta\wedge\check{F}^\beta-\check{F}^\alpha{}_\beta\wedge\check{W}^\beta=0, \qquad (1523)$$

یا

$$\mathbf{d}\,\check{F}^\alpha{}_\beta+\check{W}^\alpha{}_\mu\wedge\check{F}^\mu{}_\beta-\check{F}^\alpha{}_\mu\wedge\check{W}^\mu{}_\beta=0. \qquad (1524)$$

وقت ی هموستار آفین است، اتحاد ِ بیانکی را از

$$\mathbf{m}(\check{f}_{i\,j})=[\boldsymbol{\nabla}_{e_i},\boldsymbol{\nabla}_{e_j}] \qquad (1510)$$

هم میشود به دست آورد:

$$[\boldsymbol{\nabla}_{e_i},[\boldsymbol{\nabla}_{e_j},\boldsymbol{\nabla}_{e_k}]]+[\boldsymbol{\nabla}_{e_j},[\boldsymbol{\nabla}_{e_k},\boldsymbol{\nabla}_{e_i}]+[\boldsymbol{\nabla}_{e_k},[\boldsymbol{\nabla}_{e_i},\boldsymbol{\nabla}_{e_j}]]=0, \qquad (1525)$$

که اتحاد ِ یاکُبی برا یِ $\boldsymbol{\nabla}_{e_i}$ و $\boldsymbol{\nabla}_{e_j}$ و $\boldsymbol{\nabla}_{e_k}$ است. در این حالت شکل ِ (1519) برا یِ ، اتحاد ِ بیانکی میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\,\check{f}_{j\,k})e^i\wedge e^j\wedge e^k=0, \tag{1526}$$

یا باز-شده

$$\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\,\check{f}_{j\,k}+\boldsymbol{\nabla}_{e_j}\,\check{f}_{k\,i}+\boldsymbol{\nabla}_{e_k}\,\check{f}_{i\,j}=0. \tag{1527}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_{e_i}\,\check{f}_{j\,k}&=\boldsymbol{\nabla}_{e_i}[(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}\,h_\alpha\otimes h^\beta],\\
&=[\mathbf{D}_i\,(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}]h_\alpha\otimes h^\beta\\
&\quad+(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}\,\check{U}\,\check{W}_i\,\check{U}^{-1}\,h_\alpha\otimes h^\beta-(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}\,h_\alpha\otimes h^\beta\,\check{U}\,\check{W}_i\,\check{U}^{-1},\\
&=\check{U}\{[\mathbf{D}_i\,(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}]\check{U}^{-1}\,h_\alpha\otimes h^\beta\,\check{U}\\
&\quad+(\check{f}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}[\check{W}_i,\check{U}^{-1}\,h_\alpha\otimes h^\beta\,\check{U}]\}\check{U}^{-1},\\
&=\check{U}\{[\mathbf{D}_i\,(\check{F}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}]h^{\mathbb{Y}}_\alpha\otimes h^{\mathbb{Y}\,\beta}+[\check{W}_i,(\check{F}^{\alpha}{}_{\beta})_{j\,k}\,h^{\mathbb{Y}}_\alpha\otimes h^{\mathbb{Y}\,\beta}]\}\check{U}^{-1},\\
&=\check{U}\{\mathbf{D}_i\,\check{F}_{j\,k}+[\check{W}_i,\check{F}_{j\,k}]\}\check{U}^{-1}.
\end{aligned} \tag{1528}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{D}_i\,\check{F}_{j\,k}+[\check{W}_i,\check{F}_{j\,k}]+\mathbf{D}_j\,\check{F}_{k\,i}+[\check{W}_j,\check{F}_{k\,i}]+\mathbf{D}_k\,\check{F}_{i\,j}+[\check{W}_k,\check{F}_{i\,j}]=0. \tag{1529}$$

این یک شکل ِ دیگر ِ اتحاد ِ بیانکی ست، که بسته اَش میشود

$$\{\mathbf{D}_i\,\check{F}_{j\,k}+[\check{W}_i,\check{F}_{j\,k}]\}e^i\wedge e^j\wedge e^k=0, \tag{1530}$$

یا

$$\mathbf{d}\check{F}+\check{W}\wedge\check{F}-\check{F}\wedge\check{W}=0, \tag{1531}$$

که هم ان (1524) است.

u و v و w سه میدان ِ برداری یَند. از

$$\mathbf{m}[\check{f}(u,v)] = [\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_v] - \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}, \tag{1512}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}_u, [\boldsymbol{\nabla}_v, \boldsymbol{\nabla}_w]] &= \Big[\boldsymbol{\nabla}_u, \mathbf{m}[\check{f}(v,w)] + \boldsymbol{\nabla}_{v\diamond w}\Big],\\ &= \mathbf{m}\{\boldsymbol{\nabla}_u[\check{f}(v,w)]\} + [\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_{v\diamond w}]\end{aligned} \tag{1532}$$

از (1512) ضمنَن نتیجه میشود

$$[\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_{v\diamond w}] = \mathbf{m}[\check{f}(u, v\diamond w)] + \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond(v\diamond w)}. \tag{1533}$$

به این ترتیب،

$$[\boldsymbol{\nabla}_u, [\boldsymbol{\nabla}_v, \boldsymbol{\nabla}_w]] = \mathbf{m}\{\boldsymbol{\nabla}_u[\check{f}(v,w)] + \check{f}(u, v\diamond w)\} + \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond(v\diamond w)}. \tag{1534}$$

از

$$[\boldsymbol{\nabla}_u, [\boldsymbol{\nabla}_v, \boldsymbol{\nabla}_w]] + [\boldsymbol{\nabla}_v, [\boldsymbol{\nabla}_w, \boldsymbol{\nabla}_u]] + [\boldsymbol{\nabla}_w, [\boldsymbol{\nabla}_u, \boldsymbol{\nabla}_v]] = 0, \tag{1535}$$

که اتحاد ِ یاکُبی برا یِ $\boldsymbol{\nabla}_u$ و $\boldsymbol{\nabla}_v$ و $\boldsymbol{\nabla}_w$ است، و

$$u\diamond(v\diamond w) + v\diamond(w\diamond u) + w\diamond(u\diamond v) = 0, \tag{1536}$$

که اتحاد ِ یاکُبی برا یِ u و v و w (با $\diamond$) است، همراه با (1534)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}_u[\check{f}(v,w)] + \check{f}(u, v\diamond w)\\ &+ \boldsymbol{\nabla}_v[\check{f}(w,u)] + \check{f}(v, w\diamond u)\\ &+ \boldsymbol{\nabla}_w[\check{f}(u,v)] + \check{f}(w, u\diamond v),\\ = 0.\end{aligned} \tag{1537}$$

دیده میشود که (1527) حالت ِ خاص ِ این رابطه است، وقتی u و v و w میدان-پایِها یِ مختصاتی باشند، در واقع وقت ی u و v و w دُ-به-دُ با هم جابِجا شوند.

42 مشتق ِ هموردا یِ یک خم

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، و $\mathfrak{C}$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. این خم یک تابع از یک خمینه (یک بازه در $\mathbb{R}$) به یک کلاف ($\mathbb{E}$) است. به این ترتیب، با هموستار ی که بر $\mathbb{E}$ تعریف شده باشد میشود مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{C}$ را تعریف کرد: مشتق ِ $\mathfrak{C}$ در t یک بردار در $\mathrm{T}_{\mathfrak{C}(t)}\mathbb{E}$ است. با هموستار میشود این بردار را بر $\mathrm{T}_{\mathfrak{C}(t)}\mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})(t)}$ افکند. به حاصل مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{C}$ در t میگوییم، و آن را با $(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t)$ نشان میدهم:

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t) = \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t)]. \tag{1538}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t) + \boldsymbol{W}_{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})](t)}[\mathfrak{C}(t)]. \tag{1539}$$

با بدیهیگر ِ U_a با

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}(t) &= U_a[x(t), y_a(t)],\\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}) &= u,\end{aligned} \tag{1540}$$

دیده میشود

$$\{[\mathbf{D}(U_a^{-1})][\mathfrak{C}(t)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t)] = \{0, (\mathbf{D}\,y_a)(t) + W_{a\,u(t)}[y_a(t)]\}, \tag{1541}$$

یا

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t) &= \{(\mathbf{D}\,U_a)[(U_a^{-1})\circ\mathfrak{C})(t)]\}\{0, (\mathbf{D}\,y_a)(t) + W_{a\,u(t)}[y_a(t)]\},\\ &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_a][(U_a^{-1})\circ\mathfrak{C})(t)]\}\{(\mathbf{D}\,y_a)(t) + W_{a\,u(t)}[y_a(t)]\},\end{aligned} \tag{1542}$$

و البته

$$\begin{aligned}\{(\mathbf{D}\,y_a)(t) + W_{a\,u(t)}[y_a(t)]\} &= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}][x(t), y_b(t)]\}\\ &\qquad \{(\mathbf{D}\,y_b)(t) + W_{b\,u(t)}[y_b(t)]\},\end{aligned} \tag{1543}$$

که U_b یک بدیهیگر و $U_{a\,b}$ تابع- ِ-گذار ِ متناظر با بدیهیگرها یِ U_a و U_b است. رابطه یِ (1541) میشود

$$\Big(\{[\mathbf{D}(U^{-1})][\mathfrak{C}(t)]\}[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t)]\Big)^{\alpha} = (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + [W_{u(t)}]^{\alpha}[y(t)],$$
$$= (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + \{W^{\alpha}{}_{i}[x(t),y(t)]\}[u^{i}(t)], \quad (1544)$$

یا سادِتر،

$$(\nabla\,\mathfrak{C})^{\alpha}(t) = (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + [W_{u(t)}]^{\alpha}[y(t)],$$
$$= (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + \{W^{\alpha}{}_{i}[x(t),y(t)]\}[u^{i}(t)]. \quad (1545)$$

اگر کلاف برداری، و هموستار آفین باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t) + \check{\boldsymbol{W}}_{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})](t)}[\mathfrak{C}(t)], \quad (1546)$$

یا سادِتر

$$(\nabla\,\mathfrak{C})^{\alpha}(t) = (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + [\check{W}_{u(t)}]^{\alpha}{}_{\beta}[y^{\beta}(t)],$$
$$= (\mathbf{D}\,y^{\alpha})(t) + \{\check{W}^{\alpha}{}_{i\,\beta}[x(t)]\}[y^{\beta}(t)][u^{i}(t)]. \quad (1547)$$

رُشن است که اینها حالتها یِ خاص ِ چیزها یی یَند که قبلَن برا یِ مشتق ِ هموردا یِ یک تابع از یک خمینه به یک کلاف بررسی شدند.

به هم ین ترتیب، این روابط برا یِ خمها یِ مرکب (با فرض ِ این که ترکیب تعریف شده باشد) به سادِگی به دست میئیند. اثبات کاملَن مشابه ِ مانستِها یِ این روابط برا یِ تابعها یِ مرکب ست. در همه یِ موارد فرض شده مبنا یِ خمها یی که با هم ترکیب میشوند یکسان است، روابط ِ القا برا یِ هموستارها فرض شده، در صورت ِ لزوم فرض شده کلافها برداری یَند، و در صورت ِ لزوم فرض شده هموستارها آفین َند.

$\mathfrak{C}_1$ و $\mathfrak{C}_2$ و $\mathfrak{C}$ خمها یی در کلافها یِ به ترتیب $\mathbb{E}_1$ و $\mathbb{E}_2$ و $\mathbb{E}$ اند، $\mathfrak{S}$ خم ی با مقدار در $\mathbb{R}$ است، و $\mathfrak{X}$ خم ی در $\mathbb{E}^*$ است.

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2) = (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}_1) \oplus (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}_2), \quad (1548)$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{C}_1 \otimes \mathfrak{C}_2) = (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_1 \otimes (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}_2), \tag{1549}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{S}\,\mathfrak{C}) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{S})\mathfrak{C} + \mathfrak{S}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}), \tag{1550}$$

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{X}(\mathfrak{C})] = (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{X})(\mathfrak{C}) + \mathfrak{X}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}). \tag{1551}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. $\mathfrak{C}$ یک خم در این کلاف است، و $\mathfrak{f}$ خم ی ست که تصویر َش زیرمجموعه یِ دامنه یِ $\mathfrak{C}$ است. رُشن است که $(\mathfrak{C} \circ \mathfrak{f})$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. به سادِگی دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi} \circ (\mathfrak{f}^*\,\mathfrak{C}) = \mathfrak{f}^*(\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{C}), \tag{1552}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{C} \circ \mathfrak{f}) = (\mathbf{D}\,\mathfrak{f})[(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}) \circ \mathfrak{f}], \tag{1553}$$

که رابطه یِ اخیر را میشود چنین نوشت.

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{f}^*\,\mathfrak{C} = \mathfrak{f}^*\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}. \tag{1554}$$

رُشن است که این یک حالت ِ خاص ِ (1199) است، که دامنه یِ $\mathfrak{C}$ بازه ای در $\mathbb{R}$ است. اگر $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ $\mathfrak{C}$ باشد، $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ $(\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{C})$ هم هست و

$$\mathfrak{r}_*(\boldsymbol{\pi} \circ \mathfrak{C}) = \boldsymbol{\pi} \circ (\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C}). \tag{1555}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{C} \circ \mathfrak{r}^{-1}) &= [\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][(\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}) \circ \mathfrak{r}^{-1}],\\ &= \left(\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{r}}\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}\right) \circ r^{-1}.\end{aligned} \tag{1556}$$

دیده میشود اثر ِ بازپارامترش بر مشتق ِ همموردا یِ یک خم کاملَن شبیه ِ اثر ِ بازپارامترش بر مشتق ِ یک خم است: مشتق ِ همموردا با هم ان تابع- ِ-بازپارامترش بازپارامتریده میشود، و نتیجه در مشتق ِ وارون ِ تابع- ِ-بازپارامترش ضرب میشود. اینجا هم مثل ِ مشتق ِ خم، (1556) را میشود بر حسب ِ پیشران نوشت:

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C} = \mathfrak{r}_*\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C}. \tag{1557}$$

مشتق ِ هموردا یِ یک خم در اثر ِ بازپارامترش تغییر میکند. اما این که مشتق ِ هموردا یِ یک خم صفر باشد، با بازپارامترش تغییر نمیکند. پس میشود صفربودن ِ مشتق ِ هموردا را برا یِ خمها یِ مستقل-از-پارامتر تعریف کرد. میگویم یک خم (خم ِ مستقل-از-پارامتر) افقی ست، اگر مشتق ِ هموردا یِ آن خم (هر یک از اعضا یِ آن خم ِ مستقل-از-پارامتر) صفر باشد.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. γ یک خم در $\mathbb{M}$ و E یک برش در $\mathbb{E}$ است. رُشن است که $(E\circ\gamma)$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla}(E\circ\gamma)](t) &= \boldsymbol{\nu}\{[\mathbf{D}(E\circ\gamma)](t)\},\\
&= [\mathbf{D}(E\circ\gamma)](t) + \boldsymbol{W}_{\{(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})[(E\circ\gamma)(t)]\}\{[\mathbf{D}(E\circ\gamma)](t)\}}[(E\circ\gamma)(t)],\\
&= \{(\mathbf{D}\,E)[\gamma(t)]\}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)] + \boldsymbol{W}_{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ E\circ\gamma)](t)}[(E\circ\gamma)(t)],\\
&= \{(\mathbf{D}\,E)[\gamma(t)]\}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)] + \boldsymbol{W}_{(\mathbf{D}\,\gamma)(t)}[(E\circ\gamma)(t)],\\
&= \boldsymbol{\nu}\{(\mathbf{D}\,E)[\gamma(t)]\}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)],\\
&= \{(\boldsymbol{\nabla}\,E)[\gamma(t)]\}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)],
\end{aligned} \tag{1558}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}(E\circ\gamma) = [(\boldsymbol{\nabla}\,E)\circ\gamma](\mathbf{D}\,\gamma). \tag{1559}$$

مشتق ِ هموردا یِ خم ِ $(E\circ\gamma)$ با قاعده یِ زنجیرِئی به دست میئاید. رابطه یِ بالا شبیه ِ حالت ِ خاص ِ (1196) (مشتق ِ هموردا یِ ترکیب ِ یک تابع به یک خمینه و یک تابع از آن خمینه به یک کلاف) است. مشتق ِ هموردا یِ ترکیب ِ یک خم در خمینه-یِ-پایه و یک برش، ضمنَن چیز ی شبیه ِ مشتق ِ سویی ست. البته درست است که با یک خم در خمینه-یِ-پایه و یک برش، میشود یک خم در کلاف ساخت و از آن مشتق ِ هموردا گرفت. اما برا یِ این که از یک خم در کلاف مشتق ِ هموردا گرفته شود، کافی ست تابع ی با مقدار در کلاف تعریف شده باشد، که دامنه اَش تصویر ِ یک خم در خمینه-یِ-پایه است.

43 انتقال ِ افقی

این که مشتق ِ هموردا یِ یک خم در یک کلاف صفر باشد، مستقل از بدیهیگر است. $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار ِ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، و $\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر $\mathbb{E}$ است. γ هم یک خم در $\mathbb{M}$ است. U را یک بدیهیگر میگیرم و $\boldsymbol{Q}$ را چنان تعریف میکنم که $\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,\boldsymbol{\cdot})$ در $\mathsf{F}\{\mathbb{E};\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\}$ است و

$$\boldsymbol{\pi}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]=\gamma, \tag{1560}$$

$$\mathbf{D}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]\}=-W_{\mathbf{D}\,\gamma}\circ\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]\}, \tag{1561}$$

$$\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_1,z)=z. \tag{1562}$$

رابطه یِ (1560) تضمین میکند (1561) مستقل از بدیهیگر است.

U_a را یک بدیهیگر میگیرم و $(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U_a^{-1}\circ\boldsymbol{Q})(t,t_1,z)$ را با $y_a(t)$ نشان میدهم. (1561) میشود

$$(\mathbf{D}\,y_a)(t)=-W_{a\,(\mathbf{D}\,\gamma)}[y_a(t)]. \tag{1563}$$

این (مُضعَن) یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ یک است، که (1562) شرط ِ اولیه یِ آن است. از قضیه یِ وجودی و یکتایی یِ جواب ِ معادلات ِ دیفرانسیل معلوم میشود $\boldsymbol{Q}$ با روابط ِ (1560) تا (1562) خُش-تعریف است. دیده میشود با اینها،

$$\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]=0, \tag{1564}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{D}[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]=-\boldsymbol{W}_{\mathbf{D}\,\gamma}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]. \tag{1565}$$

دیده میشود

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z)]\in\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\}. \tag{1566}$$

به این ترتیب،

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,\boldsymbol{.})] \in \mathsf{F}\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)];\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\}. \tag{1567}$$

نشان میدهم

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_3,t_2,\boldsymbol{.})]\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\boldsymbol{.})] = \boldsymbol{Q}_\gamma(t_3,t_1,\boldsymbol{.}). \tag{1568}$$

برا یِ اثبات،

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\}\Big),\\ &= -W_{\mathbf{D}\,\gamma}\circ\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\}\Big),\end{aligned} \tag{1569}$$

که نشان میدهد $\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\}\Big)$ و $\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1,z)]\}$ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی را بر میئاورند. همچنین دیده میشود

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})\{\boldsymbol{Q}_\gamma[t_2,t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\} = (\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)], \tag{1570}$$

که نشان میدهد مقدار ِ $\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\}\Big)$ و $\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1,z)]\}$ هم در t_2 یکسان است. پس

$$(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\} = (\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1,z)]. \tag{1571}$$

از این، همراه با

$$\boldsymbol{\pi}\circ\{\boldsymbol{Q}_\gamma[\boldsymbol{.},t_2,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z)]\} = \boldsymbol{\pi}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1,z)], \tag{1572}$$

نتیجه میشود دُ-طرف ِ (1568) برابر َند. از جمله دیده میشود

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_2,\boldsymbol{.})]\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\boldsymbol{.})] = \mathbf{1}_{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]}. \tag{1573}$$

رُشن است که رابطه یِ مشابه ی هم با عوض-کردن ِ جا یِ t_1 و t_2 به دست میئاید:

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\boldsymbol{.})]\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_2,\boldsymbol{.})] = \mathbf{1}_{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_2)]}. \tag{1574}$$

به این ترتیب،

$$[\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)]^{-1}=\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_2,\cdot). \tag{1575}$$

از جمله نتیجه میشود $\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)$ یک-به-یک است و بر $\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_2)]$ پوشا ست. $\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)$ تار ِ $\mathbb{E}_{\gamma(t_1)}$ را به طُر ِ یک-به-یک به کل ِ تار ِ $\mathbb{E}_{\gamma(t_2)}$ مینگارد، پس بین ِ این دُ-تار یک تناظر ِ یک-به-یک برقرار میکند.

به $\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)$ انتقال- ِ-افقی با γ از t_1 تا t_2 میگویم. به $\boldsymbol{Q}_\gamma(\cdot,t_1,z)$ هم بالا-برده یِ γ در t_1 با z میگویم. به سادِگی دیده میشود اگر γ ثابت باشد:

$$\mathbf{D}\,\gamma=0, \tag{1576}$$

آنگاه $\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)$ همانی ست:

$$\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,\cdot)=\mathbf{1}. \tag{1577}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار ِ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، و $\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر $\mathbb{E}$ است. γ هم یک خم در $\mathbb{M}$ است و $\mathfrak{r}$ را یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ است. رُشن است که

$$\boldsymbol{\pi}^{-1}\{(\mathfrak{r}_*\,\gamma)[\mathfrak{r}(t_1)]\}=\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]. \tag{1578}$$

پس،

$$\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1),\cdot]\}\in\Big(\mathsf{F}\{\mathbb{E};\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\}\Big). \tag{1579}$$

نشان میدهم

$$\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1),z]=\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z). \tag{1580}$$

برا یِ این کار U را یک بدیهیگر میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}&\Big[\mathbf{D}\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,\gamma}[\mathfrak{r}(\cdot),\mathfrak{r}(t_1),z]\}\Big)\Big](t),\\ &=-[(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)]\Big[W_{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r}_*\,\gamma)[\mathfrak{r}(t)]}\circ\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1),z]\}\Big)\Big],\\ &=-W_{(\mathbf{D}\,\gamma)(t)}\circ\Big(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1),z]\}\Big).\end{aligned} \tag{1581}$$

این نشان میدهد $\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(\boldsymbol{\cdot}),\mathfrak{r}(t_1),z]\}$ و $[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]$ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی را بر میئاورند. همچنین رُشن است که

$$\boldsymbol{\pi}\circ\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(\boldsymbol{\cdot}),\mathfrak{r}(t_1),z]\}=\gamma, \tag{1582}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_1),\mathfrak{r}(t_1),z]\}=z. \tag{1583}$$

به این ترتیب، با $\{\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(\boldsymbol{\cdot}),\mathfrak{r}(t_1),z]\}$ به جا یِ $[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]$ رابطِها یِ (1560) تا (1562) براورده میشود. این (1580) را نشان میدهد. (1580) را میشود به این شکلها نوشت.

$$\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1),\boldsymbol{\cdot}]=\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,\boldsymbol{\cdot}), \tag{1584}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\boldsymbol{\cdot},\mathfrak{r}(t_1),z]=\mathfrak{r}_*\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]. \tag{1585}$$

اولی یعنی انتقال- ِ-افقی مستقل از بازپارامترش است. دومی یعنی بالا-برده یِ بازپارامتریده یِ یک خم، با بازپارامتریده یِ بالا-برده یِ آن خم (با هم ان تابع- ِ-بازپارامترش) یکسان است.

اگر هموستار آفین باشد، $\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,\boldsymbol{\cdot})$ خطی میشود. برا یِ دیدن ِ این کافی ست توجه شود اگر α و α' دُ اسکالر، و z و z' در $\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]$ باشند،

$$(\alpha\,z+\alpha'\,z')\in\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\},$$

$$[\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z')]\in\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t)]\}. \tag{1586}$$

رابطه یِ اخیر نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\pi}[\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z')]=\gamma(t). \tag{1587}$$

همچنین متناظر با بدیهیگر ِ U،

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}\{(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})[\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z')]\},\\
&=\alpha\,\mathbf{D}\{(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]\}+\alpha'\,\mathbf{D}\{(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z')]\},\\
&=-\alpha\,W_{\mathbf{D}\,\gamma}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]\}\\
&\quad-\alpha'\,W_{\mathbf{D}\,\gamma}\{\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z')]\},\\
&=-W_{\mathbf{D}\,\gamma}\{(\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1\circ U^{-1})[\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z')]\},
\end{aligned} \tag{1588}$$

و البته رُشن است که

$$\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_1,z')=\alpha\,z+\alpha'\,z'. \tag{1589}$$

اینها نشان میدهند $[\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z')]$ روابط ِ (1560) تا (1562) را با متغیر ِ $(\alpha\,z+\alpha'\,z')$ به جا یِ z بر میئاورَد. پس

$$\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,\alpha\,z+\alpha'\,z')=\alpha\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z)+\alpha'\,\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z'). \tag{1590}$$

وقت ی هموستار آفین است، $\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t,t_1)$ را تابع ی در $\mathsf{LF}\{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t)];\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]\}$ تعریف میکنم، چنان که

$$[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t,t_1)]\,z=\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z). \tag{1591}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi}\circ[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]=\gamma, \tag{1592}$$

$$\mathbf{D}\Big(\{\check{U}^{-1}[\gamma(\boldsymbol{.})]\}[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]\Big)=-\check{W}_{\mathbf{D}\,\gamma}\{\check{U}^{-1}[\gamma(\boldsymbol{.})]\}[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)], \tag{1593}$$

$$\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_1,t_1)=\mathbf{1}_{\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_1)]}. \tag{1594}$$

دُ-رابطه یِ اول را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{D}[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]=-\check{\boldsymbol{W}}_{\mathbf{D}\,\gamma}[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]. \tag{1595}$$

رابطه یِ (1568) هم میشود

$$[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_3,t_2)][\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_2,t_1)]=\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_3,t_1). \tag{1596}$$

از جمله نتیجه میشود

$$[\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_2,t_1)]^{-1}=\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_1,t_2). \tag{1597}$$

این که $\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_2,t_1)$ وارونپذیر است، از جمله نتیجه میدهد اثر ِ $\check{\boldsymbol{Q}}_\gamma(t_2,t_1)$ بر یک پایه در $\mathbb{E}_{\gamma(t_1)}$ یک پایه در $\mathbb{E}_{\gamma(t_2)}$ است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathfrak{C}$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. انتقال- ِ-افقی-یافته یِ $\mathfrak{C}$ به اندازه یِ s را با $\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{C})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{C})](t) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t, t-s, \mathfrak{C}(t-s)]. \tag{1598}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\pi}\circ[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{C})] = \boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}. \tag{1599}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{M}(s_1+s_2,\mathfrak{C})](t) &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t, t-s_1-s_2, \mathfrak{C}(t-s_1-s_2)],\\
&= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{t, t-s_2, \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t-s_2, t-s_1-s_2, \mathfrak{C}(t-s_1-s_2)]\},\\
&= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{t, t-s_2, [\boldsymbol{M}(s_1,\mathfrak{C})](t-s_2)\},\\
&= \{\boldsymbol{M}[s_2, \boldsymbol{M}(s_1,\mathfrak{C})]\}(t),
\end{aligned} \tag{1600}$$

که یعنی

$$\boldsymbol{M}(s_1+s_2,\mathfrak{C}) = \boldsymbol{M}[s_2, \boldsymbol{M}(s_1,\mathfrak{C})], \tag{1601}$$

یا

$$\boldsymbol{M}(s_1+s_2,\cdot) = [\boldsymbol{M}(s_2,\cdot)]\circ[\boldsymbol{M}(s_1,\cdot)]. \tag{1602}$$

از جمله،

$$[\boldsymbol{M}(-s,\cdot)] = [\boldsymbol{M}(s,\cdot)]^{-1}. \tag{1603}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathfrak{C}$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. $\mathfrak{r}$ هم یک تابع- ِ-بازپارامترش

برا یِ $\mathfrak{C}$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})](t) &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})}[t,t-s,(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})(t-s)],\\ &= \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})}[t,t-s,(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})(t-s)],\\ &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{\mathfrak{r}^{-1}(t),\mathfrak{r}^{-1}(t-s),\mathfrak{C}[\mathfrak{r}^{-1}(t-s)]\}. \qquad (1604)\end{aligned}$$

پس $[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})]$ لزومَن بازپارامتریده یِ یک خم نیست. $[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})]$ بازپارامتریده یِ یک خم است، اگر یک تابع ِ $\mathfrak{h}$ باشد که

$$\mathfrak{r}^{-1}(t)-\mathfrak{r}^{-1}(t-s)=\mathfrak{h}^{-1}(s). \qquad (1605)$$

این رابطه (همراه با پیوستِگی یِ $\mathfrak{r}^{-1}$) نتیجه میدهد $\mathfrak{h}^{-1}$ خطی ست، در نتیجه $\mathfrak{r}^{-1}$ آفین (یک دُ-جملِئی یِ درجه یِ یک) است. از این نتیجه میشود خُد ِ $\mathfrak{r}$ آفین است. بر عکس، به سادِگی دیده میشود اگر $\mathfrak{r}$ آفین باشد، (1605) برقرار است. پس $[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})]$ بازپارامتریده یِ یک خم است، اگر $\mathfrak{r}$ آفین باشد. دیده میشود اگر $\mathfrak{r}$ آفین باشد:

$$\mathfrak{r}(t)=\mathfrak{c}+\mathfrak{m}\,t, \qquad (1606)$$

که $\mathfrak{c}$ و $\mathfrak{m}$ ثابت َند،

$$\mathfrak{r}^{-1}(t-s)=\mathfrak{r}^{-1}(t)-\frac{s}{\mathfrak{m}}, \qquad (1607)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})=\mathfrak{r}_*\left[\boldsymbol{M}\left(\frac{s}{\mathfrak{m}},\mathfrak{C}\right)\right]. \qquad (1608)$$

پس انتقال- ِ-افقی-یافته یِ بازپارامتریده یِ یک خم بازپارامتریده یِ انتقال- ِ-افقی-یافته یِ آن خم (البته به یک اندازه یِ دیگر) است، اگر تابع- ِ-بازپارامترش آفین باشد:

$$\boldsymbol{M}[\mathfrak{m}\,s,(\mathfrak{c}+\mathfrak{m}\,\boldsymbol{\cdot})_*\,\mathfrak{C}]=(\mathfrak{c}+\mathfrak{m}\,\boldsymbol{\cdot})_*[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{C})]. \qquad (1609)$$

اما اگر اثر ِ انتقالها یِ افقی به همه یِ اندازِها بر یک خم همانی باشد، اثر ِ انتقالها یِ افقی به همه یِ اندازِها بر بازپارامتریده یِ آن خم هم همانی ست. برا یِ اثبات، کافی ست توجه شود که اگر اثر ِ

انتقالها یِ افقی به همه یِ اندازِها بر $\mathfrak{C}$ همانی باشد، آنگاه به ازا یِ t و t_1 دلبخاه (البته به این شرط که t و t_1 در دامنه یِ $\mathfrak{C}$ باشند)،

$$\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t, t_1, \mathfrak{C}(t_1)] = \mathfrak{C}(t). \tag{1610}$$

از این نتیجه میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{M}(s, \mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})](t) &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{\mathfrak{r}^{-1}(t), \mathfrak{r}^{-1}(t-s), \mathfrak{C}[\mathfrak{r}^{-1}(t-s)]\},\\ &= \mathfrak{C}[\mathfrak{r}^{-1}(t)],\end{aligned} \tag{1611}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{M}(s, \mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C}) = \mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C}. \tag{1612}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathfrak{C}$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. قائم-افکنده یِ $\mathfrak{C}$ در t_1 را با $\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$[\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})](t) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t_1, t, \mathfrak{C}(t)]. \tag{1613}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})](t_1) &= \mathfrak{C}(t_1),\\ \boldsymbol{\pi}\{[\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})](t)\} &= (\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})(t_1).\end{aligned} \tag{1614}$$

به این ترتیب $\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})$ خم ی ست که مقدار َش در t_1 هم ان مقدار ِ $\mathfrak{C}$ در t_1 است، و تصویر َش در فقط یک تار است:

$$\mathsf{img}[\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})] \in \mathbb{E}_{(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})(t_1)}. \tag{1615}$$

از تعریف ِ $\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})$ دیده میشود

$$\mathfrak{C}(t) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{t, t_1, [\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})](t)\}. \tag{1616}$$

از اینجا،

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t) = -\boldsymbol{W}_{\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})}[\mathfrak{C}(t)] + \{\mathbf{D}[\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}(t,t_1,\boldsymbol{\cdot})]\}\{\mathbf{D}[\boldsymbol{N}(t_1,\mathfrak{C})]\}(t), \quad (1617)$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\{\mathbf{D}[\boldsymbol{N}(t_1,\mathfrak{C})]\}(t_1) &= (\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t_1) + \boldsymbol{W}_{\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})}[\mathfrak{C}(t_1)],\\ &= \boldsymbol{\nu}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{C})(t_1)],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C})(t_1). \end{aligned} \quad (1618)$$

مشتق ِ قائم-افکنده ی ِ یک خم در یک نقطه، قائم-افکنده ی ِ مشتق ِ آن خم در آن نقطه است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$، و $\mathfrak{C}$ یک خم در $\mathbb{E}$ است. $\mathfrak{r}$ هم یک تابع- ِ-بازپارامترش برا ی ِ $\mathfrak{C}$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{N}(t_1,\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})](t) &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})}[t_1,t,(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})(t)],\\ &= \boldsymbol{Q}_{\mathfrak{r}_*\,(\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C})}[t_1,t,(\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C})(t)],\\ &= \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}\{\mathfrak{r}^{-1}(t_1),\mathfrak{r}^{-1}(t),\mathfrak{C}[\mathfrak{r}^{-1}(t)]\}, \end{aligned} \quad (1619)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{N}[\mathfrak{r}(t_1),\mathfrak{r}_*\,\mathfrak{C}] = \mathfrak{r}_*[\boldsymbol{N}(t_1,\mathfrak{C})]. \quad (1620)$$

از تعریف ِ انتقال- ِ-افقی-یافته و قائم-افکنده ی ِ یک خم دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{M}(s,\mathfrak{C})](t) &= [\boldsymbol{N}(t,\mathfrak{C})](t-s),\\ [\boldsymbol{N}(t_1,\mathfrak{C})](t) &= [\boldsymbol{M}(t_1-t,\mathfrak{C})](t_1). \end{aligned} \quad (1621)$$

از تعریف ِ بالا-برده ی ِ یک خم دیده میشود مشتق ِ همموردا ی ِ بالا-برده ی ِ یک خم صفر است. بر عکس، گیرم مشتق ِ همموردا ی ِ خم ِ $\mathfrak{C}$ صفر است. دیده میشود $\mathfrak{C}(t)$ و $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t,t_1,\mathfrak{C}(t_1)]$ معادله-ی ِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی نسبت به t را بر میئاورَند، و مقدار ِشان هم در $t=t_1$ یکسان است. پس این-دُ با هم برابر َند. یعنی گزاره ی ِ

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{C} = 0 \quad (1622)$$

همئرز است با

$$\mathfrak{C}(t) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{\pi}\circ\mathfrak{C}}[t, t_1, \mathfrak{C}(t_1)]. \tag{1623}$$

رابطه یِ اخیر هم همئرز است با

$$\boldsymbol{M}(s, \mathfrak{C}) = \mathfrak{C}, \tag{1624}$$

یا

$$[\boldsymbol{N}(t_1, \mathfrak{C})](t) = \mathfrak{C}(t_1). \tag{1625}$$

به این ترتیب این گزارِها همئرز َند:

- مشتق ِ هموردا یِ $\mathfrak{C}$ صفر است.
- $\mathfrak{C}$ بالا-برده یِ یک خم است.
- انتقالِافقی-یافته یِ $\mathfrak{C}$ با $\mathfrak{C}$ برابر است.
- قائم-افکنده یِ $\mathfrak{C}$ ثابت است.

44 بالا-برده یِ یک میدان ِ برداری

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. با استفاده از هموستار ِ $\boldsymbol{W}$، متناظر با هر z در $\mathbb{E}$ میشود از بردار ِ u که در $\mathrm{T}_{\boldsymbol{\pi}(z)}\mathbb{M}$ است، یک بردار در $\mathrm{T}_z\mathbb{E}$ ساخت، که قائم-افکنده اَش صفر است، و اثر ِ $[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)]$ بر آن هم ان u میشود. البته این بردار هم ان $[-\boldsymbol{W}_u(z)]$ است. به این ترتیب، از میدان ِ برداری یِ u بر $\mathrm{T}\mathbb{M}$ هم میشود یک میدان ِ برداری بر $\mathrm{T}\mathbb{E}$ ساخت که هم ین ویژِگیها را دارد. به این میدان بالا-برده یِ u میگویم و آن را با $(\boldsymbol{\Upsilon}\,u)$ نمایش میدهم:

$$(\boldsymbol{\Upsilon}\,u)(z) = -\boldsymbol{W}_{(u\circ\boldsymbol{\pi})(z)}(z). \tag{1626}$$

دیده میشود $(\boldsymbol{\Upsilon}\,u)$ نسبت به u خطی ست. همچنین دیده میشود میدان ِ برداری یی با ویژِگیها یِ بالا یکتا ست.

بر عکس، گیرم میدان ِ برداری یِ ξ بر $\mathrm{T}\mathbb{E}$ چنان است که $[(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)][\xi(z)]$ تابع ِ فقط $[\boldsymbol{\pi}(z)]$ است، و $(\boldsymbol{\nu}\,\xi)$ صفر است. متناظر با هر x در $\mathbb{M}$ یک z در $\boldsymbol{\pi}^{-1}(x)$ میگیرم و تعریف میکنم

$$u(x) = [(\mathbf{D}\,\boldsymbol{\pi})(z)][\xi(z)]. \tag{1627}$$

z یکتا نیست، اما طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا تابع ِ فقط $\boldsymbol{\pi}(z)$ یعنی x است. پس میدان ِ برداری یِ u به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. به این ترتیب، از دُ-رابطه یِ پیش نتیجه میشود

$$\xi = \boldsymbol{\Upsilon}\,u. \tag{1628}$$

u یک میدان ِ برداری بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ است، x در $\mathbb{M}$ است، و خم ِ γ چنین است.

$$\gamma(t) = \{\mathsf{fl}[(t-t_1)u]\}(x) \tag{1629}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، و z در $\boldsymbol{\pi}^{-1}(x)$ است. متناظر با هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ بر $\mathbb{E}$،

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)] &= -\boldsymbol{W}_{u\circ\gamma}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)],\\ &= -\boldsymbol{W}_{(u\circ\boldsymbol{\pi})[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)]}\circ[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)],\\ &= (\boldsymbol{\Upsilon}\,u)[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1,z)].\end{aligned} \tag{1630}$$

از این، همراه با

$$\boldsymbol{Q}_\gamma(t_1,t_1,z) = z, \tag{1562}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{Q}_\gamma(t,t_1,z) = \{\mathsf{fl}[(t-t_1)(\boldsymbol{\Upsilon}\,u)]\}(z). \tag{1631}$$

45 هُلُنُمی

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. γ یک خانواده یِ یک-پارامتری یِ هموار ِ خمها در $\mathbb{M}$ است، که ابتدا یِشان (متناظر با پارامتر ِ t_1) ثابت است:

$$\gamma(t_1, s) = x_1. \tag{1632}$$

متناظر با هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ تعریف میکنم

$$[x(t,s), y(t,s)] = [U^{-1} \circ \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}](t, t_1, z), \tag{1633}$$

$$Q_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,a}(t, t', y') = [\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}]\{t, t', U_a[x(t',s), y']\}, \tag{1634}$$

که U و U_a بدیهیگر َند. همچنین، ζ_i ها را چنین تعریف میکنم.

$$\zeta_1^\alpha(t,s) = [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, y^\alpha](t,s), \tag{1635}$$

$$\zeta_2^\alpha(t,s) = \{W_i^\alpha[x(t,s), y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^i](t,s)\}, \tag{1636}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{3\,a}^\alpha(t,s) = \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, &\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,a}][t, t', y_a(t',s)]\}\{F_{a\,i\,j}[x(t',s), y_a(t',s)]\} \\ &\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^i](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^j](t',s)\},\end{aligned} \tag{1637}$$

که F_a خمش ِ متناظر با W (با بدیهیگر ِ U_a) است، و

$$y_a(t',s) := [\overset{0}{\boldsymbol{\Pi}}_1 \circ U_a^{-1} \circ \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}](t', t_1, z). \tag{1638}$$

U_b را یک بدیهیگر ِ دیگر میگیرم. $U_{a\,b}$ تابع-ِ-گذار ِ متناظر با U_a و U_b است. دیده میشود

$$Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,b}[t, t', y_b(t',s)] = Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,a}[t, t', y_a(t',s)], \tag{1639}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,b}][t, t', y_b(t',s)]\} = \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)\,a}][t, t', y_a(t',s)]\} \\ \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, U_{a\,b}][x(t',s), y_a(t',s)]\}.\end{aligned} \tag{1640}$$

از ترکیب ِ این با

$$F_a(x,y_a)=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,U_{a\,b}](x,y_b)\}F_b(x,y_b), \tag{1452}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^{\alpha}_{\gamma(\bullet,s)\,b}][t,t',y_b(t',s)]\}\{F_{b\,i\,j}[x(t',s),y_b(t',s)]\},\\ &=\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^{\alpha}_{\gamma(\bullet,s)\,a}][t,t',y_a(t',s)]\}\{F_{a\,i\,j}[x(t',s),y_a(t',s)]\}.\end{aligned} \tag{1641}$$

پس میشود شاخص ِ بدیهیگر در ζ_3 را برداشت:

$$\begin{aligned}\zeta^{\alpha}_3(t,s)=\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,&\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^{\alpha}_{\gamma(\bullet,s)}][t,t',y(t',s)]\}\{F_{i\,j}[x(t',s),y(t',s)]\}\\ &\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t',s)\},\end{aligned} \tag{1642}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\zeta^{\alpha}_1](t,s)&=[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,y^{\alpha}](t,s),\\ &=-\{W^{\alpha}{}_i[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^i](t,s)\}\\ &\quad-\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\,W^{\alpha}{}_i][x(t,s),y(t,s)]\}\\ &\quad\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^j](t,s)\}\\ &\quad-\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\alpha}{}_i][x(t,s),y(t,s)]\}\\ &\quad\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y^{\beta}](t,s)\},\end{aligned} \tag{1643}$$

و

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\zeta^{\alpha}_2](t,s)=&\Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\,W^{\alpha}{}_i][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,s)\}\\ &+\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^{\alpha}{}_i][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,y^{\beta}](t,s)\}\Big)\\ &\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\}\\ &+\{W^{\alpha}{}_i[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big(\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)\,j}\, W^{\alpha}{}_{i}][x(t,s),y(t,s)]\} \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}{}_{i}][x(t,s),y(t,s)]\}\{W^{\beta}{}_{j}(t,s)\}\Big) \\
&\quad \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^{i}](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{j}](t,s)\} \\
&\quad + \{W^{\alpha}{}_{i}[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^{i}](t,s)\},
\end{aligned} \tag{1644}
$$

که در آنها

$$
(\mathbf{D}\, y_a)(t) = -W_{a\,(\mathbf{D}\,\gamma)}[y_a(t)] \tag{1563}
$$

به کار رفته است. به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
&[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}(\zeta_1^{\alpha}+\zeta_2^{\alpha})](t,s) \\
&= \{F^{\alpha}{}_{i\,j}[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{i}](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^{j}](t,s)\} \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}{}_{i}][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{i}](t,s)\} \\
&\quad \Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, y^{\beta}](t,s) + \{W^{\beta}_{j}[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^{j}](t,s)\}\Big), \\
&= \{F^{\alpha}{}_{i\,j}[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{i}](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^{j}](t,s)\} \\
&\quad - \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}{}_{i}][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{i}](t,s)\}[(\zeta_1^{\beta}+\zeta_2^{\beta})(t,s)].
\end{aligned} \tag{1645}
$$

سرانجام،

$$
\begin{aligned}
&\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^{\alpha}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t,t',y(t',s)]\} \\
&= \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, Q^{\alpha}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t,t',y(t',s)]\}, \\
&= -\Big[\mathbf{D}\Big(\{W^{\alpha}{}_{k}[x(t,s),Q_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t',\boldsymbol{\cdot})]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{k}](t,s)\}\Big)\Big][y(t',s)], \\
&= -\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\, W^{\alpha}{}_{k}][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^{k}](t,s)\} \\
&\quad \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^{\beta}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t,t',y(t',s)]\},
\end{aligned} \tag{1646}
$$

که نتیجه میدهد

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\zeta_3^\alpha](t,s) = -\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^\alpha{}_k][x(t,s),y(t,s)]\}[(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^k)(t,s)][\zeta_3^\beta(t,s)]$$
$$+\{F^\alpha{}_{i\,j}[x(t,s),y(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,s)\}. \tag{1647}$$

به این ترتیب، با تعریف ِ ζ با

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \tag{1648}$$

دیده میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\zeta^\alpha](t,s) = -\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)\,\beta}\,W^\alpha{}_k][x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^k](t,s)\}$$
$$[\zeta^\beta(t,s)]. \tag{1649}$$

از تعریف ِ ζ دیده میشود

$$\zeta(t_1,s) = 0, \tag{1650}$$

که همراه با (1649) نتیجه میدهد

$$\zeta(t,s) = 0, \tag{1651}$$

یعنی

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y^\alpha](t,s) + \{W^\alpha{}_i[x(t,s),y(t,s)]\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\}$$
$$= -\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t,t',y(t',s)]\}\{F_{i\,j}[x(t',s),y(t',s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t',s)\}. \tag{1652}$$

با تعریف ِ $\mathfrak{C}$ با

$$\mathfrak{C}(t,s) = \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t_1,z), \tag{1653}$$

دیده میشود (1652) یعنی

$$\{\nabla[\mathfrak{C}(t,\boldsymbol{\cdot})]\}^\alpha(s) = -\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t,t',y(t',s)]\}\{F_{i\,j}[x(t',s),y(t',s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t',s)\}. \tag{1654}$$

از (1653) نتیجه میشود

$$[(\mathfrak{r}\times\mathbf{1})_*\,\mathfrak{C}](t,s)=\boldsymbol{Q}_{[(\mathfrak{r}\times\mathbf{1})_*\,\gamma](\boldsymbol{.},s)}[t,\mathfrak{r}(t_1),z],\tag{1655}$$

$$[(\mathbf{1}\times\mathfrak{r})_*\,\mathfrak{C}](t,s)=\boldsymbol{Q}_{[(\mathbf{1}\times\mathfrak{r})_*\,\gamma](\boldsymbol{.},s)}(t,t_1,z).\tag{1656}$$

اینها یعنی بازپارامتریدِها یِ $\mathfrak{C}$ از بازپارامتریدِها یِ γ با هم ان تابع- ِ-بازپارامترشها به دست میئایند. به این ترتیب، خم ِ مستقل-از-پارامتر ِ $\mathsf{pc}(\mathfrak{C})$ به فقط خم ِ مستقل-از-پارامتر ِ $\mathsf{pc}(\gamma)$ بستِگی دارد. دیده میشود (1654) هم با بازپارامترش (نسبت به هر یک از متغیرها یِ $\mathfrak{C}$) تغییر نمیکند.

از تعریف ِ $\mathfrak{C}$ دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{C}(\boldsymbol{.},s)]=0,\tag{1657}$$

یا

$$\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\mathfrak{C}=0.\tag{1658}$$

اما لزومَن چنین نیست که

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{C}(t,\boldsymbol{.})]=0,\tag{1659}$$

یا

$$\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\mathfrak{C}=0.\tag{1660}$$

اگر خمش صفر باشد، آنگاه (1660) هم برقرار است.

اگر انتها یِ خانواده یِ خمها یِ γ (متناظر با پارامتر ِ t_2) هم ثابت باشد،

$$\gamma(t_2,s)=x_2,\tag{1661}$$

آنگاه

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y^\alpha](t_2,s)=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\,Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}][t_2,t,y(t,s)]\}\{F_{i\,j}[x(t,s),y(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,s)\}.\tag{1662}$$

این نشان میدهد اگر خمش صفر باشد، با تغییر-دادن ِ هموار ِ یک خم با ابتدا و انتها یِ ثابت، انتقال ِ افقی از ابتدا یِ خم به انتها یِ خم تغییر نمیکند. پس اگر خمش صفر باشد، و خمینه-یِ-پایه چنان باشد که هر دُ-خم ِ با ابتدا و انتها یِ یکسان را بشود به شکل ی هموار به هم تبدیل کرد، آنگاه انتقال ِ افقی به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی دارد. اگر خمینه-یِ-پایه ساده-همبند باشد، آنگاه متناظر با هر دُ-نقطه در خمینه-یِ-پایه یک خم هست که ابتدا و انتها یَش آن دُ-نقطه اند، و هر دُخم از این گونه را میشود به شکل ی هموار به هم تبدیل کرد. پس اگر خمش صفر و خمینه-یِ-پایه ساده-همبند باشد، انتقال ِ افقی از یک نقطه به یک نقطه یِ دیگر (مستقل از خم) معنی دارد.

اگر هموستار آفین باشد، خمش و انتقال- ِ-افقی خطی یَند. متناظر با هموستار ِ آفین ِ $\check{\boldsymbol{W}}$ تعریف میکنم

$$
\begin{aligned}
x(t,s) &= \boldsymbol{\pi}\{[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t_1)]\,z\},\\
y(t,s) &= \{\check{U}^{-1}[x(t,s)]\}[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t_1)]\,z,\\
\check{Q}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t') &= \{\check{U}^{-1}[x(t,s)]\}[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t')]\{\check{U}[x(t',s)]\}.
\end{aligned}
\tag{1663}
$$

برا یِ سادِگی شاخص ِ بدیهیگر حذف شده. مانسته یِ (1652) میشود

$$
\begin{aligned}
&[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y^{\alpha}](t,s) + \{\check{W}^{\alpha}{}_{i}[x(t,s)]\}[y(t,s)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t,s)\}\\
&= -\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,[\check{Q}^{\alpha}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t')]\{\check{F}_{i\,j}[x(t',s)]\}[y(t',s)]\\
&\quad\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t',s)\},\\
&= -\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t'\,[\check{Q}^{\alpha}_{\gamma(\bullet,s)}(t,t')]\{\check{F}_{i\,j}[x(t',s)]\}\\
&\quad\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t',s)\}[\check{Q}_{\gamma(\bullet,s)}(t',t_1)]y_1,
\end{aligned}
\tag{1664}
$$

که تعریف شده

$$
y_1 = [\check{U}^{-1}(x_1)]z. \tag{1665}
$$

با تعریف ِ $\mathfrak{C}$ به شکل ِ (1653) دیده میشود

$$\{\nabla[\mathfrak{C}(t,\boldsymbol{\cdot})]\}^{\alpha}(s) = -\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\,[\check{Q}^{\alpha}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t')]\{\check{F}_{i\,j}[x(t',s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t',s)\}[\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t',t_1)]y_1, \qquad (1666)$$

یا،

$$\{\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{C}(t,\boldsymbol{\cdot})]\}(s) = -\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\,[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t')]\{\check{f}_{i\,j}[x(t',s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t',s)\}[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t',t_1)]z, \qquad (1667)$$

که با تعریف ِ

$$\check{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}(t,s) = \check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t_1), \qquad (1668)$$

میشود

$$[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\check{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}](t,s) = -\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\,[\check{\boldsymbol{Q}}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t')]\{\check{f}_{i\,j}[x(t',s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t',s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t',s)\}[\check{\boldsymbol{\mathfrak{C}}}(t',s)]. \qquad (1669)$$

اگر انتها ی ِ خانواده ی ِ خمها ی ِ γ (متناظر با پارامتر ِ t_2) هم ثابت باشد، مانسته ی ِ (1662) میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y^{\alpha}](t_2,s) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,[\check{Q}^{\alpha}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t_2,t)]\{\check{F}_{i\,j}[x(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t,s)\}[\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t_1)]y_1, \qquad (1670)$$

یا،

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,y](t_2,s) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,[\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t_2,t)]\{\check{F}_{i\,j}[x(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^{i}](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^{j}](t,s)\}[\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}(t,t_1)]y_1, \qquad (1671)$$

که با تعریف ِ

$$\check{\mathfrak{C}}(t,s)=\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}(t,t_1), \tag{1672}$$

میشود

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\check{\mathfrak{C}}](t,s)=-\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\ [\check{Q}_{\gamma(\boldsymbol{.},s)}(t_2,t)]\{\check{F}_{i\,j}[x(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,s)\}[\check{\mathfrak{C}}(t,s)]. \tag{1673}$$

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، چنان که انتقال ِ افقی در $\mathbb{E}$ به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی دارد و $\mathbb{M}$ خمی-همبند است. Q را تابع ی در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathbb{M}\times\mathbb{E})$ تعریف میکنم که

$$Q(x,z)\in\mathbb{E}_x, \tag{1674}$$

و اگر خم ِ γ چنان است که

$$\gamma(t_1)=\boldsymbol{\pi}(z),$$
$$\gamma(t_2)=x, \tag{1675}$$

آنگاه

$$Q(x,z)=\boldsymbol{Q}_\gamma(t_2,t_1,z). \tag{1676}$$

چون طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا به فقط ابتدا و انتها یِ γ بستِگی دارد، Q به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. به Q نگاشت ِ افقی میگویم. $Q(\boldsymbol{.},z)$ یک برش در $\mathbb{E}$ است. با استفاده از

$$\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{Q}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1,z)]=0, \tag{1564}$$

دیده میشود مشتق ِ هموردا یِ این برش صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}[Q(\boldsymbol{.},z)]=0. \tag{1677}$$

به سادِگی دیده میشود

$$\mathsf{Q}[x_2, \mathsf{Q}(x_1, z)] = \mathsf{Q}(x_2, z), \tag{1678}$$

$$\mathsf{Q}[\boldsymbol{\pi}(z), z] = z. \tag{1679}$$

از جمله،

$$\mathsf{Q}[\boldsymbol{\pi}(z), \mathsf{Q}(x, z)] = z. \tag{1680}$$

با Q یک رابطه بر $\mathbb{E}$ تعریف میشود: z_1 با z_2 رابطه دارد:

$$z_1 \overset{\mathsf{Q}}{=} z_2, \tag{1681}$$

اگر

$$z_2 = \mathsf{Q}[\boldsymbol{\pi}(z_2), z_1]. \tag{1682}$$

به سادِگی دیده میشود (1681) همئرز است با

$$\mathsf{Q}(\boldsymbol{.}, z_1) = \mathsf{Q}(\boldsymbol{.}, z_2). \tag{1683}$$

دیده میشود $\overset{\mathsf{Q}}{=}$ یک رابطه یِ همئرزی ست. رده یِ همئرزی یِ متناظر با این رابطه شامل ِ z را با $\mathbb{M}_z^{\mathsf{Q}}$ نشان میدهم. رُشن است که

$$\mathbb{M}_z^{\mathsf{Q}} = \{\mathsf{Q}(x, z) \mid x \in \mathbb{M}\}. \tag{1684}$$

به این ترتیب،

$$[\mathsf{Q}(\boldsymbol{.}, z)] \in \mathsf{F}(\mathbb{M}_z^{\mathsf{Q}}; \mathbb{M}). \tag{1685}$$

به سادِگی دیده میشود $Q(\bullet, z)$ یک-به-یک است و در $\mathbb{M}_z^Q$ پوشا ست. پس $Q(\bullet, z)$ یک تناظر ِ یک-به-یک بین ِ $\mathbb{M}$ و $\mathbb{M}_z^Q$ است. به این ترتیب، با نگاشت ِ افقی کلاف به شکل ِ اجتماع ِ مجموعِها یی در میئاید که هیچ دُ-تا بِشان با هم اشتراک ندارند و هر یک با خمینه-یِ-پایه همانریخت است. با نگاشت ِ افقی میشود یک بدیهیگر ِ سراسری هم ساخت. از اینجا شروع میکنم که اگر z_1 و z_2 در $\mathbb{M}_z^Q$ باشند، آنگاه

$$Q(x, z_1) = Q(x, z_2). \tag{1686}$$

تابع ِ U در $\mathsf{F}\{\mathbb{E}; [\mathbb{M} \times (\mathbb{E}/\overset{Q}{=})]\}$ را چنین تعریف میکنم.

$$U(x, \mathbb{M}_z^Q) = Q(x, z). \tag{1687}$$

(1686) تضمین میکند به جا یِ z هر عضو ِ دیگر ِ $\mathbb{M}_z^Q$ که گذاشته شود هم طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا عوض نمیشود. پس U به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. به سادِگی دیده میشود U یک-به-یک است. همچنین دیده میشود

$$U[\boldsymbol{\pi}(z), \mathbb{M}_z^Q] = z, \tag{1688}$$

که نشان میدهد U در $\mathbb{E}$ پوشا ست. پس U یک تناظر ِ یک-به-یک (در واقع یک همانریختی) بین ِ $[\mathbb{M} \times (\mathbb{E}/\overset{Q}{=})]$ و $\mathbb{E}$ است. به این ترتیب U یک بدیهیگر ِ سراسری برا یِ $\mathbb{E}$ است. تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}$ را میشود $(\mathbb{E}/\overset{Q}{=})$ گرفت.

دیده میشود

$$[U(x_0, \bullet)] \in \mathsf{F}[\mathbb{E}_{x_0}; (\mathbb{E}/\overset{Q}{=})], \tag{1689}$$

و این که $[U(x_0, \bullet)]$ یک همانریختی بین ِ $(\mathbb{E}/\overset{Q}{=})$ و $\mathbb{E}_{x_0}$ است. به این ترتیب، تار- ِ-نُعی یِ $\mathbb{E}$ را میشود $\mathbb{E}_{x_0}$ هم گرفت. از اینجا یک بدیهیگر- ِ-سراسری یِ دیگر به دست میئاید، که آن را با U_{x_0} نشان میدهم:

$$U_{x_0} \in \mathsf{F}[\mathbb{E}; (\mathbb{M} \times \mathbb{E}_{x_0})]. \tag{1690}$$

$$U_{x_0}(x, y) = Q(x, y). \tag{1691}$$

دیده میشود

$$[U(x,\cdot)] = [U_{x_0}(x,\cdot)] \circ [U(x_0,\cdot)]. \tag{1692}$$

نتیجه این که اگر در یک کلاف انتقال ِ افقی به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی داشته باشد، و خمینه-یِ-پایه خمی-همبند باشد، آنگاه آن کلاف بدیهی ست. از جمله اگر در یک کلاف خمش صفر و خمینه-یِ-پایه ساده-همبند باشد، آنگاه آن کلاف بدیهی ست.

اگر در یک کلاف انتقال ِ افقی به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی داشته باشد، و خمینه-یِ-پایه خمی-همبند باشد، و هموستار هم آفین باشد، آنگاه $\mathsf{res}[Q(x,\cdot);\mathbb{E}_{x_0}]$ خطی ست. دیده میشود ترکیب ِ خطی در $(\mathbb{E}/\overset{Q}{=})$ با

$$\alpha_1\,\mathbb{M}^Q_{z_1} + \alpha_2\,\mathbb{M}^Q_{z_2} := \mathbb{M}^Q_{\alpha_1\,Q(x,z_1)+\alpha_2\,Q(x,z_2)} \tag{1693}$$

خُش-تعریف است. با این تعریف، $(\mathbb{E}/\overset{Q}{=})$ یک فضا یِ خطی میشود. همچنین، به سادِگی دیده میشود $U(x,\cdot)$ $U_{x_0}(x,\cdot)$ خطی یَند. پس با تعریفها یِ

$$\begin{aligned}\check{U}(x) &= U(x,\cdot),\\ \check{U}_{x_0}(x) &= U_{x_0}(x,\cdot),\end{aligned} \tag{1694}$$

نتیجه میشود

$$\check{U}(x) = [\check{U}_{x_0}(x)][\check{U}(x_0)]. \tag{1695}$$

λ را یک خم ِ بسته میگیرم، که ابتدا یَش متناظر با پارامتر ِ t_1 و انتها یَش متناظر با پارامتر ِ t_2 است:

$$\lambda(t_1) = x_1. \tag{1696}$$

$$\lambda(t_2) = x_1. \tag{1697}$$

به انتقال ِ افقی با λ از t_1 تا t_2 هُلُنُمی با λ میگویم، و آن را با H_λ نشان میدهم:

$$H_\lambda(z) = \boldsymbol{Q}_\lambda(t_2,t_1,z). \tag{1698}$$

دیده میشود

$$H_\lambda \in \mathsf{F}[\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]. \tag{1699}$$

همچنین، دیده میشود اگر انتقال ِ افقی به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی داشته باشد، و خمینه-یِ-پایه خمی- همبند باشد،

$$H_\lambda = \mathbf{1}. \tag{1700}$$

از جمله اگر خمش صفر و خمینه-یِ-پایه ساده- همبند باشد هم رابطه یِ بالا برقرار است.

از این که انتقال ِ افقی مستقل از بازپارامترش است، معلوم میشود هُلُنُمی مستقل از بازپارامترش است. اما در حالت ِ کلی هُلُنُمی به این بستِگی دارد که نقطه یِ شروع (و پایان) ِ خم ِ بسته کدام است. متناظر با t_1' در $[t_1,t_2]$، خم ِ بسته یِ λ' را چنین تعریف میکنم.

$$\lambda'(t) = \begin{cases} \lambda(t), & t \in [t_1', t_2] \\ \lambda(t - t_2 + t_1), & t \in [t_2, t_1' + t_2 - t_1] \end{cases}. \tag{1701}$$

دیده میشود λ' هم یک خم ِ بسته است، در واقع λ' هم ان λ است، که فقط در x_1' متناظر با پارامتر ِ t_1' شروع میشود و به هم ان جا (متناظر با پارامتر ِ t_2') ختم میشود، چنان که

$$x_1' = \lambda(t_1'). \tag{1702}$$

$$t_2' = t_1' + t_2 - t_1. \tag{1703}$$

ختم میشود. دیده میشود

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\lambda'}(t_2', t_1', \centerdot) &= [\boldsymbol{Q}_{\lambda'}(t_2', t_2, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda'}(t_2, t_1', \centerdot)], \\ &= [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_2, t_1', \centerdot)], \\ &= [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_2, t_1', \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)]^{-1}, \\ &= [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_2, t_1, \centerdot)] \circ [\boldsymbol{Q}_{\lambda}(t_1', t_1, \centerdot)]^{-1}, \end{aligned} \tag{1704}$$

که نتیجه میدهد

$$H_{\lambda'} = [\boldsymbol{Q}_\lambda(t_1', t_1, \cdot)] \circ H_\lambda \circ [\boldsymbol{Q}_\lambda(t_1', t_1, \cdot)]^{-1}. \tag{1705}$$

هُلُنُمی برا یِ خمها یِ بسته ای که فقط ابتدا یِشان با هم متفاوت است، به ابتدا بستِگی دارد، اما این بستِگی به شکل ِ یک تبدیل ِ تشابهی ست.

این که هُلُنُمی برا یِ یک خم ِ بسته همانی باشد، یعنی بالا-برده یِ آن خم ِ بسته یک خم ِ بسته است. این که هُلُنُمی برا یِ آن خم همانی باشد، مستقل از پارامترش ِ خم یا نقطه یِ شروع (و پایان) ِ خم است. به این ترتیب،

- یک کلاف تخت است اگر و تنها اگر بالا-برده یِ هر خم ِ بسته یِ خمینه-یِ-پایه یِ آن کلاف یک خم ِ بسته باشد.

دیده میشود اگر هموستار آفین باشد، هُلُنُمی خطی ست. در واقع،

$$H_\lambda = \check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_2, t_1). \tag{1706}$$

همچنین،

$$\check{\boldsymbol{Q}}_{\lambda'}(t_2', t_1') = [\check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_1', t_1)][\check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_2, t_1)][\check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_1', t_1)]^{-1}, \tag{1707}$$

که نتیجه میدهد

$$H_{\lambda'} = [\check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_1', t_1)] H_\lambda \, [\check{\boldsymbol{Q}}_\lambda(t_1', t_1)]^{-1}. \tag{1708}$$

46 تختیت، بدیهیت

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار و $\boldsymbol{W}$ یک هموستار بر آن است. میگویم $\mathbb{E}$ تخت است، اگر انتقال ِ افقی به فقط ابتدا و انتها یِ خم بستِگی داشته باشد، یا همئرز با آن، اگر هُلُنُمی همانی (بدیهی) باشد. میگویم

$\mathbb{E}$ مُضعَن-تخت است، اگر خمش صفر باشد. دیده میشود مُضعَن-تخت-بودن به معنی یِ آن است که زیرکلاف ی که افکنده اَش ساده-همبند باشد تخت است. میگویم $\mathbb{E}$ در z تخت است، اگر خمش در z صفر باشد.

نشان میدهم کلاف یِ که تخت باشد، مُضعَن-تخت هم هست. برا یِ اثبات، کلاف ِ هموار ِ تخت ِ $\mathbb{E}$ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ را میگیرم. λ را یک خانواده یِ یک-پارامتری یِ هموار ِ خمها یِ بسته در $\mathbb{M}$ میگیرم، که ابتدا و انتها یِشان (متناظر با پارامترها یِ به ترتیب t_1 و t_2) ثابت است، و خم ِ بسته یِ متناظر با پارامتر- ِ-خانواده یِ صفر ثابت است:

$$\lambda(t_1, s) = x_1, \tag{1709}$$

$$\lambda(t_2, s) = x_1, \tag{1710}$$

$$\lambda(t, 0) = x_1. \tag{1711}$$

از تختیت ِ کلاف، همراه با

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, y^\alpha](t_2, s) = -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(2)}\, Q^\alpha_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}][t_2, t, y(t,s)]\}\{F_{i\,j}[x(t,s), y(t,s)]\}$$
$$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\, x^i](t,s)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, x^j](t,s)\}, \tag{1662}$$

نتیجه میشود

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \{[\mathbf{D}_{(3)} Q^\alpha_{\lambda(\boldsymbol{\cdot},s)}][t_2, t, y(t,s)]\}\{F_{i\,j}[x(t,s), y(t,s)]\}$$
$$\{[\mathbf{D}_{(1)} x^i](t,s)\}\{[\mathbf{D}_{(0)} x^j](t,s)\}, \tag{1712}$$

که F خمش است، و x و y و Q مثل ِ بخش ِ پیش تعریف شده اند:

$$[x(t,s), y(t,s)] = [U^{-1} \circ \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}](t, t_1, z), \tag{1633}$$

$$Q_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)\,a}(t, t', y') = [\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1 \circ U^{-1} \circ \boldsymbol{Q}_{\gamma(\boldsymbol{\cdot},s)}]\{t, t', U_a[x(t',s), y']\}, \tag{1634}$$

و البته مثل ِ بخش ِ پیش، چون نتیجه مستقل از بدیهیگر است شاخص ِ بدیهیگر حذف شده. از (1711)

نتیجه میشود

$$Q_{\lambda(\bullet,0)}(t_2,t,\bullet)=\mathbf{1}. \tag{1713}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,0)=0. \tag{1714}$$

با توجه به اینها، از (1712) نسبت به s مشتق میگیرم و s را صفر میگذارم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[F_{i\,j}(x_1,y_1)]\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,0)\}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,x^j](t,0)\}=0, \tag{1715}$$

که

$$y_1:=y(t,0). \tag{1716}$$

رابطه یِ (1715) به ازا یِ هر $\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x](t,0)\}$ که (1709) و (1710) برآورده شوند برقرار است، از جمله با

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,x^i](t,0)=a^i\,\mathfrak{a}(t)+b^i\,\mathfrak{b}(t), \tag{1717}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ تابعها یی هموار با مقدار ِ حقیقی یَند که در t_1 و t_2 صفر میشوند، و a^i ها و b^i ها ثابت اند. با گذاشتن ِ اینها در (1715)، و با استفاده از

$$\begin{aligned}0&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[\mathfrak{a}\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{a})](t),\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[\mathfrak{b}\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{b})](t),\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[\mathfrak{a}\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{b})+\mathfrak{b}\,(\mathbf{D}\,\mathfrak{a})](t),\end{aligned} \tag{1718}$$

نتیجه میشود

$$\frac{1}{2}[F_{i\,j}(x_1,x_2)](a^i\,b^j-b^i\,a^j)\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;(\mathfrak{a}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{b}-\mathfrak{b}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{a})(t)=0. \tag{1719}$$

به سادگی میشود $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ را چنان گرفت که انتگرال ِ رابطه یِ بالا صفر نشود، مثلَن

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}(t)&=(t-t_1)(t_2-t),\\\mathfrak{b}(t)&=t(t-t_1)(t_2-t).\end{aligned} \tag{1720}$$

به این ترتیب،

$$[F_{i\,j}(x_1,x_2)](a^i\,b^j-b^i\,a^j)=0, \tag{1721}$$

که چون a^i ها و b^i ها دلبخاه اند و $F_{i\,j}$ نسبت به i و j پادمتقارن است، نتیجه میدهد

$$F_{i\,j} = 0. \tag{1722}$$

پس تختیت ِ کلاف نتیجه میدهد خمش صفر است، یعنی کلاف مُضعَن تخت است. اما از این که کلاف مُضعَن تخت باشد لزومَن نتیجه نمیشود کلاف تخت است. اگر کلاف مُضعَن تخت باشد، آنگاه هُلُنُمی برا یِ خمها یِ بسته یِ با ابتدا یِ یکسان یکسان است، به شرط ی که این خمها یِ بسته را بشود به شکل ی هموار به هم تبدیل کرد. در این حالت هُلُنُمی لزومَن همانی نیست، اما در اثر ِ تغییرات ِ هموار ِ خمها یِ بسته با ابتدا یِ یکسان عوض نمیشود. میگویند هُلُنُمی تپُلژیک است. پس اگر کلاف مُضعَن تخت باشد، هُلُنُمی لزومَن همانی نیست، اما تپُلژیک هست. اگر کلاف مُضعَن تخت، و خمینه-یِ-پایه ساده-همبند باشد، آنگاه کلاف تخت است.

از جمله، اگر کلاف ِ $\mathbb{E}$ با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ مُضعَن تخت، و $\mathbb{B}$ یک گو یِ باز در $\mathbb{M}$ باشد، آنگاه $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ یک کلاف ِ مُضعَن تخت است که خمینه-یِ-پایه اَش $\mathbb{B}$ است (که طبعَن ساده-همبند است). پس $\boldsymbol{\pi}^{-1}(\mathbb{B})$ تخت است: اگر کلاف ی مُضعَن تخت باشد، متناظر با هر نقطه اَش یک زیرکلاف شامل ِ آن نقطه هست که تخت است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار ِ بدیهی با افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است. بر این کلاف یک هموستار تعریف میکنم که بخش ِ قائم َش متناظر با بدیهیگر ِ سراسری صفر است. یعنی اگر U بدیهیگر ِ سراسری ست، هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ چنین است.

$$\boldsymbol{W}_u(z) = \{(\mathbf{D}\,U)[U^{-1}(z)]\}(-u, 0). \tag{1723}$$

دیده میشود هُلُنُمی یِ متناظر با این هموستار بدیهی ست. نتیجه این که اگر یک کلاف ِ هموار بدیهی باشد، آنگاه هموستار ی هست که این کلاف را تخت میکند. بر عکس، قبلَن دیده شد اگر یک کلاف تخت، و خمینه-یِ-پایه اَش خمی-همبند باشد، آنگاه آن کلاف بدیهی ست.

به هموستار ی که بخش ِ قائم َش (با یک بدیهیگر) صفر باشد، سادِتر هموستار ِ صفر (یا بدیهی) هم میگویم. البته رُشن است که صفربودن ِ بخش ِ قائم ِ هموستار مستقل از بدیهیگر نیست. $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ تخت با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است. بدیهیگر ِ سراسری یِ U_{x_0} را چنین تعریف میکنم.

$$U_{x_0} \in \mathsf{F}[\mathbb{E}; (\mathbb{M} \times \mathbb{E}_{x_0})]. \tag{1690}$$

$$U_{x_0}(x, y) = \mathsf{Q}(x, y). \tag{1691}$$

دیده میشود با این بدیهیگر، معادله یِ انتقال- ِ-افقی این است که

$$\mathbf{D}_u\, y = 0, \tag{1724}$$

که u مشتق ِ خم ی ست که انتقال ِ افقی با آن انجام میشود. از اینجا نتیجه میشود

$$W_u = 0, \tag{1725}$$

و چون این رابطه برا یِ هر خم ی در $\mathbb{M}$ درست است،

$$W = 0. \tag{1726}$$

به این ترتیب، اگر یک کلاف تخت باشد، بدیهیگر ی هست که هموستار ِ متناظر با آن صفر است. اگر کلاف مُضعَن تخت باشد، متناظر با هر نقطه از کلاف یک زیرکلاف شامل ِ آن نقطه هست، که تخت است. این زیرکلاف یک بدیهیگر ِ سراسری دارد که هموستار ِ متناظر با آن صفر است. نتیجه این که اگر خمش صفر باشد (کلاف مُضعَن تخت باشد)، هموستار را میشود مُضعَن صفر کرد. اگر کلاف تخت باشد، هموستار را میشود همه جا صفر کرد.

خلاصه یِ روابط ِ تختیت و بدیهیت اینها ست. $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ هموار است.

اگر $\mathbb{E}$ با هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ تخت باشد، آنگاه

- $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}$ مُضعَن تخت است.
- W را میشود صفر کرد.
- $\mathbb{E}$ بدیهی ست.

اگر $\mathbb{E}$ با هموستار ِ $\boldsymbol{W}$ مُضعَن تخت باشد، آنگاه

- اگر خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$ خمی-همبند باشد، $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}$ تخت است.
- W را میشود مُضعَن صفر کرد. اگر خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$ خمی-همبند باشد، W را میشود صفر کرد.

- اگر خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{E}$ خمی-همبند باشد، $\mathbb{E}$ بدیهی ست.

اگر W صفر باشد، آنگاه

- $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}$ تخت است.
- $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}$ مُضعَن تخت است.
- $\mathbb{E}$ بدیهی ست.

اگر $\mathbb{E}$ بدیهی باشد، آنگاه $\mathbb{E}$ یک هموستار ِ $\boldsymbol{W}'$ دارد که

- $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}'$ تخت است.
- $\mathbb{E}$ با $\boldsymbol{W}'$ مُضعَن تخت است.
- W' صفر است.

$\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ خمی-همبند ِ $\mathbb{M}$ و افکنش ِ $\boldsymbol{\pi}$ است، که با هموستار-ِ-آفین ِ $\check{\boldsymbol{W}}$ تخت است. $h(x_0)$ را یک پایه یِ $\mathbb{E}_{x_0}$ میگیرم، که x_0 در $\mathbb{M}$ است. متناظر با هر x در $\mathbb{M}$، تعریف میکنم

$$h_\alpha(x) = \mathsf{Q}[x, h_\alpha(x_0)]. \tag{1727}$$

رُشن است که $h(x)$ یک پایه برا یِ $\mathbb{E}_x$ است، و رُشن است که مشتق ِ هموردا یِ هر یک از h_α ها صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}\, h_\alpha = 0. \tag{1728}$$

با تعریف ِ y با

$$z = y^\alpha\, h_\alpha[\boldsymbol{\pi}(z)], \tag{1729}$$

دیده میشود بخش ِ قائم ِ هموستار متناظر با بدیهیگر ِ U صفر است، که

$$U(x,y) = y^\alpha\, h_\alpha(x). \tag{1730}$$

به این ترتیب، متناظر با کلاف ِ برداری یی که تخت باشد و خمینه اَش خمی-همبند باشد، یک میدان-پایه هست که مشتق ِ هموردا یَش صفر است، یعنی مقدار ِ هر عضو َش در هر نقطه از خمینه-یِ-پایه انتقال- ِ-افقی-یافته یِ مقدار ِ هم ین عضو از هر نقطه یِ دیگر ِ خمینه-یِ-پایه است. (بخش ِ قائم ِ) هموستار ِ متناظر با بدیهیگر ی که با این میدان-پایه ساخته میشود هم صفر است. باز معلوم است که اگر خمش صفر باشد، مُضعَن چنین میدان-پایه ای هست. اگر خمینه-یِ-پایه خمی-همبند نباشد هم، میشود در هر مئلفه یِ همبندی یِ خمینه یک میدان-پایه ساخت که مشتق ِ هموردا یَش صفر است. البته در این حالت چنین میدان-پایه ای به طُر ِ یکتا با مقدار َش در یک نقطه تعیین نمیشود.

5

مشتقِ هموردا و میدانها یِ تانسری

47 هموستار و میدانها یِ تانسری

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. پس فضا یِ تانسرها یِ نُعِ (r,s) بر $\mathbb{M}$ یک کلافِ برداری یِ هموار است که حاصل-ِضربِ تانسری یِ r فضا یِ (کلافِ) مماس و s فضا یِ (کلافِ) هممماس است. خُدِ فضا یِ هممماس هم دُگانِ فصا یِ مماس است. هموستار بر فضا یِ تانسرها یِ نُعِ (r,s) را هموستارِ القاییده از فضا یِ مماس میگیرم. به این ترتیب، برا یِ مشخص-کردن هموستار بر فضاها یِ تانسری کافی ست هموستارِ فضا یِ مماس معلوم باشد. این را با $\mathbf{\Gamma}$ (به جا یِ $\check{W}$ یا $\breve{w}$) نشان میدهم. برا یِ مشخص-کردنِ $\mathbf{\Gamma}$ هم کافی ست مانسته یِ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_u\, h_\alpha &= \check{W}^\beta{}_{i\,\alpha}\, u^i\, h_\beta,\\
&= (\check{W}_u)^\beta{}_\alpha\, h_\beta,\\
&= \check{U}\,(\check{W}_u)^\beta{}_\alpha\, h^{\mathbb{Y}}_\beta,\\
&= \check{U}\,\check{W}_u\, h^{\mathbb{Y}}_\alpha,\\
&= \check{U}\,\check{W}_u\,\check{U}^{-1}\, h_\alpha,
\end{aligned}
$$

$$= \breve{w}_u \, h_\alpha, \tag{1366}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla} \, h_\alpha = \breve{W}^\beta{}_\alpha \otimes h_\beta, \tag{1367}$$

داده شود. e را یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس میگیرم (که لزومَن مختصاتی نیست):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_u \, e_i &= (\boldsymbol{\Gamma}_u)^j{}_i \, e_j, \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,i} \, u^k \, e_j, \end{aligned} \tag{1731}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}_k \, e_i &= \nabla_{e_k} \, e_i, \\ &= \boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,i} \, e_j. \end{aligned} \tag{1732}$$

با

$$\boldsymbol{\nabla} \, T = e^k \otimes \boldsymbol{\nabla}_k \, T, \tag{1733}$$

که T یک میدان ِ تانسری ست و $\{(i, e^i) \mid i\}$ دُگان ِ e است، دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla} \, e_i = \boldsymbol{\Gamma}^j{}_i \otimes e_j, \tag{1734}$$

که

$$\boldsymbol{\Gamma}^j{}_i = \boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,i} \, e^k. \tag{1735}$$

$\boldsymbol{\Gamma}$ یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ $(1,2)$ است، اما به پایه بستِگی دارد. $\boldsymbol{\Gamma}$ یِ متناظر با پایه یِ e را با $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{\Gamma}(e) = [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} \, e_i \otimes e^j \otimes e^k, \tag{1736}$$

یا سادِتر،

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\, e_i \otimes e^j \otimes e^k. \tag{1737}$$

اینها همئرز َند با

$$\mathbf{\Gamma}(e) = (\boldsymbol{\nabla}_j\, e_k) \otimes e^j \otimes e^k, \tag{1738}$$

یا سادِتر،

$$\mathbf{\Gamma} = (\boldsymbol{\nabla}_j\, e_k) \otimes e^j \otimes e^k. \tag{1739}$$

البته

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\, e_k) \otimes e^k &= e^j \otimes (\boldsymbol{\nabla}_j\, e_k) \otimes e^k,\\ &= \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\, e^j \otimes e_i \otimes e^k,\end{aligned} \tag{1740}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{\Gamma} \neq (\boldsymbol{\nabla}\, e_k) \otimes e^k. \tag{1741}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}e^k \otimes (\boldsymbol{\nabla}\, e_k) &= e^k \otimes e^j \otimes (\boldsymbol{\nabla}_j\, e_k),\\ &= \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\, e^k \otimes e^j \otimes e_i,\end{aligned} \tag{1742}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{\Gamma} \neq e^k \otimes (\boldsymbol{\nabla}\, e_k). \tag{1743}$$

به $\mathbf{\Gamma}$ تانسر ِ هموستار (یا سادِتر هموستار) میگویم.

دیده میشود اگر e' یک پایه ِ دیگر باشد و

$$e'_i = \Lambda\, e_i, \tag{1744}$$

آنگاه

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{j'\,k'}\, e'_i &= \nabla_{j'}\, e'_k,\\
&= \Lambda^l{}_j\, \nabla_l(\Lambda^m{}_k\, e_m),\\
&= \Lambda^l{}_j[\Lambda^m{}_k\, \nabla_l\, e_m + (\mathbf{D}_l\, \Lambda^m{}_k)e_m],\\
&= \Lambda^l{}_j\{\Lambda^m{}_k\, [\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + \mathbf{D}_l\, \Lambda^n{}_k\}e_n,\\
&= \Lambda^l{}_j\{\Lambda^m{}_k\, [\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + \mathbf{D}_l\, \Lambda^n{}_k\}(\Lambda^{-1})^i{}_n\, e'_i, \qquad (1745)
\end{aligned}
$$

که نتیجه میدهد

$$
[\mathbf{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{j'\,k'} = \Lambda^l{}_j\, \Lambda^m{}_k\, (\Lambda^{-1})^i{}_n\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + (\mathbf{D}_l\, \Lambda^n{}_s)(\Lambda^{-1})^s{}_m\}, \qquad (1746)
$$

یا

$$
[\mathbf{\Gamma}(e')]^n{}_{l\,m} = [\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + (\mathbf{D}_l\, \Lambda^n{}_s)(\Lambda^{-1})^s{}_m, \qquad (1747)
$$

یا

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}(e') &= \mathbf{\Gamma}(e) + (\Lambda^{-1})^s{}_m\, e_n \otimes (\mathbf{d}\, \Lambda^n{}_s) \otimes e^m,\\
&= \mathbf{\Gamma}(e) + e_n \otimes (\mathbf{d}\, \Lambda^n{}_s) \otimes e'^s. \qquad (1748)
\end{aligned}
$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{\Gamma}(e')]^i{}_j &= [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_j + (\mathbf{d}\, \Lambda^i{}_k)(\Lambda^{-1})^k{}_j,\\
&= [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_j - \Lambda^i{}_k\, \mathbf{d}\, (\Lambda^{-1})^k{}_j, \qquad (1749)
\end{aligned}
$$

و البته

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{j'} &= (\Lambda^{-1})^i{}_m\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^m{}_n\, \Lambda^n{}_j + \mathbf{d}\, \Lambda^m{}_j\},\\
&= \{(\Lambda^{-1})^i{}_m\, [\mathbf{\Gamma}(e)]^m{}_n - \mathbf{d}\, (\Lambda^{-1})^i{}_n\}\Lambda^n{}_j. \qquad (1750)
\end{aligned}
$$

از جمله اگر e و e' پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر با، به ترتیب، ϕ و ϕ' باشند، برا یِ Λ در رابطه یِ (1744)،

$$\Lambda^i{}_j = \mathbf{D}_{j'}\,\phi^i, \tag{1751}$$

$$(\Lambda^{-1})^i{}_j = \mathbf{D}_j\,\phi'^i. \tag{1752}$$

به این ترتیب، (1746) میشود

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{j'\,k'} &= (\mathbf{D}_{j'}\,\phi^l)(\mathbf{D}_{k'}\,\phi^m)(\mathbf{D}_n\,\phi'^i)\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + (\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_{s'}\,\phi^n)(\mathbf{D}_m\,\phi'^s)\},\\ &= (\mathbf{D}_n\,\phi'^i)\{(\mathbf{D}_{j'}\,\phi^l)(\mathbf{D}_{k'}\,\phi^m)[\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_{l\,m} + \mathbf{D}_{j'}\,\mathbf{D}_{k'}\,\phi^n\},\end{aligned} \tag{1753}$$

یا

$$[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} = (\mathbf{D}_{n'}\,\phi^i)\{(\mathbf{D}_j\,\phi'^l)(\mathbf{D}_k\,\phi'^m)[\mathbf{\Gamma}(e')]^n{}_{l\,m} + \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^n\}, \tag{1754}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$(\mathbf{D}_i\,\phi'^n)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} = (\mathbf{D}_j\,\phi'^l)(\mathbf{D}_k\,\phi'^m)[\mathbf{\Gamma}(e')]^n{}_{l\,m} + \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^n. \tag{1755}$$

از (1748) نتیجه میشود اگر $\mathbf{\Gamma}$ و $\mathbf{\Gamma}'$ دُ هموستار باشند،

$$\mathbf{\Gamma}'(e') - \mathbf{\Gamma}'(e) = \mathbf{\Gamma}(e') - \mathbf{\Gamma}(e), \tag{1756}$$

یا

$$\mathbf{\Gamma}'(e') - \mathbf{\Gamma}(e') = \mathbf{\Gamma}'(e) - \mathbf{\Gamma}(e), \tag{1757}$$

یعنی تفاضل ِ دُ هموستار مستقل از میدان-پایه است. این حالت ِ خاص ِ آن است که تفاضل ِ بخش ِ قائم ِ دُ هموستار بر یک کلاف، مستقل از بدیهیگر است.

از (1749) نتیجه میشود

$$[\mathbf{\Gamma}(e')]^j{}_j = [\mathbf{\Gamma}(e)]^j{}_j + (\mathbf{d}\,\Lambda^j{}_k)(\Lambda^{-1})^k{}_j. \tag{1758}$$

رد ِ هموستار (متناظر با شاخصها یِ اول و سوم) را با $\grave{\mathbf{\Gamma}}$ نشان میدهم:

$$\grave{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}^j{}_j, \tag{1759}$$

یا

$$\grave{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{\Gamma}^j{}_{i\,j}, \tag{1760}$$

که

$$\grave{\mathbf{\Gamma}} = \grave{\mathbf{\Gamma}}_i\, e^i. \tag{1761}$$

به این ترتیب،

$$\grave{\mathbf{\Gamma}}(e') = \grave{\mathbf{\Gamma}}(e) + \mathsf{tr}[(\mathbf{d}\,\Lambda)\Lambda^{-1}]. \tag{1762}$$

از اینجا دیده میشود

$$\mathbf{d}\,[\grave{\mathbf{\Gamma}}(e')] = \mathbf{d}\,[\grave{\mathbf{\Gamma}}(e)] - \mathsf{tr}\{(\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge[\mathbf{d}(\Lambda^{-1})]\}. \tag{1763}$$

اما

$$\begin{aligned}\mathsf{tr}\{(\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge[\mathbf{d}(\Lambda^{-1})]\} &= -\mathsf{tr}[(\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge\ \Lambda^{-1}\,(\mathbf{d}\,\Lambda)\,\Lambda^{-1}],\\ &= -\mathsf{tr}[(\Lambda^{-1}\,\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge(\Lambda^{-1}\,\mathbf{d}\,\Lambda)],\\ &= \mathsf{tr}[(\Lambda^{-1}\,\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge(\Lambda^{-1}\,\mathbf{d}\,\Lambda)],\end{aligned} \tag{1764}$$

که نشان میدهد

$$\mathsf{tr}\{(\mathbf{d}\,\Lambda)\wedge[\mathbf{d}(\Lambda^{-1})]\} = 0. \tag{1765}$$

مشتق ِ برونی یِ رد ِ هموستار را با $\grave{\boldsymbol{R}}$ نشان میدهم:

$$\grave{\boldsymbol{R}}(e) = \mathbf{d}[\grave{\mathbf{\Gamma}}(e)]. \tag{1766}$$

از (1763) و (1765) دیده میشود مشتق ِ برونی یِ رد ِ هموستار به میدان-پایه بستِگی ندارد. پس e را از $[\grave{\boldsymbol{R}}(e)]$ بر میدارم:

$$\grave{\boldsymbol{R}} = \mathbf{d}[\grave{\mathbf{\Gamma}}(e)], \tag{1767}$$

یا

$$\grave{\boldsymbol{R}} = \mathbf{d}\,\grave{\boldsymbol{\Gamma}}, \tag{1768}$$

که یعنی در طرف ِ راست میشود هر میدان-پایه ای را به کار بُرد. این که $\grave{\boldsymbol{R}}$ به میدان-پایه بستِگی ندارد، حالت ِ خاص ِ چیز ی ست که قبلَن برا یِ هموستارها یِ آفین به دست آمد: $\grave{f}$ (مشتق ِ برونی یِ رد ِ هموستار) به بدیهیگر بستِگی ندارد.

از

$$\check{W}^{\alpha}{}_{i\,\beta} + \check{\tilde{W}}_{\beta\,i}{}^{\alpha} = 0, \tag{1393}$$

برا یِ هموستار ِ القاییده، مشتق ِ هموردا یِ $\{(i, e^i) \mid i\}$ (میدان-پایه یِ دُگان ِ e) چنین میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_k\, e^i = -\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\, e^j, \tag{1769}$$

که میشود آن را ، با بردار ِ u، چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u\, e^i &= -(\boldsymbol{\Gamma}_u)^i{}_j\, e^j,\\ &= -\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\, u^k\, e_j.\end{aligned} \tag{1770}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{\nabla}\, e^i = -\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \otimes e^j. \tag{1771}$$

به این ترتیب دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma} &= -e_i \otimes e^k \otimes (\boldsymbol{\nabla}_k\, e^i),\\ &= -e_i \otimes (\boldsymbol{\nabla}\, e^i).\end{aligned} \tag{1772}$$

با استفاده از

$$W_u(y_1 \otimes y_2) = [W_{1\,u}(y_1)] \otimes y_2 + y_1 \otimes [W_{2\,u}(y_2)], \tag{1290}$$

و نیز (1732) تا (1734) و (1769) تا (1771)، مشتق ِ هموردا یِ میدان-پایِها یِ فضا یِ تانسرها به دست میئاید:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_k(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) &= \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,i}(e_m\otimes\cdots\otimes e^j)+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,m}(e_i\otimes\cdots\otimes e^m),\end{aligned}\tag{1773}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) &= (\boldsymbol{\Gamma}_u)^m{}_i(e_m\otimes\cdots\otimes e^j)+\cdots\\ &\quad-\cdots-(\boldsymbol{\Gamma}_u)^j{}_m(e_i\otimes\cdots\otimes e^m),\\ &= \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,i}\,u^k(e_m\otimes\cdots\otimes e^j)+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,m}\,u^k(e_i\otimes\cdots\otimes e^m),\end{aligned}\tag{1774}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) &= \boldsymbol{\Gamma}^m{}_i\otimes(e_m\otimes\cdots\otimes e^j)+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^j{}_m\otimes(e_i\otimes\cdots\otimes e^m),\\ &= \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,i}(e^k\otimes e_m\otimes\cdots\otimes e^j)+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^j{}_{k\,m}(e^k\otimes e_i\otimes\cdots\otimes e^m).\end{aligned}\tag{1775}$$

هموستار بر فضا یِ تانسرها یِ نُع ِ (r,s) را (که القاییده از فضا یِ مماس است) با $\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}$ نشان میدهم. در این صورت (1773) تا (1775) چنین میشوند.

$$\boldsymbol{\nabla}_k(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) = \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{p\cdots}{}_{\cdots q i\cdots}{}^{\cdots j}(e_p\otimes\cdots\otimes e^q),\tag{1776}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) &= [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u]^{p\cdots}{}_{\cdots q i\cdots}{}^{\cdots j}(e_p\otimes\cdots\otimes e^q),\\ &= \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{p\cdots}{}_{\cdots q i\cdots}{}^{\cdots j}\,u^k(e_p\otimes\cdots\otimes e^q),\end{aligned}\tag{1777}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,(e_i\otimes\cdots\otimes e^j) &= [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}]^{p\cdots}{}_{\cdots q i\cdots}{}^{\cdots j}\otimes(e_p\otimes\cdots\otimes e^q),\\ &= \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{p\cdots}{}_{\cdots q i\cdots}{}^{\cdots j}(e^k\otimes e_p\otimes\cdots\otimes e^q),\end{aligned}\tag{1778}$$

که

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_{k}{}^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s\,i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s},\\
&=\sum_{l=1}^{r}\delta^{p_1}_{i_1}\cdots\delta^{p_{l-1}}_{i_{l-1}}\,\boldsymbol{\Gamma}^{p_l}{}_{k\,i_l}\,\delta^{p_{l+1}}_{i_{l+1}}\cdots\delta^{p_r}_{i_r}\,\delta^{j_1}_{q_1}\cdots\delta^{j_s}_{q_s}\\
&\quad-\sum_{l=1}^{s}\delta^{p_1}_{i_1}\cdots\delta^{p_r}_{i_r}\,\delta^{j_1}_{q_1}\cdots\delta^{j_{l-1}}_{q_{l-1}}\,\boldsymbol{\Gamma}^{j_l}{}_{k\,q_l}\,\delta^{j_{l+1}}_{q_{l+1}}\cdots\delta^{j_s}_{q_s},
\end{aligned}\tag{1779}$$

یا

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_{u}]^{p_1\cdots p_r}{}_{q_1\cdots q_s\,i_1\cdots i_r}{}^{j_1\cdots j_s},\\
&=\sum_{l=1}^{r}\delta^{p_1}_{i_1}\cdots\delta^{p_{l-1}}_{i_{l-1}}\,(\boldsymbol{\Gamma}_u)^{p_l}{}_{i_l}\,\delta^{p_{l+1}}_{i_{l+1}}\cdots\delta^{p_r}_{i_r}\,\delta^{j_1}_{q_1}\cdots\delta^{j_s}_{q_s}\\
&\quad-\sum_{l=1}^{s}\delta^{p_1}_{i_1}\cdots\delta^{p_r}_{i_r}\,\delta^{j_1}_{q_1}\cdots\delta^{j_{l-1}}_{q_{l-1}}\,(\boldsymbol{\Gamma}_u)^{j_l}{}_{q_l}\,\delta^{j_{l+1}}_{q_{l+1}}\cdots\delta^{j_s}_{q_s}.
\end{aligned}\tag{1780}$$

این را میشود بستِتر چنین نوشت

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T)&=\sum_{i=1}^{r}[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes\boldsymbol{\Gamma}_u\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}]\,T\\
&\quad-\sum_{i=1}^{s}T\,[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes\boldsymbol{\Gamma}_u\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}].
\end{aligned}\tag{1781}$$

از مقایسه یِ این با

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\omega,T)&=\sum_{i=1}^{s}T[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}]\\
&\quad-\sum_{i=1}^{r}[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}]T,
\end{aligned}\tag{564}$$

دیده میشود با تبدیل ِ $(u\otimes\omega)$ به $(-\boldsymbol{\Gamma}_u)$، تانسر ِ $[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(u,\omega,T)]$ به تانسر ِ $[\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T)]$ تبدیل میشود، و بر عکس:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(-\boldsymbol{\Gamma}_u;T)=\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T),\tag{1782}$$

که در آن نمادگذاری یِ

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(u\otimes\omega;T)=\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(u,\omega,T)\tag{1783}$$

به کار رفته.

اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma &= \mathbf{D}\,\Sigma,\\ &= \mathbf{d}\,\Sigma.\end{aligned} \tag{1784}$$

به این ترتیب اگر T یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) باشد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,T)_k{}^{i\cdots}{}_{\cdots j} &= (\boldsymbol{\nabla}_k\,T)^{i\cdots}{}_{\cdots j},\\ &= \mathbf{D}_k\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(e_k,T)]^{i\cdots}{}_{\cdots j},\\ &= \mathbf{D}_k\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q}\,T^{p\cdots}{}_{\cdots q},\\ &= \mathbf{D}_k\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\\ &\quad + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,m}\,T^{m\cdots}{}_{\cdots j} + \cdots\\ &\quad - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,j}\,T^{i\cdots}{}_{\cdots m},\end{aligned} \tag{1785}$$

یا،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,T &= (\mathbf{D}\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j})e_i\otimes\cdots\otimes e^j + e^k\otimes[\boldsymbol{\Gamma}(e_k,T)],\\ &= [\mathbf{D}_k\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q}\,T^{p\cdots}{}_{\cdots q}]e^k\otimes e_i\otimes\cdots\otimes e^j,\\ &= (\mathbf{D}_k\,T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\\ &\quad + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,m}\,T^{m\cdots}{}_{\cdots j} + \cdots\\ &\quad - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,j}\,T^{i\cdots}{}_{\cdots m})e^k\otimes e_i\otimes\cdots\otimes e^j.\end{aligned} \tag{1786}$$

همچنین، با تعریف ِ

$$[\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u]^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q} = \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q}\,u^k, \tag{1787}$$

یا

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u\,T = \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T), \tag{1788}$$

که u یک بردار است، دیده میشود

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_u T)^{i\cdots}{}_{\cdots j} &= \mathbf{D}_u T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u T]^{i\cdots}{}_{\cdots j},\\
&= \mathbf{D}_u T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T)]^{i\cdots}{}_{\cdots j},\\
&= \mathbf{D}_u T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + [\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u]^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q} T^{p\cdots}{}_{\cdots q},\\
&= u^k[\mathbf{D}_k T^{i\cdots}{}_{\cdots j} + \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_k{}^{i\cdots}{}_{\cdots jp\cdots}{}^{\cdots q} T^{p\cdots}{}_{\cdots q}],\\
&= u^k(\mathbf{D}_k T^{i\cdots}{}_{j\cdots}\\
&\quad + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,m} T^{m\cdots}{}_{\cdots j} + \cdots\\
&\quad - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,j} T^{i\cdots}{}_{\cdots m}),\\
&= \mathbf{i}_u(\mathbf{d}T^{i\cdots}{}_{\cdots j}\\
&\quad + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_m T^{m\cdots}{}_{\cdots j} + \cdots\\
&\quad - \cdots - \boldsymbol{\Gamma}^m{}_j T^{i\cdots}{}_{\cdots m}),
\end{aligned}
\tag{1789}
$$

یا بستِتر

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_u T &= (\mathbf{D}_u T^{i\cdots}{}_{\cdots j}) e_i \otimes \cdots \otimes e^j + \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u,T),\\
&= (\mathbf{D}_u T^{i\cdots}{}_{\cdots j}) e_i \otimes \cdots \otimes e^j + \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}{}_u T.
\end{aligned}
\tag{1790}
$$

از جمله اگر Σ یک میدان ِ اسکالر و u یک بردار باشد

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_u \Sigma &= \mathbf{i}_u(\mathbf{d}\,\Sigma),\\
&= \mathbf{i}_u(\mathbf{D}\,\Sigma),\\
&= \mathbf{D}_u \Sigma,\\
&= \mathbf{L}_u \Sigma.
\end{aligned}
\tag{1791}
$$

البته $\mathbf{L}_u$ با میدان ِ برداری یِ u تعریف میشود. اما $(\mathbf{L}_u \Sigma)$ نسبت به u نقطِئی ست، $(\mathbf{L}_u \Sigma)$ با بردار ِ u هم خُش-تعریف است.

رُشن است که اگر T یک میدان ِ تانسری باشد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,T)_k{}^{l\,i\cdots}{}_{\cdots j\,l} &= \mathbf{D}_k\,T^{l\,i\cdots}{}_{\cdots j\,l}\\ &\quad+\boldsymbol{\Gamma}^l{}_{k\,m}\,T^{m\,i\cdots}{}_{\cdots j\,l}+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,m}\,T^{l\,m\cdots}{}_{\cdots j\,l}+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,j}\,T^{l\,i\cdots}{}_{\cdots m\,l}-\boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,l}\,T^{l\,i\cdots}{}_{\cdots j\,m},\\ &= \mathbf{D}_k\,T^{l\,i\cdots}{}_{\cdots j\,l}\\ &\quad+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,m}\,T^{l\,m\cdots}{}_{\cdots j\,l}+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^m{}_{k\,j}\,T^{l\,i\cdots}{}_{\cdots m\,l}.\end{aligned}\tag{1792}$$

یعنی هموستارها یِ متناظر با شاخصها یِ ادغام-شده، یکدیگر را حذف میکنند. در واقع این هم ان است که مشتق ِ هموردا با ادغام جابِجا میشود.

اگر u یک بردار باشد، $\boldsymbol{\nabla}_u$ نسبت به $\otimes$ لَیبنیتسی ست. به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{\nabla}_u$ نسبت به $\wedge$ هم لَیبنیتسی ست. یعنی اگر σ و τ دُ میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل باشند،

$$\boldsymbol{\nabla}_u(\sigma\wedge\tau)=(\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma)\wedge\tau+\sigma\wedge(\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau).\tag{1793}$$

اگر u و v میدانها یی برداری باشند و Σ میدان ی اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)\Sigma &= (\mathbf{L}_u\,\mathbf{L}_v-\mathbf{L}_v\,\mathbf{L}_u)\Sigma,\\ &= \mathbf{L}_{u\diamond v}\,\Sigma,\\ &= \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}\,\Sigma,\end{aligned}\tag{1794}$$

یا

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}_u,\boldsymbol{\nabla}_v]\Sigma &= \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}\,\Sigma,\\ &= [\mathbf{L}_u,\mathbf{L}_v]\Sigma.\end{aligned}\tag{1795}$$

تئکید ِ این بد نیست که این رابطه وقت ی درست است که Σ یک میدان ِ اسکالر باشد.

مشتق ِ هموردا ویژِگیها یِ تقارنی یِ تانسرها را حفظ میکند. یعنی اگر تانسر ِ T نسبت به چند شاخص َش متقارن (پادمتقارن) باشد، و u یک بردار باشد، $(\boldsymbol{\nabla}_u\,T)$ هم نسبت به هم ان شاخصها متقارن

(پادمتقارن) است. از جمله اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، $(\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma)$ هم یک s فرم- ِ-دیفرانسیل است. اگر $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی باشد، همه یِ m فرم- ِ-دیفرانسیلها با هم متناسب َند، از جمله اگر ε یک m فرم- ِ-دیفرانسیل باشد که بر $\mathbb{M}$ صفر نشود، و σ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، متناظر با هر بردار ِ u یک اسکالر ِ $\mathfrak{a}$ هست که

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma = \mathfrak{a}\,\varepsilon. \tag{1796}$$

$\mathfrak{a}$ نسبت به u و σ خطی، و نسبت به u نقطِئی ست. پس $\mathfrak{a}$ اثر ِ یک همبردار بر u است، که البته آن همبردار نسبت به σ خطی (ولی نَ نقطِئی) ست. این همبردار را با $\tau(\sigma)$ نشان میدهم:

$$\mathfrak{a} = [\tau(\sigma)]u. \tag{1797}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma = \{[\tau(\sigma)]u\}\varepsilon, \tag{1798}$$

یا بر حسب ِ یک پایه،

$$\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma = [\tau(\sigma)]_i\,\varepsilon. \tag{1799}$$

برا یِ مشتق ِ خُد ِ ε هم روابط ی مشابه برقرار است:

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,\varepsilon = \{[\tau(\varepsilon)]u\}\varepsilon. \tag{1800}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_i\,\varepsilon = [\tau(\varepsilon)]_i\,\varepsilon. \tag{1801}$$

اگر خمینه عنصر- ِ-حجم داشته باشد، ε را میشود عنصر- ِ-حجم ِ خمینه گرفت. در این حالت $\tau(\varepsilon)$ را با $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u\,\varepsilon &= \{[\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)]u\}\varepsilon,\\ &=: [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_u(\varepsilon)]\varepsilon.\end{aligned} \tag{1802}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_i\,\varepsilon &= [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)]_i\,\varepsilon,\\ &=: [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_i(\varepsilon)]\varepsilon.\end{aligned} \tag{1803}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\,\varepsilon = [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)] \otimes \varepsilon. \tag{1804}$$

رُشن است که اگر $\mathfrak{b}$ یک اسکالر باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_i(\mathfrak{b}\,\varepsilon) = \{\mathfrak{b}\,[\tau(\varepsilon)]_i + \mathbf{D}_i\,\mathfrak{b}\}\varepsilon. \tag{1805}$$

به این ترتیب، اگر $\mathfrak{b}$ صفر نشود

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_i(\mathfrak{b}\,\varepsilon) = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_i(\varepsilon) + \frac{1}{\mathfrak{b}}\,\mathbf{D}_i\,\mathfrak{b}, \tag{1806}$$

یا

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathfrak{b}\,\varepsilon) = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon) + \frac{1}{\mathfrak{b}}\,\mathbf{d}\,\mathfrak{b}. \tag{1807}$$

$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)$ یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل است. از رابطه یِ بالا دیده میشود اگر $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)$ بسته باشد،

$$\mathbf{d}[\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon)] = 0, \tag{1808}$$

مُضعَن یک $\mathfrak{b}$ هست که به ازا یِ آن $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\mathfrak{b}\,\varepsilon)$ صفر میشود. کافی ست $\mathfrak{b}$ جواب ِ این معادله گرفته شود.

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\varepsilon) + \mathbf{d}(\ln \mathfrak{b}) = 0. \tag{1809}$$

این معادله مُضعَن برا یِ $\mathfrak{b}$ جواب دارد، اگر و تنها اگر (1808) برقرار باشد.

میگویم هموستار با عنصر- ِ-حجم سازگار است، اگر مشتق ِ هموردا یِ عنصر- ِ-حجم صفر باشد. ε یک عنصر- ِ-حجم و $\{(i, e^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ مختصاتی برا یِ فضا یِ هممماس است. از

$$\varepsilon = [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}(e)], \tag{932}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_j\,\varepsilon &= \{\boldsymbol{\nabla}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}e^1 \wedge \cdots \wedge e^m + [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\boldsymbol{\nabla}_j(e^1 \wedge \cdots \wedge e^m),\\ &= \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\{\boldsymbol{\nabla}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\varepsilon - [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\boldsymbol{\Gamma}^1{}_{j\,i}(e^i \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^m)\\ &\quad + \cdots + \boldsymbol{\Gamma}^m{}_{j\,i}(e^1 \wedge \cdots \wedge e^{m-1} \wedge e^i)],\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\{\boldsymbol{\nabla}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\boldsymbol{\Gamma}^1{}_{j\,1}(e^1\wedge e^2\wedge\cdots\wedge e^m)$$
$$+\cdots+\boldsymbol{\Gamma}^m{}_{j\,m}(e^1\wedge\cdots\wedge e^{m-1}\wedge e^m)],$$
$$= \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\{\boldsymbol{\nabla}_j\,[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,i}\,\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{1810}$$

که m بُعد ِ خمینه است. به این ترتیب،

$$\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\,\mathbf{d}[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \grave{\boldsymbol{\Gamma}}. \tag{1811}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}[\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon})] = -\mathbf{d}\,\grave{\boldsymbol{\Gamma}},$$
$$= -\grave{\boldsymbol{R}}. \tag{1812}$$

پس $\dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$ بسته است، اگر و تنها اگر رد ِ هموستار بسته باشد. نتیجه میشود متناظر با یک هموستار ِ معلوم، مُضعَن یک عنصر- ِ-حجم هست که هموستار با آن سازگار باشد، اگر و تنها اگر رد ِ هموستار بسته باشد. به علاوه از (1807) دیده میشود وقت ی هموستار با $\boldsymbol{\varepsilon}$ سازگار باشد، هموستار با $(\mathfrak{b}\,\boldsymbol{\varepsilon})$ سازگار است اگر و تنها اگر $\mathfrak{b}$ ثابت باشد. پس عنصر- ِ-حجمها یی که هموستار با آنها سازگار است (در صورت ِ وجود ِ چنین عنصر- ِ-حجمها یی) مضربها یِ ثابت ِ یک ی از این عنصر- ِ-حجمها یَند.

هموستار ی که برا یِ میدانها یِ برداری تعریف میشود، حالت ِ خاص ِ هموستار ِ آفین است (که برا یِ کلافها یِ برداری تعریف میشود). یک ویژگی یِ هموستار ی که برا یِ میدانها یِ برداری تعریف میشود، این است که بخش ِ قائم ِ آن بر دُ بردار از یک فضا یِ یکسان (فضا یِ مماس بر خمینه) اثر میکند، و حاصل هم در هم ان فضا (فضا یِ مماس بر خمینه) است. هموستار ِ آفین ی که بر یک کلاف ِ برداری تعریف میشود لزومَن چنین نیست. اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ باشد، متناظر با هر u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$،

$$\check{w}_u \in \mathsf{LF}(\mathbb{E}_x;\mathbb{E}_x). \tag{1813}$$

$\mathrm{T}\mathbb{M}$ (فضا یِ مماس بر $\mathbb{M}$) یک کلاف ِ برداری با خمینه-یِ-پایه یِ $\mathbb{M}$ است، و رُشن است که

$$(\mathrm{T}\mathbb{M})_x = \mathrm{T}_x\mathbb{M}. \tag{1814}$$

پس رابطه یِ متناظر با (1813) برا یِ هموستار ِ $\mathbf{\Gamma}$ برا یِ میدانها یِ برداری بر $\mathbb{M}$ چنین است.

$$\mathbf{\Gamma}_u \in \mathsf{LF}(\mathrm{T}_x\mathbb{M}; \mathrm{T}_x\mathbb{M}). \tag{1815}$$

$(\check{w}_u\, z)$ تعریف شده است اگر و تنها اگر یک x در $\mathbb{M}$ باشد که u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و z در $\mathbb{E}_x$ باشد. در این صورت $(\check{w}_u\, z)$ در $\mathbb{E}_x$ است، و اگر $\mathbb{E}$ هم ان $\mathrm{T}\mathbb{M}$ نباشد $(\check{w}_z\, u)$ تعریف نشده است. اما $(\mathbf{\Gamma}_u\, v)$ تعریف شده است اگر و تنها اگر یک x در $\mathbb{M}$ باشد که u و v هردُ در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشند. در این صورت $(\mathbf{\Gamma}_u\, v)$ در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است، و $(\mathbf{\Gamma}_v\, u)$ هم تعریف شده است. میشود گفت یک هموستار ِ آفین در حالت ِ کلی بر یک بردار ِ فضا یِ مماس و یک بردار ِ کلاف ِ برداری اثر میکند و یک بردار ِ کلاف ِ برداری میدهد، در حال ی که یک هموستار ِ میدانها یِ برداری بر دُ بردار ِ از یک گونه (بردارها یِ فضا یِ مماس) اثر میکند و یک بردار از هم ان گونه میدهد. به زبان ِ شاخصها، در حالت ِ کلی از سه شاخص ِ یک هموستار ِ آفین یک ی شاخص ِ فضا یِ مماس است و دُ تا شاخص ِ کلاف ِ برداری یَند. در حالت ِ خاص ِ هموستار ِ آفین برا یِ میدانها یِ برداری، هر-سه-شاخص از یک گونه (شاخص ِ فضا یِ مماس) اند.

چون هموستار ی که برا یِ میدانها یِ برداری تعریف میشود حالت ِ خاص ِ هموستار ی ست که بر کلافها تعریف میشود، برا یِ هموستار ی که برا یِ میدانها یِ برداری تعریف میشود هم متناظر با هر نقطه میشود میدان-پایه ای یافت که هموستار در آن نقطه صفر شود. مستقیمَن از (1749) هم دیده میشود که شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که e' چنین میدان-پایه ای برا یِ نقطه یِ x باشد این است.

$$[\Lambda^i{}_k\, \mathbf{d}\, (\Lambda^{-1})^k{}_j](x) = [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_j(x), \tag{1816}$$

که Λ تابع ِ تغییر- ِ-پایه از e به e' است. یک جواب ِ این معادله چنین به دست میئاید که

$$\Lambda(x) = \mathbf{1}. \tag{1817}$$

این رابطه در واقع جواب را خاص نمیکند، بلکه همئرز با آن است که به جا یِ تابع ِ تغییر- ِ-پایه یِ Λ تابع ِ $\{\Lambda\, [\Lambda(x)]^{-1}\}$ به کار رود. با فرض ِ برقراری یِ (1817)، شرط ِ صفر-شدن ِ $\mathbf{\Gamma}(e')$ در x میشود

$$[\mathbf{d}\, (\Lambda^{-1})^i{}_j](x) = [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_j(x), \tag{1818}$$

که حتمَن برا یِ Λ جواب دارد.

اما ممکن است میدان-پایه یِ مختصاتی یی نباشد که هموستار ِ متناظر با آن پایه صفر شود. برا یِ دیدن ِ این، میدان-پایِها یِ e و e' را میدان-پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشِها یِ به ترتیب ϕ و ϕ' میگیرم و میکوشم (1818) را با شرط ِ (1817) برقرار کنم. از

$$(\Lambda^{-1})^i{}_j(x) = (\mathbf{D}_j\,\phi'^i)(x). \tag{1819}$$

دیده میشود (1818) همئرز است با

$$(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,\phi'^i)(x) = [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{k\,j}(x). \tag{1820}$$

این معادله لزومَن برا یِ ϕ' جواب ندارد: طرف ِ چپ نسبت به j و k متقارن است، در حال یِ که طرف ِ راست لزومَن چنین نیست. در واقع دیده میشود اگر e و e' میدان-پایِها یِ مختصاتی یی متناظر با نقشِها یِ، به ترتیب، ϕ و ϕ' باشند، بدون ِ این که لزومَن (1817) برقرار باشد یا $\Gamma(e')$ صفر شود،

$$[\mathbf{\Gamma}(e')]^i{}_{k\,j} = [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{k\,j} - (\mathbf{D}_{l'}\,\phi^i)\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,\phi'^l, \tag{1821}$$

که نشان میدهد با تغییر- ِ-پایه یِ مختصاتی فقط یک بخش ِ متقارن نسبت به j و k به $\Gamma^i{}_{k\,j}$ اضافه میشود. پس اگر $\Gamma^i{}_{k\,j}(x)$ متقارن نباشد، با هیچ تغییر- ِ-پایه یِ مختصاتی یی نمیشود آن را صفر کرد. معادله یِ

$$(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,\phi'^i)(x) = \frac{1}{2}\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{k\,j} + [\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}\}(x), \tag{1822}$$

حتمَن برا یِ ϕ' جواب دارد. متناظر با ϕ' ی که (1822) را براورَد،

$$\frac{1}{2}\{[\mathbf{\Gamma}(e')]^i{}_{k\,j} + [\mathbf{\Gamma}(e')]^i{}_{j\,k}\}(x) = 0. \tag{1823}$$

به این ترتیب متناظر با هر نقطه یِ x یک میدان پایه یِ مختصاتی هست که بخش ِ متقارن ِ هموستار ِ متناظر با آن، در x صفر میشود. به طُر ِ کلی، وقت ی میدان-پایِها یِ مختصاتی به کار میروند، با تغییر- ِ-پایه فقط بخش ِ متقارن (نسبت به متغیرها یِ دوم و سوم) ِ هموستار تغییر میکند، و متناظر با هر نقطه یِ x یک میدان-پایه یِ مختصاتی هست که بخش ِ متقارن ِ هموستار ِ متناظر با آن میدان-پایه در x صفر میشود. بخش ِ پادمتقارن (نسبت به متغیرها یِ دوم و سوم) ِ هموستار، مستقل از پایه است (به شرط ی که میدان-پایه یِ مختصاتی به کار رود). به این نرتیب، متناظر با هر نقطه یِ x یک میدان-پایه یِ

مختصاتی هست که هموستار را در x صفر میکند، اگر و تنها اگر هموستار ِ متناظر با یک میدان-پایه یِ مختصاتی، در نقطه یِ x متقارن باشد.

48 انتقال ِ موازی

یک خم ِ تانسری از نُع ِ (r,s) خم ی ست که در $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ مقدار میگیرد. مشتق ِ هموردا یِ چنین خم ی را هم ان طُر تعریف میکنم که مشتق ِ هموردا یِ یک خم در یک کلاف تعریف شد. مشتق ِ هموردا یِ خم ِ تانسری یِ T را با $\boldsymbol{\nabla} T$ نشان میدهم. دیده میشود اگر e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس و $\{(i,e^i)\mid i\}$ دُگان ِ آن باشد، و $\boldsymbol{\pi}$ افکنش ِ فضا یِ تانسرها بر خمینه باشد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla} T)^{i\cdots}{}_{\ldots j} &= \mathbf{D}\,T^{i\cdots}{}_{j\ldots}\\ &\quad+(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,l}\,T^{l\cdots}{}_{\ldots j}+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^l{}_{k\,j}\,T^{i\cdots}{}_{\ldots l})[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ T)]^k,\end{aligned}\tag{1824}$$

یا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} T &= \{\mathbf{D}\,T^{i\cdots}{}_{j\ldots}\\ &\quad+(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,l}\,T^{l\cdots}{}_{\ldots j}+\cdots\\ &\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^l{}_{k\,j}\,T^{i\cdots}{}_{\ldots l})[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ T)]^k\}e_i\otimes\cdots\otimes e^j.\end{aligned}\tag{1825}$$

رُشن است که اگر T یک خم ِ تانسری و $\mathfrak{r}$ یک تابع ِ بازپارامترش برا یِ آن باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}(T\circ\mathfrak{r}^{-1})=[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][(\boldsymbol{\nabla} T)\circ\mathfrak{r}^{-1}],\tag{1826}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathfrak{r}_*\,T)=\mathfrak{r}_*(\boldsymbol{\nabla} T).\tag{1827}$$

اگر T یک میدان ِ تانسری بر خمینه یِ $\mathbb{M}$، و γ یک خم در $\mathbb{M}$ باشد، $(T\circ\gamma)$ یک خم ِ

تانسری ست، و البته

$$\boldsymbol{\pi}\circ T\circ\gamma=\gamma. \tag{1828}$$

دیده میشود در این صورت،

$$[\boldsymbol{\nabla}(T\circ\gamma)](t)=[\boldsymbol{\nabla}_{(\mathbf{D}\,\gamma)(t)}\,T][\gamma(t)], \tag{1829}$$

یا مفصلتر

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}(T\circ\gamma)]^{i\cdots}{}_{\cdots j}(t)&=\{(\boldsymbol{\nabla}_k\,T)^{i\cdots}{}_{\cdots j}[\gamma(t)]\}(\mathbf{D}\,\gamma)^k(t),\\&=\Big([\mathbf{D}(T\circ\gamma)^{i\cdots}{}_{\cdots j}](t)\\&\quad+\{(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,l}\,T^{l\cdots}{}_{\cdots j}+\cdots\\&\quad-\cdots-\boldsymbol{\Gamma}^l{}_{k\,j}\,T^{i\cdots}{}_{\cdots l})[\gamma(t)]\}\{[\mathbf{D}(\boldsymbol{\pi}\circ T)]^k(t)\}\Big)\\&\quad\{(e_i\otimes\cdots\otimes e^j)[\gamma(t)]\}.\end{aligned} \tag{1830}$$

با یک میدان ِ تانسری و یک خم میشود یک خم ِ تانسری ساخت و از آن مشتق ِ هموردا گرفت. اما برا یِ این که از یک خم ِ تانسری مشتق ِ هموردا گرفته شود، کافی ست تانسر به ازا یِ نقاط ِ خم تعریف شده باشد.

T یک تانسر از نُع ِ (r,s) است و γ خم ی ست چنان که $\boldsymbol{\pi}(T)$ برابر با $\gamma(t_1)$ است. انتقال-ِ-افقی-یافته یِ T با γ از t_1 تا t_2، در $\boldsymbol{\pi}^{-1}[\gamma(t_2)]$ است. در مُرِد ِ تانسرها، به جا یِ انتقال ِ افقی عبارت ِ انتقال ِ موازی را به کار میبرند. رُشن است که تابع ِ انتقال-ِ-موازی با γ از t_1 تا t_2 خطی ست. انتقال-ِ-موازی-یافته یِ T با γ از t_1 تا t_2 را با $[\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(t_2,t_1)]\,T$ نشان میدهم. رُشن است که انتقال-ِ-موازی-یافته یِ T این ویژگیها را بر میئاورَد.

$$\boldsymbol{\pi}\circ\{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(\boldsymbol{.},t_1)]\,T\}=\gamma, \tag{1831}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(\boldsymbol{.},t_1)]\,T\}=0, \tag{1832}$$

$$\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(t_1,t_1)=\mathbf{1}. \tag{1833}$$

همچنین، رُشن است که اگر $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ باشد،

$$\boldsymbol{P}^{(r,s)}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t),\mathfrak{r}(t_1)]=\boldsymbol{P}^{(r,s)}_{\gamma}(t,t_1). \tag{1834}$$

رابطِها یِ (1831) و (1832) را میشود بدون ِ T هم نوشت:

$$\boldsymbol{\pi}\circ[\boldsymbol{P}^{(r,s)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]=\gamma, \tag{1835}$$

$$\boldsymbol{\nabla}[\boldsymbol{P}^{(r,s)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]=0. \tag{1836}$$

γ یک خم و Σ یک اسکالر است. از (1832) با $(r,s)=(0,0)$ نتیجه میشود

$$\mathbf{D}\{[\boldsymbol{P}^{(0,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\,\Sigma\}=0. \tag{1837}$$

از این، همراه با (1833) با $(r,s)=(0,0)$، نتیجه میشود

$$[\boldsymbol{P}^{(0,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\,\Sigma=\Sigma. \tag{1838}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{P}^{(0,0)}_{\gamma}(t_2,t_1)=\mathbf{1}. \tag{1839}$$

γ یک خم، u یک بردار، و σ یک همبردار است، چنان که $\boldsymbol{\pi}(\sigma)$ و $\boldsymbol{\pi}(u)$ با $\gamma(t_1)$ برابر َند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}\Big(\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\sigma\}\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]u\}\Big),\\
&=\boldsymbol{\nabla}\Big(\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\sigma\}\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]u\}\Big),\\
&=\Big(\boldsymbol{\nabla}\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\sigma\}\Big)\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]u\}\\
&\quad+\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]\sigma\}\Big(\boldsymbol{\nabla}\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(\boldsymbol{.},t_1)]u\}\Big),\\
&=0.
\end{aligned} \tag{1840}$$

به این ترتیب،

$$\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(t,t_1)]\sigma\}\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(t,t_1)]u\}=\{[\boldsymbol{P}^{(0,1)}_{\gamma}(t_1,t_1)]\sigma\}\{[\boldsymbol{P}^{(1,0)}_{\gamma}(t_1,t_1)]u\},$$

$$= \sigma(u). \tag{1841}$$

این نتیجه میدهد

$$[\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t,t_1)]^*[\boldsymbol{P}_\gamma^{(0,1)}(t,t_1)] = \mathbf{1}, \tag{1842}$$

یا

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_\gamma^{(0,1)}(t,t_1) &= \{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t,t_1)]^*\}^{-1},\\ &= \{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t,t_1)]^{-1}\}^*,\\ &= [\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t_1,t)]^*.\end{aligned} \tag{1843}$$

$\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}$ را با $\boldsymbol{P}_\gamma$ نشان میدهم. تعریف میکنم

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_\gamma^{(r,s)}(t_2,t_1) = [\boldsymbol{P}_\gamma(t_2,t_1)]^{\otimes r} \otimes \{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t_1,t_2)]^*\}^{\otimes s}. \tag{1844}$$

از لَیبنیتسی-بودن ِ مشتق ِ هموردا نسبت به حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری دیده میشود با گذاشتن ِ $\tilde{\boldsymbol{P}}_\gamma^{(r,s)}$ به جا یِ $\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}$ در (1832)، این رابطه براورده میشود. به سادِگی دیده میشود هم ین در باره یِ (1831) و (1833) هم درست است. پس، $\tilde{\boldsymbol{P}}_\gamma^{(r,s)}$ هم ان $\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}$ است:

$$\boldsymbol{P}_\gamma^{(r,s)}(t_2,t_1) = [\boldsymbol{P}_\gamma(t_2,t_1)]^{\otimes r} \otimes \{[\boldsymbol{P}_\gamma^{(1,0)}(t_1,t_2)]^*\}^{\otimes s}. \tag{1845}$$

به این ترتیب، انتقال- ِ-موازی برا یِ تانسرها یِ دلبخاه با انتقال- ِ-موازی برا یِ بردارها به طُر ِ کامل تعیین میشود.

انتقال ِ موازی حالت ِ خاص ی از انتقال ِ افقی ست. انتقال- ِ-موازی-یافته یِ یک بردار (یا کلیتر، یک تانسر) با یک خم ِ بسته ممکن است خُد ِ آن بردار (یا تانسر) شود یا نشود. میگویم خمینه تخت است، اگر انتقال ِ موازی با هر خم ِ بسته همانی باشد.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ خمی-همبند ِ تخت است. $P^{(r,s)}$ را عضو ی از $\mathsf{F}(\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M};\mathbb{M},\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M})$ تعریف میکنم که

$$[P^{(r,s)}(x,T)] \in [\mathrm{T}_x^{(r,s)}\mathbb{M}], \tag{1846}$$

و اگر خم ِ γ چنان است که

$$\gamma(t_1) = \boldsymbol{\pi}(T),$$
$$\gamma(t_2) = x, \tag{1847}$$

که $\boldsymbol{\pi}(T)$ مبنا یِ T است، آنگاه

$$\mathsf{P}^{(r,s)}(x,T) = \boldsymbol{P}_{\gamma}^{(r,s)}(t_2,t_1,T). \tag{1848}$$

چون طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا به فقط ابتدا و انتها یِ γ بستِگی دارد، $\mathsf{P}^{(r,s)}$ به شکل ِ بالا خُش-تعریف است. به $\mathsf{P}^{(r,s)}$ نگاشت ِ موازی میگویم. $\mathsf{P}^{(r,s)}(\boldsymbol{.},T)$ یک میدان ِ تانسری در $\mathbb{E}$ است. به سادِگی دیده میشود دیده میشود مشتق ِ هموردا یِ این میدان صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathsf{P}^{(r,s)}(\boldsymbol{.},T)] = 0. \tag{1849}$$

در واقع اینها حالت ِ خاص ِ هم ان چیزها یی یَند که برا یِ یک کلاف به طُر ِ کلی برقرار َند. فقط به جا یِ افقی موازی به کار میرود. به این ترتیب موازی-بودن ِ دُ تانسر در دُ نقطه مستقل از خم ی که این دُنقطه را به هم وصل میکند تعریف میشود. میگویم T_2 که در $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ است با T_1 که در $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ است موازی ست، اگر

$$T_2 = \mathsf{P}^{(r,s)}[\boldsymbol{\pi}(T_2),T_1]. \tag{1850}$$

درست مثل ِ حالت ِ کلی یِ کلافها، دیده میشود موازی-بودن یک رابطه یِ همئرزی ست. اینجا هم رده یِ همئرزی یِ متناظر با T را با $\mathbb{M}_T^{\mathsf{P}}$ نشان میدهم:

$$\mathbb{M}_T^{\mathsf{P}} = \{\mathsf{P}^{(r,s)}(x,T) \mid x \in \mathbb{M}\}. \tag{1851}$$

رُشن است که

$$[\mathsf{P}^{(r,s)}(\boldsymbol{.},T)] \in [\mathsf{F}(\mathbb{M}_T^{\mathsf{P}};\mathbb{M})]. \tag{1852}$$

به این ترتیب، باز مثل ِ کلافها یِ کلی دیده میشود اگر خمینه خمی-همبند و تخت باشد، $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ بدیهی ست، یعنی با $\mathbb{M}\times\{(\mathbb{R}^m)^{\otimes r}\otimes[(\mathbb{R}^m)^*]^{\otimes s}\}$ همانریخت است، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. از جمله اگر خمش صفر و $\mathbb{M}$ ساده-همبند باشد، آنگاه $\mathrm{T}^{(r,s)}\mathbb{M}$ بدیهی ست.

از (1845) دیده میشود تابع ِ انتقال- ِ-موازی برا یِ تانسرها یِ دلبخاه با تابع ِ انتقال- ِ-موازی برا یِ بردارها تعیین میشود. به سادگی دیده میشود برا یِ نگاشت ِ موازی هم چنین رابطه ای برقرار است:

$$\mathsf{res}[P^{(0,1)}(x_2,\cdot);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]=\{\mathsf{res}[P^{(1,0)}(x_2,\cdot);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]\}^*. \tag{1853}$$

$$\mathsf{res}[P^{(r,s)}(x_2,\cdot);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]=\{\mathsf{res}[P^{(1,0)}(x_2,\cdot);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]\}^{\otimes r}\otimes\{\mathsf{res}[P^{(0,1)}(x_2,\cdot);\boldsymbol{\pi}^{-1}(x_1)]\}^{\otimes s}. \tag{1854}$$

$P^{(1,0)}$ را با P نشان میدهم.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ خمی-همبند ِ تخت است. $e(x_0)$ را یک پایه یِ $\mathrm{T}_{x_0}\mathbb{M}$ میگیرم، که x_0 در $\mathbb{M}$ است. مثل ِ کلافها یِ تخت در حالت ِ کلی، متناظر با هر x در $\mathbb{M}$، تعریف میکنم

$$e_i(x)=P[x,e_i(x_0)]. \tag{1855}$$

رُشن است که $e(x)$ یک پایه برا یِ $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است، و رُشن است که مشتق ِ هموردا یِ هر یک از e_i ها صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}\,e_i=0. \tag{1856}$$

از این نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\Gamma}(e)=0. \tag{1857}$$

به این ترتیب، متناظر با خمینه ای که تخت و خمی-همبند باشد، یک میدان-پایه هست که مشتق ِ هموردا یَش صفر است، یعنی مقدار ِ هر عضو َش در هر نقطه از خمینه-یِ-پایه انتقال- ِ-موازی-یافته یِ مقدار ِ هم ین عضو از هر نقطه یِ دیگر ِ خمینه است، و این یعنی هموستار ِ متناظر با این میدان-پایه صفر است. باز معلوم است که اگر خمینه مُضعَن تخت باشد (یعنی اگر خمش صفر باشد)، مُضعَن چنین میدان-پایه ای هست. اگر خمینه تخت باشد ولی خمی-همبند نباشد هم، میشود در هر

مئلفه یِ همبندی یِ خمینه یک میدان-پایه ساخت که مشتق ِ هموردا یَش صفر است. البته در این حالت چنین میدان-پایه ای به طُر ِ یکتا با مقدار َش در یک نقطه تعیین نمیشود.

البته حتا اگر خمینه همبند و سراسری-تخت باشد هم، میدان-پایه ای که هموستار ِ متناظر با آن صفر است، لزومَن مختصاتی نیست: از صفربودن ِ $\mathbf{\Gamma}(e)$ چیز ی در باره یِ $e_i \diamond e_j$ نتیجه نمیشود.

49 انتقال- ِ-موازی یِ خمها

γ_1 و γ_2 خمها یی یَند که در پارامترها یِ، به ترتیب، s_1 و s_2 یکدیگر را قطع میکنند:

$$\gamma_2(s_2) = \gamma_1(s_1). \tag{1858}$$

تابع ِ $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ با دامنه یِ $[\mathsf{dom}(\gamma_1)] \times [\mathsf{dom}(\gamma_2)]$ را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2} = 0, \tag{1859}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(s_1,\cdot) = \gamma_2, \tag{1860}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\cdot,s_2) = \gamma_1. \tag{1861}$$

اینها یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل با شرطها یِ مرزی یَند. با یک نقشه یِ ϕ، و با تعریف ِ

$$x^i = \phi^j \circ \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}, \tag{1862}$$

دستگاه ِ معادلات ِ (1859) میشود

$$\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,x^i + [(\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k} \circ \phi^{-1})(x)][\mathbf{D}_{(1)}\,x^j][\mathbf{D}_{(2)}\,x^k] = 0. \tag{1863}$$

از وجود و یکتایی یِ جواب ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ (1859) با شرایط ِ مرزی یِ (1860) و (1861) نتیجه میشود $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ با (1859) تا (1861) خُش-تعریف است. به $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,\cdot)$ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ γ_2 در s_2 با γ_1 از s_1 تا t_1 میگویم. دیده میشود $[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](\cdot,t_2)$ یک خم ِ برداری ست که مشتق ِ هموردا یَش صفر است. ضمنَن $[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,t_2)$ مماس بر $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,\cdot)$ به ازا یِ پارامتر ِ t_2 است. $[\mathbf{D}_{(1)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,t_2)$ هم مماس بر $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\cdot,t_2)$ به ازا یِ پارامتر ِ t_1 است. اما مشتق ِ هموردا یِ $[\mathbf{D}_{(1)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,\cdot)$ لزومَن صفر نیست.

از این که مشتق ِ هموردا یِ $[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](\text{۰},t_2)$ صفر است، همراه با شرایط ِ مرزی، دیده میشود

$$[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,t_2)=[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},t_2)}(t_1,s_1)],[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(t_2)],\qquad(1864)$$

یعنی بردار ِ $\{[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,t_2)\}$ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ بردار ِ $[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(t_2)]$ با خم ِ $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},t_2)]$ از s_1 تا t_1 است. از جمله رُشن است که

$$[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,s_2)=[\boldsymbol{P}_{\gamma_1}(t_1,s_1)][(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2)].\qquad(1865)$$

یعنی $\{[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}](t_1,s_2)\}$ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ $[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2)]$ با خم ِ γ_1 از s_1 تا t_1 است.

با (1864) و حالت ِ خاص َش (1865)، یک تصویر برا یِ $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ به دست میئاید: با خم ِ γ_1 شروع میکنم، که هم ان $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},s_2)$ است. $[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2)]$ را با این خم انتقال- ِ-موازی میدهم. برا یِ رسیدن به $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,s_2+\mathfrak{h})]$ (که $\mathfrak{h}$ کوچک است)، نقطه یِ $\gamma_1(t_1)$ را، که هم ان $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,s_2)]$ است، به اندازه یِ $\mathfrak{h}$ با انتقال- ِ-موازی-یافته یِ $[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2)]$ جابِجا میکنم. یعنی

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,s_2+\mathfrak{h})]^i\approx{}&[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,s_2)]^i\\&+\mathfrak{h}\,\{[\boldsymbol{P}_{\gamma_1}(t_1,s_1)][(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2)]\}^i.\qquad(1866)\end{aligned}$$

حالا $[(\mathbf{D}\,\gamma_2)(s_2+\mathfrak{h})]$ را با $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},s_2+\mathfrak{h})]$ انتقال- ِ-موازی میدهم. با استفاده از خم ِ برداری یِ حاصل، از $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},s_2+\mathfrak{h})]$ به $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},s_2+2\,\mathfrak{h})]$ میروم. با تکرار ِ این روش $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ ساخته میشود:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,t_2+\mathfrak{h})]^i\approx{}&[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,t_2)]^i\\&+\mathfrak{h}\,\{[\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\text{۰},t_2)}(t_1,s_1)][(\mathbf{D}\,\gamma_2)(t_2)]\}^i.\quad(1867)\end{aligned}$$

γ_1 و γ_2 خمها یی یَند که در پارامترها یِ، به ترتیب، s_1 و s_2 یکدیگر را قطع میکنند، یعنی (1858) را بر میئاورند. $\mathfrak{r}_1$ و $\mathfrak{r}_2$ چنان َند که $\mathfrak{r}_i$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ_i است. رُشن است که

$$[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2][\mathfrak{r}_2(s_2)]=[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1][\mathfrak{r}_1(s_1)].\qquad(1868)$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
&\forall(t_1,t_2)\in\{[\mathsf{dom}(\gamma_1)]\times[\mathsf{dom}(\gamma_2)]\}:\\
&\qquad\Big(\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}\circ(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)\}\Big)(t_1,t_2),\\
&\qquad=[(\mathbf{D}\,\mathfrak{r}_1)(t_1)][(\mathbf{D}\,\mathfrak{r}_2)(t_2)]\\
&\qquad\quad\{\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}\}[\mathfrak{r}_1(t_1),\mathfrak{r}_2(t_2)],\\
&\qquad=0,
\end{aligned}\tag{1869}$$

و البته

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}\circ(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)\}(s_1,\cdot)&=[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2]\circ\mathfrak{r}_2,\\
&=\gamma_2,
\end{aligned}\tag{1870}$$

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}\circ(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)\}(\cdot,s_2)&=[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1]\circ\mathfrak{r}_1,\\
&=\gamma_1.
\end{aligned}\tag{1871}$$

اینها نتیجه میدهند

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}\circ(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2},\tag{1872}$$

یا

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[(\mathfrak{r}_1)_*\,\gamma_1],[(\mathfrak{r}_2)_*\,\gamma_2],[\mathfrak{r}_1(s_1)],[\mathfrak{r}_2(s_2)]}=(\mathfrak{r}_1\times\mathfrak{r}_2)_*\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2},\tag{1873}$$

چون دُ-طرف معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی با شرایط ِ مرزی یِ یکسان را بر میئاورند. به این ترتیب، انتقال- ِ-موازی-یافته یِ یک خم با یک خم ِ دیگر، مستقل از پارامترش است.

γ_1 و γ_2 خمها یی یَند که در پارامترها یِ، به ترتیب، s_1 و s_2 یکدیگر را قطع میکنند، یعنی (1858) را بر میئاورند. رُشن است که $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\cdot,t_2')]$ و $[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\cdot)]$ خمها یی یَند که در پارامترها یِ به ترتیب t_1' و t_2' یکدیگر را قطع میکنند. نشان میدهم

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\cdot,t_2')],[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\cdot)],t_1',t_2'}=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}.\tag{1874}$$

برا ی ِ اثبات، کافی ست توجه شود که

$$\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\boldsymbol{\cdot},t_2')],[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\boldsymbol{\cdot})],t_1',t_2'}=0, \tag{1875}$$

یعنی دُ-طرف ِ (1874) معادله-ی ِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی را بر میئاورند. همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\boldsymbol{\cdot},t_2')],[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\boldsymbol{\cdot})],t_1',t_2'}(t_1',\boldsymbol{\cdot})&=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\boldsymbol{\cdot}),\\ \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\boldsymbol{\cdot},t_2')],[\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1',\boldsymbol{\cdot})],t_1',t_2'}(\boldsymbol{\cdot},t_2')&=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(\boldsymbol{\cdot},t_2'),\end{aligned} \tag{1876}$$

که یعنی دُ-طرف ِ (1874) شرایط ِ مرزی ی ِ یکسان ی را بر میئاورند. پس دُ-طرف ِ (1874) با هم برابر اند.

برا ی ِ تعریف ِ انتقال- ِ-موازی-یافته ی ِ یک خم با خم ِ دیگر، باید از یک خم (در خمینه-ی ِ-پایه ی ِ کلاف ِ مماس) یک خم در خُد ِ کلاف ِ مماس ساخته شود. ساختن ِ یک خم در فضا ی ِ مماس از رو ی ِ یک خم در خمینه (ی ِ پایه) با مشتقگیری انجام میشود و ساختار ِ جدید ی لازم ندارد. در یک کلاف ِ دلبخاه، برا ی ِ ساختن ِ یک خم در کلاف ِ $\mathbb{E}$ با خمینه-ی ِ-پایه ی ِ $\mathbb{M}$ از رو ی ِ یک خم در خمینه-ی ِ-پایه یک ساختار لازم است، که مثلَن به هر بردار در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ یک عضو ِ $\mathbb{E}_x$ نسبت بدهد. به هم ین خاطر در حالت ِ کلی تعریف ِ انتقال- ِ-موازی ی ِ یک خم با یک خم ِ دیگر خاص ِ هموستار ی ست که برا ی ِ میدانها ی ِ برداری تعریف میشود. به زبان ِ مئلفِها، (1863) وقت ی معنی دارد که سه شاخص ِ هموستار همه از یک نُع باشند. البته اگر $\mathfrak{F}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathrm{T}\mathbb{M})$ باشد، چنان که

$$\mathfrak{F}(\mathrm{T}_x\mathbb{M})\subseteq\mathbb{E}_x, \tag{1877}$$

آنگاه میشود مانسته ی ِ (1859) را

$$\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\{\mathfrak{F}[\mathbf{D}_{(2)}\,\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}]\}=0, \tag{1878}$$

گرفت. اما در حالت ِ کلی این تعریف برا ی ِ $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ ویژگی ی ِ استقلال از پارامترش (ِ خم ِ γ_2) را ندارد: وقت ی γ_2 با بازپارامتریده شود، $[\mathbf{D}_{(2)}\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}]$ در یک عدد (تابع ِ پارامتر ِ γ_2) ضرب میشود. (1878) ویژگی ی ِ استقلال-از-پارامترش (ِ خم ِ γ_2) را میداشت اگر این عدد از $\mathfrak{F}$ بیرون میئامد، یعنی اگر به ازا ی ِ هر x در خمینه و هر بردار ِ u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و هر اسکالر ِ α،

$$\mathfrak{F}(\alpha\,u)=\alpha\,\mathfrak{F}(u). \tag{1879}$$

در حالت ِ کلی طرف ِ راست ِ (1879) تعریف نشده است. طرف ِ راست ِ (1879) تعریف شده است، اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری باشد، و (1879) برقرار است اگر به ازا یِ هر x تحدید ِ $\mathfrak{F}$ به $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ خطی باشد.

50 ژُندزیک

$\mathbb{M}$ یک خمینه است، که در آن یک هموستار تعریف شده. γ یک خم در $\mathbb{M}$ است. رُشن است که به ازا یِ هر مقدار ِ s در دامنه یِ این خم، $\gamma(s)$ با $\gamma(s)$ برابر است. پس میشود γ را با خُد َش انتقال- ِموازی داد. یعنی اگر s و t_1 و t_2 در دامنه یِ γ باشند، $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}(t_1,t_2)$ خُش-تعریف است. در حالت ِ کلی، تصویر ِ $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}$ زیرمجموعه یِ تصویر ِ γ نیست. میگویم γ ژُندزیک است، اگر یک تابع ِ هموار ِ $\mathfrak{f}$ باشد که دامنه اَش زیرمجموعه یِ $[\mathsf{dom}(\gamma)]^{\times 3}$ و تصویر َش شامل ِ $[\mathsf{dom}(\gamma)]$ است، چنان که

$$\{\forall(t_2,s)\in[\mathsf{dom}(\gamma)]^{\times 2}\}\ :\qquad \mathfrak{f}(s,t_2,s)=t_2, \tag{1880}$$

$$\{\forall(t_1,s)\in[\mathsf{dom}(\gamma)]^{\times 2}\}\ :\qquad \mathfrak{f}(t_1,s,s)=t_1, \tag{1881}$$

$$\{\forall(t_1,t_2,s)\in\mathfrak{f}^{-1}[\mathsf{dom}(\gamma)]\}\ :\quad \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}(t_1,t_2)=(\gamma\circ\mathfrak{f})(t_1,t_2,s). \tag{1882}$$

رُشن است که اگر γ ژُندزیک باشد، تصویر ِ $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}$ زیرمجموعه یِ تصویر ِ γ است.

از (1880) و (1881) دیده میشود اگر γ ژُندزیک باشد،

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}(s,\cdot)=\gamma. \tag{1883}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}(\cdot,s)=\gamma. \tag{1884}$$

البته اینها حالتها یِ خاص ِ رابطِها یی یَند که برا یِ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ یک خم با یک خم ِ دیگر برقرار َند.

نشان میدهم ژُندزیک-بودن ِ یک خم به پارامترش بستِگی ندارد. برا یِ این کار، گیرم خم ِ γ ژُندزیک است، و $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ است. $\{[\mathfrak{r}^{-1}(t_1)],[\mathfrak{r}^{-1}(t_2)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]\}$ را در

$\mathfrak{f}^{-1}[\mathsf{dom}(\gamma)]$ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(\mathfrak{r}_*\,\gamma),(\mathfrak{r}_*\,\gamma),s,s}(t_1,t_2) &= \boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,[\mathfrak{r}^{-1}(s)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]}\{[\mathfrak{r}^{-1}(t_1)],[\mathfrak{r}^{-1}(t_2)]\},\\ &= (\gamma\circ\mathfrak{f})\{[\mathfrak{r}^{-1}(t_1)],[\mathfrak{r}^{-1}(t_2)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]\},\\ &= [(\mathfrak{r}_*\,\gamma)\circ\mathfrak{f}'](t_1,t_2,s),\end{aligned}\tag{1885}$$

که تعریف شده

$$\mathfrak{f}' = \mathfrak{r}\circ(\mathfrak{r}\times\mathfrak{r}\times\mathfrak{r})_*\,\mathfrak{f},\tag{1886}$$

یعنی

$$\mathfrak{f}'(t_1,t_2,s) = (\mathfrak{r}\circ\mathfrak{f})\{[\mathfrak{r}^{-1}(t_1)],[\mathfrak{r}^{-1}(t_2)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]\}.\tag{1887}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}'(s,t_2,s) &= (\mathfrak{r}\circ\mathfrak{f})\{[\mathfrak{r}^{-1}(s)],[\mathfrak{r}^{-1}(t_2)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]\},\\ &= t_2,\end{aligned}\tag{1888}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}'(t_1,s,s) &= (\mathfrak{r}\circ\mathfrak{f})\{[\mathfrak{r}^{-1}(t_1)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)],[\mathfrak{r}^{-1}(s)]\},\\ &= t_1.\end{aligned}\tag{1889}$$

به این ترتیب دیده میشود $\mathfrak{f}'$ ویژِگیها یِ (1880) تا (1882) را دارد، که این نشان میدهد $(\mathfrak{r}_*\,\gamma)$ ژئُدزیک است.

گیرم γ ژئُدزیک است. از (1882) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}0 &= \boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}(\gamma\circ\mathfrak{f}),\\ &= \boldsymbol{\nabla}_{(1)}\{[\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}]\,[(\mathbf{D}\,\gamma)\circ\mathfrak{f}]\},\\ &= [\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}][(\mathbf{D}\,\gamma)\circ\mathfrak{f}] + [\mathbf{D}_{(1)}\,\mathfrak{f}][\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}][(\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma)\circ\mathfrak{f}].\end{aligned}\tag{1890}$$

از (1881) و (1880) دیده میشود

$$[\mathbf{D}_{(1)}\,\mathfrak{f}](s,s,s)=1, \tag{1891}$$

$$[\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}](s,s,s)=1. \tag{1892}$$

رابطه یِ (1890) را در $t_2=t_1=s$ مینویسم:

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{D}\,\gamma+\mathfrak{k}\,\mathbf{D}\,\gamma=0, \tag{1893}$$

که $\mathfrak{k}$ تابع ی با دامنه یِ $\mathsf{dom}(\gamma)$ است، چنان که

$$\mathfrak{k}(t)=[\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}](t,t,t). \tag{1894}$$

$\mathfrak{r}$ را یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ برا یِ γ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}(\mathfrak{r}_*\,\gamma)&=\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1}),\\&=\boldsymbol{\nabla}\left[\left(\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{r}}\,\mathbf{D}\,\gamma\right)\circ\mathfrak{r}^{-1}\right],\\&=\left[\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{r}}\,\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{r}}\,\mathbf{D}\,\gamma\right)\right]\circ\mathfrak{r}^{-1},\\&=\left[-\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^3}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(\mathbf{D}\,\gamma)+\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^2}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma)\right]\circ\mathfrak{r}^{-1},\\&=-\left\{\left[\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^3}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r})+\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^2}\,\mathfrak{k}\right](\mathbf{D}\,\gamma)\right\}\circ\mathfrak{r}^{-1},\end{aligned} \tag{1895}$$

که در برابری یِ آخر (1893) به کار رفته. میشود $\mathfrak{r}$ را چنان گرفت که طرف ِ راست ِ (1895) صفر شود. برا یِ این،

$$\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{r}}\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r}+\mathfrak{k}=0, \tag{1896}$$

یا

$$\mathbf{D}\,\mathfrak{r}=\mathfrak{a}\,\exp\{-[\mathbf{I}(\boldsymbol{\cdot},s)]\,\mathfrak{k}\}, \tag{1897}$$

که $\mathbf{I}(t,s)$ انتگرالگیری از s تا t است، و $\mathfrak{a}$ یک ثابت ِ ناصفر ِ دلبخاه است. رابطه یِ (1897) همئرز است با

$$\mathfrak{r}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\,[\mathbf{I}(\boldsymbol{\cdot},s)]\Big(\exp\{-[\mathbf{I}(\boldsymbol{\cdot},s)]\,\mathfrak{k}\}\Big), \tag{1898}$$

که $\mathfrak{b}$ هم یک ثابت ِ دلبخاه است. $\mathfrak{r}$ را چنان میگیرم که (1896) براورده شود. در این صورت،

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}(\mathfrak{r}_*\,\gamma) = 0. \tag{1899}$$

تابع ِ μ را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{aligned}\mathsf{dom}(\mu) &= \{(t_1, t_2, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (t_1 + t_2 - s) \in [\mathsf{dom}(\mathfrak{r}_*\,\gamma)]\},\\ \mu(t_1, t_2, s) &= (\mathfrak{r}_*\,\gamma)(t_1 + t_2 - s).\end{aligned} \tag{1900}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\mu](t_1, t_2, s) &= [\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}(\mathfrak{r}_*\,\gamma)](t_1 + t_2 - s),\\ &= 0,\end{aligned} \tag{1901}$$

$$\mu(s, t_2, s) = (\mathfrak{r}_*\,\gamma)(t_2), \tag{1902}$$

$$\mu(t_1, s, s) = (\mathfrak{r}_*\,\gamma)(t_1). \tag{1903}$$

اینها نتیجه میدهند

$$\mu(t_1, t_2, s) = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{(\mathfrak{r}_*\,\gamma),(\mathfrak{r}_*\,\gamma),s,s}(t_1, t_2), \tag{1904}$$

یا

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{(\mathfrak{r}_*\,\gamma),(\mathfrak{r}_*\,\gamma),s,s}(t_1, t_2) = (\mathfrak{r}_*\,\gamma)(t_1 + t_2 - s), \tag{1905}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma,\gamma,s,s}(t_1, t_2) = \gamma\{\mathfrak{r}^{-1}[\mathfrak{r}(t_1) + \mathfrak{r}(t_2) - \mathfrak{r}(s)]\}. \tag{1906}$$

دیده شد اگر γ ژئُدزیک باشد، یک $\mathfrak{k}$ هست چنان که (1893) برقرار است. برعکس، گیرم γ چنان است که یک $\mathfrak{k}$ هست که (1893) برقرار است. نشان میدهم در این صورت γ ژئُدزیک است. برا ی ِ این کار $\mathfrak{r}$ را چنان میگیرم که (1896) براورده شود. رُشن است که (1899) برقرار است، و از آنجا نتیجه میشود (1906) برقرار است. تعریف میکنم

$$\mathfrak{f}(t_1, t_2, s) = \mathfrak{r}^{-1}[\mathfrak{r}(t_1) + \mathfrak{r}(t_2) - \mathfrak{r}(s)]. \tag{1907}$$

دیده میشود (1882) برقرار است. پس γ ژئُدزیک است. همچنین دیده میشود

$$[\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}](t_1,s,s) = \{[\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})][\mathfrak{r}(t_1)]\}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(s)],$$
$$= \frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t_1)}[(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(s)], \tag{1908}$$

و از آنجا،

$$[\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\mathfrak{f}](s,s,s) = -\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(s)}[(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(s)], \tag{1909}$$

که نشان میدهد (1894) برقرار است.

به این ترتیب، شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که γ ژئُدزیک باشد این است که یک $\mathfrak{k}$ باشد چنان که (1893) برقرار باشد. یعنی γ ژئُدزیک است، اگر و تنها اگر $(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{D}\,\gamma)$ با $(\mathbf{D}\,\gamma)$ موازی باشد. این را میشود یک تعریف ِ جدید برا یِ ژئُدزیک گرفت، که البته با تعریف ِ قبلی همئرز است: میگوییم خم ِ γ ژئُدزیک است، اگر مشتق ِ هموردا یِ مشتق ِ γ با مشتق ِ γ موازی باشد. با تعریف ِ $x^i := \phi^i \circ \gamma$، که ϕ یک نقشه است، شکل ِ مختصاتی یِ معادله یِ ژئُدزیک میشود

$$\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,x^i + [\Gamma^i{}_{j\,k}(\gamma)](\mathbf{D}\,x^j)(\mathbf{D}\,x^k) + \mathfrak{k}\,\mathbf{D}\,x^i = 0. \tag{1910}$$

ژئُدزیک-بودن ِ یک خم مستقل از پارامترش است، پس میشود آن را برا یِ خمها یِ مستقل-از-پارامتر تعریف کرد. اما این که مشتق ِ هموردا یِ مشتق ِ یک خم صفر شود به پارامترش بستِگی دارد. به پارامترش ی برا یِ یک ژئُدزیک که چنین ویژِگی یی دارد یک پارامترش ِ آفین میگویند. یا به خُد ِ پارامتر، یک پارامتر ِ آفین میگویند. از (1898) دیده میشود همواره میشود برا یِ یک ژئُدزیک یک پارامترش ِ آفین یافت، و این پارامترش یکتا نیست. در واقع دیده میشود اگر γ یک ژئُدزیک با پارامترش آفین باشد، $(\mathfrak{r}_*\,\gamma)$ یک ژئُدزیک با پارامترش آفین است، اگر و تنها اگر تابع- ِ-بازپارامترش ِ $\mathfrak{r}$ دست- ِ-بالا خطی (و البته ناثابت) باشد، یعنی

$$\mathfrak{r}(t) = \mathfrak{a}\,t + \mathfrak{b}, \tag{1911}$$

که $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابت َند و $\mathfrak{a}$ ناصفر است.

x یک نقطه در خمینه یِ $\mathbb{M}$، و u یک بردار در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. نشان میدهم یک و فقط یک خم ِ مستقل-از-پارامتر هست که ژئُدزیک است، از x میگذرد و در این نقطه مشتق َش با u موازی ست.

برا یِ اثبات، کافی ست توجه شود که

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\mu = 0, \tag{1912}$$

یک دستگاه ِ معادلات ِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ 2 است، که با شرایط ِ اولیه یِ

$$\mu(0) = x, \tag{1913}$$

$$(\mathbf{D}\,\mu)(0) = u, \tag{1914}$$

یک و فقط یک جواب دارد. دیده میشود μ یک خم ِ ژئُدزیک با یک پارامترش ِ آفین است، که از x میگذرد و در این نقطه مشتق َش با u موازی ست. این وجود ِ جواب را نشان میدهد. برا یِ اثبات ِ یکتایی، نشان میدهم هر ژئُدزیک ی که از x بگذرد و در این نقطه مشتق َش با u موازی باشد، یک بازپارامتریده یِ μ است. برهان این است که اگر γ یک خم ِ ژئُدزیک باشد که از x میگذرد و در این نقطه مشتق َش با u موازی ست، آنگاه یک تابع- ِ-بازپارامترش ِ $\mathfrak{r}$ برا یِ γ هست که (1899) براورده میشود، و عددها یِ s و α هستند که α ناصفر است و

$$(\mathfrak{r}_*\,\gamma)(s) = x, \tag{1915}$$

$$[\mathbf{D}(\mathfrak{r}_*\,\gamma)](s) = \alpha\,u. \tag{1916}$$

$\mathfrak{r}'$ را با

$$\mathfrak{r}'(t) = \alpha(t-s) \tag{1917}$$

تعریف میکنم. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}[(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})_*\,\gamma] = 0, \tag{1918}$$

$$[(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})_*\,\gamma](0) = x, \tag{1919}$$

$$\{\mathbf{D}[(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})_*\,\gamma]\}(0) = u. \tag{1920}$$

پس $[(\mathfrak{r}'\circ\mathfrak{r})_*\,\gamma]$ و μ معادله یِ یکسان ی را برمیئاورند، و شرایط ِ اولیه یِشان هم یکسان است. در نتیجه با هم برابر َند. یعنی γ یک بازپارامتریده یِ μ است.

اینجا هم دیده میشود تعریف ِ ژئُدزیک به این شکل، خاص ِ هموستار ی ست که برا یِ میدانها یِ تانسری تعریف میشود. به زبان ِ مئلفِها، معادله یِ (1910) وقت ی معنی دارد که هر-سه-شاخص ِ هموستار از یک نُع باشند. برا یِ یک کلاف ِ دلبخاه ِ $\mathbb{E}$، گیرم یک $\mathfrak{F}$ در $\mathsf{F}(\mathbb{E};\mathrm{T}\mathbb{M})$ هست، چنان که

$$\mathfrak{F}(\mathrm{T}_x\mathbb{M}) \subseteq \mathbb{E}_x. \tag{1877}$$

در این صورت $\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)$ خم ی در $\mathbb{E}$ است. اما در حالت ِ کلی وجود ِ $\mathfrak{F}$ ی که (1877) را براورَد برا یِ نوشتن ِ مانسته یِ معادله یِ (1893) کافی نیست: $\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)]$ در $\mathrm{T}_{\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)}\mathbb{E}_\gamma$ است. در حال ی که $\mathbf{D}\,\gamma$ در $\mathrm{T}_\gamma\mathbb{M}$، و $\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)$ در $\mathbb{E}_\gamma$ است. اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری باشد، $\mathrm{T}_{\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)}\mathbb{E}_\gamma$ با $\mathbb{E}_\gamma$ یکریخت است. در این حالت مانسته یِ (1893) را میشود چنین نوشت.

$$\boldsymbol{\nabla}[\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma)] + \mathfrak{k}\,\mathfrak{F}(\mathbf{D}\,\gamma) = 0. \tag{1921}$$

این تعریف هم، در حالت ِ کلی ویژِگی یِ استقلال-از-پارامترش ِ تعریف ِ ژئُدزیک را ندارد. این ویژِگی وجود میداشت اگر به ازا یِ هر x در خمینه و هر بردار ِ u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ و هر اسکالر ِ α،

$$\mathfrak{F}(\alpha\,u) = \alpha\,\mathfrak{F}(u). \tag{1879}$$

به این ترتیب، (1921) بامعنی ست اگر $\mathbb{E}$ یک کلاف ِ برداری باشد، و مستقل از پارامترش است اگر به ازا یِ هر x تحدید ِ $\mathfrak{F}$ به $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ خطی باشد.

51 پیچش

مشتق ِ هموردا یِ یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ $(r,s+1)$ است. از جمله مشتق ِ هموردا یِ یک میدان ِ تانسری یِ هموردا یک میدان ِ تانسری یِ هموردا ست. اما مشتق ِ هموردا یِ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل، هر چند یک میدان ِ تانسری یِ هموردا از نُع ِ $(0,s+1)$ است پادمتقارن نیست، پس یک $(s+1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل نیست. با استفاده از مشتق ِ هموردا، عملگر ِ $\boldsymbol{\delta}$ (مشتق- ِ-هموردا یِ برونی) را چنان تعریف میکنم که اثر َش بر یک s فرم- ِ-دیفرانسیل، یک $(s+1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\boldsymbol{\delta}\,\sigma = (s+1)\mathrm{aSym}(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma). \tag{1922}$$

این رامیشود چنین نوشت

$$\boldsymbol{\delta}\,\sigma = \frac{1}{s!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+1}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma), \tag{1923}$$

که $\mathcal{S}_n$ مجموعه یِ جایگشتها یِ n تایی ست. به این ترتیب اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل بر خمینه یِ $\mathbb{M}$ باشد و u_1 تا u_{s+1} بردارها یی در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشند،

$$\begin{aligned}
&[(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)(x)](u_1,\dots,u_{s+1}),\\
&= \frac{1}{s!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+1}} \mathsf{sgn}_{\mathfrak{p}}[(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma)(x)][u_{\mathfrak{p}^{-1}(1)},\dots,u_{\mathfrak{p}^{-1}(s+1)}],\\
&= \sum_{j=1}^{s+1}(-1)^{j-1}[(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma)(x)](u_j,u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_{s+1}),\\
&= \sum_{j=1}^{s+1}(-1)^{j-1}[(\boldsymbol{\nabla}_{u_j}\,\sigma)(x)](u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_{s+1}).
\end{aligned} \tag{1924}$$

به سادِگی دیده میشود $\boldsymbol{\delta}$ خطی ست. همچنین، دیده میشود اگر e یک میدان-پایه باشد،

$$\boldsymbol{\delta}\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)_{i_1\cdots i_s}\,e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}. \tag{1925}$$

باز-شده یِ این میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\,\sigma = \frac{1}{s!}\,&\left(\mathbf{D}_i\,\sigma_{i_1\cdots i_s} - \sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{\Gamma}^k{}_{i\,i_j}\,\sigma_{i_1\cdots i_{j-1}\,k\,i_{j+1}\cdots i_s}\right)\\
&e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}.
\end{aligned} \tag{1926}$$

از جمله،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\,e^i &= -\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k}\,e^j\wedge e^k,\\
&= -\boldsymbol{\Gamma}^i{}_k\wedge e^k.
\end{aligned} \tag{1927}$$

σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل، و τ یک r فرم- ِ-دیفرانسیل است. مجموعه یِ جایگشتها یِ l تایی یی که 1 را تغییر نمیدهند را با $\mathcal{S}_{l\setminus 1}$ نشان میدهم. جایگشت ِ l تایی یِ $\mathfrak{c}_l$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{c}_l(j) = \begin{cases} l, & j=1\\ j-1, & j\neq 1\end{cases}. \tag{1928}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}(\sigma\wedge\tau) &= \frac{1}{(s+r)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}[\boldsymbol{\nabla}(\sigma\wedge\tau)],\\
&= \frac{1}{[(s+r)!](s!)(r!)}\sum_{\substack{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}\\ \mathfrak{q}\in\mathcal{S}_{s+r+1\setminus 1}}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}\,\mathsf{aPer}_{\mathfrak{q}}[\boldsymbol{\nabla}(\sigma\otimes\tau)],\\
&= \frac{1}{[(s+r)!](s!)(r!)}\sum_{\substack{\mathfrak{p}'\in\mathcal{S}_{s+r+1}\\ \mathfrak{q}\in\mathcal{S}_{s+r+1\setminus 1}}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}'}[\boldsymbol{\nabla}(\sigma\otimes\tau)],\\
&= \frac{1}{(s!)(r!)}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}[\boldsymbol{\nabla}(\sigma\otimes\tau)],\\
&= \frac{1}{(s!)(r!)}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}\{(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma)\otimes\tau+(-1)^s\,\mathsf{aPer}_{\mathfrak{c}_{s+1}}\,[\sigma\otimes(\boldsymbol{\nabla}\,\tau)]\},\\
&= \frac{1}{[(s+1)!](r!)}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}} \mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}[(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)\otimes\tau]\\
&\quad+\frac{1}{(s!)[(r+1)!]}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{s+r+1}} (-1)^s\,\mathsf{aPer}_{\mathfrak{p}}\,\mathsf{aPer}_{\mathfrak{c}_{s+1}}[\sigma\otimes(\boldsymbol{\delta}\,\tau)]\}. \qquad (1929)
\end{aligned}$$

به این ترتیب معلوم میشود اگر σ و τ فرم- ِ-دیفرانسیل باشند،

$$\boldsymbol{\delta}(\sigma\wedge\tau) = (\boldsymbol{\delta}\,\sigma)\wedge\tau+(-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\sigma\wedge(\boldsymbol{\delta}\,\tau). \qquad (1930)$$

این لَیبنیتسی-بودن ِ مشتق- ِ-هموردا یِ برونی ست، که شبیه یِ لَیبنیتسی-بودن ِ مشتق ِ برونی ست. از لَیبنیتسی-بودن ِ مشتق ِ برونی و مشتق- ِ-هموردا یِ برونی نتیجه میشود

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})(\sigma\wedge\tau) = [(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma]\wedge\tau+(-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\sigma\wedge[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\tau]. \qquad (1931)$$

از تعریف ِ $\boldsymbol{\delta}$ دیده میشود اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\,\Sigma &= \boldsymbol{\nabla}\,\Sigma,\\
&= \mathbf{d}\,\Sigma. \qquad (1932)
\end{aligned}$$

پس،

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\Sigma = 0. \qquad (1933)$$

اگر Σ یک میدانِ اسکالر، و σ یک فرم-ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\boldsymbol{\delta}(\Sigma\,\sigma) = \Sigma\,\boldsymbol{\delta}\,\sigma + (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma. \tag{1934}$$

از اینجا معلوم میشود

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})(\Sigma\,\sigma) = \Sigma\,(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma. \tag{1935}$$

این نشان میدهد $(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})$ نقطِئی ست.

از این که $(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})$ خطی، لَیبنیتسی، و نقطه ای ست، نتیجه میشود برا یِ مشخص-کردن ِ اثر ِ $(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})$ بر یک فرم-ِ-دیفرانسیل ِ دلبخاه، کافی ست اثر ِ $(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})$ بر یک-فرم-ِ-دیفرانسیلها مشخص باشد، و البته برا یِ این هم کافی ست اثر ِ $(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})$ بر یک میدان-پایه یِ یک-فرم-ِ-دیفرانسیل مشخص باشد. اگر σ یک s فرم-ِ-دیفرانسیل، و $\{(i,e^i)\mid i\}$ یک میدان-پایه برا یِ یک-فرم-ِ-دیفرانسیلها باشد،

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma &= \frac{1}{s!}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})(\sigma_{i_1\cdots i_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}),\\
&= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\\
&\quad e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{j-1}}\wedge[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^{i_j}]\wedge e^{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},\\
&= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\\
&\quad \sum_{j=1}^{s} e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_j}\wedge[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^{i_1}]\wedge e^{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},\\
&= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\\
&\quad \sum_{j=1}^{s}[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^{i_1}]\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_j}\wedge e^{i_{j+1}}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}.
\end{aligned} \tag{1936}$$

در آخرین گام از این استفاده شده که $[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^i]$ یک دُ-فرم-ِ-دیفرانسیل است. به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma = \frac{1}{(s-1)!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^{i_1}]\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}, \tag{1937}$$

یا

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma = [(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^i]\wedge\mathbf{i}_{e^i}\,\sigma. \tag{1938}$$

تانسر ِ (یا میدان ِ تانسری یِ) $\boldsymbol{T}$ از نُع ِ $(1,2)$ را چنین تعریف میکنم، که اگر τ یک-فرم- ِ- دیفرانسیل باشد و u و v بردار باشند،

$$\boldsymbol{T}(\tau,u,v)=[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\tau](u,v). \tag{1939}$$

به $\boldsymbol{T}$ تانسر ِ پیچش میگویند. رُشن است که $\boldsymbol{T}$ نسبت به متغیرها یِ دوم و سوم َش پادمتقارن است. دیده میشود اگر τ^1 تا τ^s یک-فرم- ِ-دیفرانسیل باشند،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})(\tau^1\wedge\cdots\wedge\tau^s)=&\sum_{j=1}^{s}(-1)^{j-1}\\&\tau^1\wedge\cdots\wedge\tau^{j-1}\wedge[\boldsymbol{T}_{\{1\}}(\tau^j)]\wedge\tau^{j+1}\wedge\cdots\wedge\tau^s,\end{aligned} \tag{1940}$$

و البته متناظر با یک-فرمِدیفرانسیل ِ τ،

$$\boldsymbol{T}_{\{1\}}(\tau)=(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\tau. \tag{1941}$$

از جمله اگر $\{(i,e^i)\mid i\}$ یک میدان-پایه برا یِ یک-فرم- ِ-دیفرانسیلها باشد،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})e^i&=\boldsymbol{T}_{\{1\}}(e^i),\\&=\boldsymbol{T}^i,\\&=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}\,e^j\wedge e^k.\end{aligned} \tag{1942}$$

پس،

$$\mathbf{d}\,e^i=\boldsymbol{T}^i-\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k}\,e^j\wedge e^k. \tag{1943}$$

همچنین، اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma&=\frac{1}{(s-1)!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{T}^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},\\&=\frac{1}{2\,[(s-1)!]}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{T}^{i_1}{}_{k\,l}\,e^k\wedge e^l\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},\end{aligned} \tag{1944}$$

یا

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma = \boldsymbol{T}^i(\mathbf{i}_{e_i}\,\sigma),$$
$$= \frac{1}{2}\,\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}\,e^j\wedge e^k\,(\mathbf{i}_{e_i}\,\sigma), \tag{1945}$$

و البته،

$$\boldsymbol{\delta}\,\sigma = \mathbf{d}\,\sigma - \frac{1}{(s-1)!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{T}^{i_1}\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_s},$$
$$= \mathbf{d}\,\sigma - \frac{1}{2\,[(s-1)!]}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{T}^{i_1}{}_{k\,l}\,e^k\wedge e^l\wedge e^{i_2}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}. \tag{1946}$$

از جمله اگر σ یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\sigma = \sigma_i\,\boldsymbol{T}^i,$$
$$= \frac{1}{2}\,\sigma_i\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}\,e^k\wedge e^l. \tag{1947}$$
$$\boldsymbol{\delta}\,\sigma = \mathbf{d}\,\sigma - \sigma_i\,\boldsymbol{T}^i,$$
$$= \mathbf{d}\,\sigma - \frac{1}{2}\,\sigma_i\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}\,e^k\wedge e^l. \tag{1948}$$

به این ترتیب، پیچش صفر است اگر و تنها اگر مشتق- ِ-هموردا یِ برونی هم ان مشتق ِ برونی باشد.

از (1930)، ویژِگی یِ لَیبنیتسی یِ مشتق ِ هموردا یِ برونی، نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\delta}^2(\sigma\wedge\tau) = \boldsymbol{\delta}[(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)\wedge\tau + (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\sigma\wedge(\boldsymbol{\delta}\,\tau)],$$
$$= (\boldsymbol{\delta}^2\,\sigma)\wedge\tau + (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)+1}(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)\wedge(\boldsymbol{\delta}\,\tau)$$
$$+ (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)\wedge(\boldsymbol{\delta}\,\tau) + (-1)^{2\,\mathsf{ty}(\sigma)}\,\sigma\wedge(\boldsymbol{\delta}^2\,\tau), \tag{1949}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\delta}^2(\sigma\wedge\tau) = (\boldsymbol{\delta}^2\,\sigma)\wedge\tau + \sigma\wedge(\boldsymbol{\delta}^2\,\tau). \tag{1950}$$

$\boldsymbol{\delta}^2$ لزومَن صفر نیست (بر خلاف ِ این که $\mathbf{d}^2$ صفر است)، اما لَیبنیتسی ست. پس اگر σ یک s فرم-ِ-دیفرانسیل و e یک پایه باشد،

$$\boldsymbol{\delta}^2\,\sigma = \frac{1}{s!}\Big[(\boldsymbol{\delta}^2\,\sigma_{i_1\cdots i_s})\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s} + \sum_{j=1}^{s}\sigma_{i_1\cdots i_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots e^{i_{j-1}}\wedge(\boldsymbol{\delta}^2\,e^{i_j})\wedge e^{i_{j+1}}\wedge\cdots e^{i_s}\Big]. \tag{1951}$$

در واقع،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^2 &= [\mathbf{d}-(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})][\mathbf{d}-(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})],\\ &= \mathbf{d}^2-\mathbf{d}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})-(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\mathbf{d}+(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})^2,\end{aligned} \tag{1952}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\delta}^2 = -\mathbf{d}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})-(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\mathbf{d}+(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})^2. \tag{1953}$$

اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^2\,\Sigma &= [-\mathbf{d}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})-(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\mathbf{d}+(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})^2]\Sigma,\\ &= -(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})\,\mathbf{d}\,\Sigma,\end{aligned} \tag{1954}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}^2\,\Sigma &= -(\mathbf{D}_i\,\Sigma)\boldsymbol{T}^i,\\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{D}_i\,\Sigma)\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}\,e^j\wedge e^k,\end{aligned} \tag{1955}$$

و اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{\delta}^2\,\Sigma = 0. \tag{1956}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{\delta}^2\,e^i = \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\delta}\,e^i),$$

$$= -\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \wedge e^j),$$
$$= -(\boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j) \wedge e^j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \wedge (\boldsymbol{\delta}\, e^j),$$
$$= -(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j) \wedge e^j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k \wedge e^j - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \wedge \boldsymbol{\Gamma}^j{}_k \wedge e^k, \tag{1957}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\delta}^2\, e^i = [-(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}^k{}_j) + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k] \wedge e^j. \tag{1958}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{\delta}^2\, e^i = -(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}^k{}_j) \wedge e^j. \tag{1959}$$

به این ترتیب اگر σ یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\boldsymbol{\delta}^2\, \sigma = \{(\mathbf{D}_k\, \sigma_j)\boldsymbol{T}^k + \sigma_i[-(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}^k{}_j) + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k]\} \wedge e^j, \tag{1960}$$

و البته اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{\delta}^2\, \sigma = -\sigma_i(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}^k{}_j) \wedge e^j. \tag{1961}$$

البته اگر پیچش صفر باشد مشتق ِ هموردا یِ برونی هم ان مشتق ِ برونی ست. پس اگر پیچش صفر باشد، برا یِ هر فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ

$$\boldsymbol{\delta}^2\, \sigma = 0. \tag{1962}$$

از تعریف ِ $\boldsymbol{\delta}$ دیده میشود اگر τ یک یک-فرم ِ دیفرانسیل باشد، و u و v بردار باشند،

$$(\boldsymbol{\delta}\,\tau)(u, v) = (\boldsymbol{\nabla}_u\, \tau)(v) - (\boldsymbol{\nabla}_v\, \tau)(u). \tag{1963}$$

برا یِ تعریف ِ طرف ِ راست لازم نیست u و v میدان ِ برداری باشند. اما اگر u و v میدان ِ برداری باشند،

$$(\boldsymbol{\delta}\,\tau)(u, v) = \boldsymbol{\nabla}_u[\tau(v)] - \boldsymbol{\nabla}_v[\tau(u)] - [\tau(\boldsymbol{\nabla}_u\, v) - \tau(\boldsymbol{\nabla}_v\, u)],$$
$$= \mathbf{L}_u[\tau(v)] - \mathbf{L}_v[\tau(u)] - \tau(\boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, u). \tag{1964}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\tau)(u,v) &= (\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}\,\tau)(v),\\ &= (\mathbf{L}_u\,\tau)(v) - (\mathbf{d}\,\mathbf{i}_u\,\tau)(v),\\ &= -\tau(\mathbf{L}_u\,v) + \mathbf{L}_u[\tau(v)] - \mathbf{L}_v[\tau(u)].\end{aligned} \tag{1965}$$

به این ترتیب،

$$[(\mathbf{d}-\boldsymbol{\delta})(\tau)](u,v) = \tau(\boldsymbol{\nabla}_u\,v - \boldsymbol{\nabla}_v\,u - u\,\diamond\,v), \tag{1966}$$

یا

$$\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v) = \boldsymbol{\nabla}_u\,v - \boldsymbol{\nabla}_v\,u - u\,\diamond\,v. \tag{1967}$$

e را یک میدان-پایه، و $\{(i,e^i)\mid i\}$ را دُگان ِ آن میگیرم. از (1941) دیده میشود

$$\boldsymbol{T}^i = \mathbf{d}\,e^i + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \wedge e^j. \tag{1968}$$

از (1967) هم دیده میشود

$$\boldsymbol{T}_{j\,k} = \boldsymbol{\Gamma}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}_{k\,j} - e_j\,\diamond\,e_k. \tag{1969}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k} &= \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j} + (\mathbf{d}\,e^i)(e_j,e_k),\\ &= \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j} - e^i(e_j\,\diamond\,e_k).\end{aligned} \tag{1970}$$

از جمله دیده میشود اگر e مختصاتی باشد،

$$\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k} = \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}. \tag{1971}$$

به هم ین خاطر، هموستارها یِ متناظر با پیچش ِ صفر (هموستارها یِ بدون- ِ-پیچش) را هموستارها یِ متقارن هم مینامند.

مشتق ِ برونی هم ان مشتق- ِ-هموردا یِ برونی ست، اگر و تنها اگر پیچش صفر باشد. اگر پیچش صفر باشد، σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، و e یک میدان-پایه باشد،

$$\mathbf{d}\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)_{i_1\cdots i_s}\,e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}. \tag{1972}$$

اگر علاوه بر این e مختصاتی باشد،

$$\mathbf{d}\,\sigma = \frac{1}{s!}(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma_{i_1\cdots i_s})e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}, \tag{1973}$$

و البته رُشن است که در این رابطه میشود $\mathbf{D}_i$ را به جا یِ $\boldsymbol{\nabla}_i$ به کار برد، چون $\sigma_{i_1\cdots i_s}$ اسکالر است. (1972) و (1973) دُ شکل ِ متفاوت برا یِ یک عبارت میدهند:

$$(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)_{i_1\cdots i_s} = \boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma_{i_1\cdots i_s} - \sum_{j=1}^{s}\boldsymbol{\Gamma}^k{}_{i\,i_j}\,\sigma_{i_1\cdots i_{j-1}\,k\,i_{j+1}\cdots i_s}. \tag{1974}$$

$(e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s})$ نسبت به i و i_j پادمتقارن است. وقت ی پیچش صفر باشد و e مختصاتی باشد $\boldsymbol{\Gamma}^k{}_{i\,i_j}$ نسبت به i و i_j متقارن است. به هم ین خاطر اثر ِ جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (1974)، در (1972) ظاهر نمیشود.

رابطه یِ (1971) یک تُضیح ِ این هم هست که با تغییر- ِ-پایه یِ مختصاتی فقط بخش ِ متقارن (نسبت به متغیرها یِ دوم و سوم) ِ هموستار تغییر میکند: با میدان-پایِها یِ مختصاتی، بخش ِ پادمتقارن ِ هموستار هم ان تانسر ِ پیچش است، که مستقل از پایه است. به این ترتیب، متناظر با هر نقطه یِ x یک میدان-پایه یِ مختصاتی هست که هموستار ِ متناظر با آن در x صفر است، اگر و تنها اگر پیچش در x صفر باشد.

رابطه یِ (1971) ضمنَن یک راه ِ دیگر برا یِ تُصیف ِ پیچش میدهد: γ یک تابع ِ دُ-متغیره با مقدار در خمینه یِ $\mathbb{M}$ است. ϕ را یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]^i &= [\mathbf{D}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]^i + [\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k}(\gamma)][\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma]^j\,[\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]^k,\\ [\boldsymbol{\nabla}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma]^i &= [\mathbf{D}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma]^i + [\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k}(\gamma)][\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]^j\,[\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma]^k,\end{aligned} \tag{1975}$$

که نتیجه میدهد

$$\{[\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)} - \boldsymbol{\nabla}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}]\gamma\}^i = \boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}\,[\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma]^j\,[\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]^k, \tag{1976}$$

یا به شکل ِ مستقل از پایه،

$$[\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}-\boldsymbol{\nabla}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}]\gamma=\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma,\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma]. \tag{1977}$$

پس اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\gamma=\boldsymbol{\nabla}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}\,\gamma. \tag{1978}$$

از جمله، گیرم خمها یِ γ_1 و γ_2 در پارامترها یِ، به ترتیب، s_1 و s_2 یکدیگر را قطع میکنند. در حالت ِ کلی، $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(t_2,t_1)$ با $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,t_2)$ برابر نیست. تعریف میکنم

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(t_1,t_2)=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(t_2,t_1). \tag{1979}$$

دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(s_1,\cdot)=\gamma_2, \tag{1980}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(\cdot,s_2)=\gamma_1, \tag{1981}$$

یعنی $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}$ و $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ شرایط ِ مرزی یِ یکسان ی را بر میئاورند. همجنین،

$$\boldsymbol{\nabla}_{(2)}\,\mathbf{D}_{(1)}\,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}=0. \tag{1982}$$

اگر پیچش صفر باشد، معادله یِ بالا همئرز است با

$$\boldsymbol{\nabla}_{(1)}\,\mathbf{D}_{(2)}\,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}=0. \tag{1983}$$

در این صورت $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}$ و $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}$ معادله-یِ-دیفرانسیل ِ یکسان ی را بر میئاورند. پس اگر پیچش صفر باشد،

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}, \tag{1984}$$

یا

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_2,\gamma_1,s_2,s_1}(t_2,t_1)=\boldsymbol{\mathcal{P}}_{\gamma_1,\gamma_2,s_1,s_2}(t_1,t_2). \tag{1985}$$

یعنی اگر خمها یِ γ_1 و γ_2 یکدیگر را در پارامترها یِ به ترتیب s_1 و s_2 قطع کنند، اگر پیچش صفر باشد انتقال- ِ-موازی-یافته یِ γ_1 با γ_2 از s_2 تا t_2 در t_1 با انتقال- ِ-موازی-یافته یِ γ_2 با γ_1 از s_1 تا t_1 در t_2 برابر است. اگر t_i به s_i نزدیک باشد، تصویر ِ $[\gamma_i(t_i)-\gamma_i(s_i)]$ را با بردار ِ $[(t_i-s_i)(\mathbf{D}\,\gamma_i)(s_i)]$ تقریب میکنم. این تفاضل را با u_i نشان میدهم. البته مقدار ِ γ لزومَن بردار نیست. منظور از نمایش ِ $[\gamma_i(t_i)-\gamma_i(s_i)]$ با $[(t_i-s_i)(\mathbf{D}\,\gamma_i)(s_i)]$ برابری یِ مختصات ِ اولی با مئلفِها یِ دومی در پایه یِ مختصاتی یِ متناظر است:

$$\begin{aligned}\gamma_i^k(t_i)-\gamma_i^k(s_i) &= (t_i-s_i)(\mathbf{D}\,\gamma_i^k)(s_i),\\ &= u_i^k.\end{aligned} \tag{1986}$$

$[\gamma_1(s_1)]$ و $[\gamma_2(s_2)]$ را (که با هم برابر اند) با x، و $\gamma_i(t_i)$ را با x_i نشان میدهم. انتقال- ِ-موازی-یافته یِ u_2 با γ_1 از s_1 تا t_1 را با u_2'، و انتقال- ِ-موازی-یافته یِ u_1 با γ_2 از s_2 تا t_2 را با u_1' نشان میدهم. تعریف میکنم

$$\begin{aligned}x_{2\,1} &= x_1+u_2',\\ x_{1\,2} &= x_2+u_1'.\end{aligned} \tag{1987}$$

این برابریها هم به معنی یِ برابری یِ مختصات َند. اگر پیچش صفر باشد، (1985) برقرار است، که نتیجه میدهد

$$x_{2\,1}=x_{1\,2}. \tag{1988}$$

میگویند اگر پیچش صفر باشد حکم ِ قضیه یِ متوازی‌الاضلاع برقرار است: اگر دُ پاره‌خط ِ سمتدار ابتدا یِ مشترک داشته باشند، و از انتها یِ هر یک پاره‌خط ی موازی با دیگری کشیده شود، دُ نقطه یِ حاصل بر هم منطبق میشوند (یک متوازی‌الاضلاع به دست میئاید). در واقع دیده میشود

$$\begin{aligned}u_2' &= u_2-\mathbf{\Gamma}_{\{2,3\}}(u_1,u_2),\\ u_1' &= u_1-\mathbf{\Gamma}_{\{2,3\}}(u_2,u_1),\end{aligned} \tag{1989}$$

که برابریها به معنی یِ برابری یِ مئلفِها یِ دُ-طرف در یک پایه یِ مختصاتی یَند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} x_{1\,2} - x_{2\,1} &= (x + u_2 + u_1') - (x + u_1 + u_2'), \\ &= \boldsymbol{\Gamma}_{\{2,3\}}(u_1, u_2) - \boldsymbol{\Gamma}_{\{2,3\}}(u_2, u_1), \\ &= \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u_1, u_2). \end{aligned} \tag{1990}$$

یعنی مقدار ِ انحراف از حکم ِ قضیه یِ متوازی‌الاضلاع، با پیچش متناسب است.

پیچش را میشود بر اساس ِ متقارن-نبودن ِ مشتق- ِ-هموردا یِ دوم ِ یک میدان ِ اسکالر هم بیان کرد. $\mathbb{M}$ یک خمینه است، Σ یک میدان ِ اسکالر بر آن است، و u و v میدانها یی برداری بر آن َند. مشتق- ِ-هموردا یِ دوم ِ Σ یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ $(0,2)$ است.

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(u, v) &= \mathbf{i}_v[(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(u, \boldsymbol{\cdot})], \\ &= \mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma, \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)v, \\ &= \boldsymbol{\nabla}_u[(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)v] - (\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_u\,v), \\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma - (\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_u\,v). \end{aligned} \tag{1991}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} 2[\mathsf{aSym}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)](u, v) &= (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(u, v) - (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(v, u), \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)\Sigma - (\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_u\,v - \boldsymbol{\nabla}_v\,u), \\ &= (\mathbf{L}_u\,\mathbf{L}_v - \mathbf{L}_v\,\mathbf{L}_u)\Sigma - (\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u, v) + u \diamond v], \\ &= \mathbf{L}_{u \diamond v}\,\Sigma - (\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u, v) + u \diamond v], \end{aligned} \tag{1992}$$

که نتیجه میدهد

$$2[\mathsf{aSym}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)](u, v) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma, u, v) = 0, \tag{1993}$$

یا

$$2\,\mathsf{aSym}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma) + \boldsymbol{T}_{\{1\}}(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma) = 0. \tag{1994}$$

پس بخش ِ پادمتقارن ِ مشتق- ِ-همموردا یِ دوم ِ Σ صفر است، اگر و تنها اگر پیچش صفر باشد. البته هر-دُ-جمله یِ طرف ِ چپ ِ (1993) نسبت به u و v نقطِئی اند. پس در (1993) لازم نیست u و v میدان ِ برداری باشند، کافی ست بردار باشند. این را مستقیمَن هم میشود دید:

$$\begin{aligned} 2\,\mathsf{aSym}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma) &= \boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma, \\ &= \mathbf{d}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma - \boldsymbol{T}_{\{1\}}(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma), \\ &= \mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\Sigma - \boldsymbol{T}_{\{1\}}(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma), \\ &= -\boldsymbol{T}_{\{1\}}(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma), \end{aligned} \tag{1995}$$

که به (1994) مینجامد.

هموستار به میدان-پایه بستِگی دارد، اما پیچش به میدان-پایه بستِگی ندارد. البته پیچش به هموستار بستِگی دارد، اما دانستن ِ $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ (هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ e) در نقطه یِ x برا یِ محاسبه یِ پیچش در نقطه یِ x کافی نیست. حتا اگر $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ در یک همسایِگی یِ x معلوم باشد هم، پیچش در x به طُر ِ یکتا تعیین نمیشود. به عنوان ِ یک مثال ِ ساده، یک خمینه یِ دُ-بُعدی میگیرم که e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس بر آن در یک همسایِگی یِ x است، و

$$[\boldsymbol{\Gamma}(e)](x) = 0. \tag{1996}$$

$$\mathbf{d}\,e^i = f^i\,e_1 \wedge e_2. \tag{1997}$$

دیده میشود f^i ها را هموستار تعیین نمیکند، و

$$\boldsymbol{T}^i = f^i\,e_1 \wedge e_2. \tag{1998}$$

در واقع در یک خمینه یِ دلبخاه، اگر هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ e، در x صفر شود، از به ترتیب (1968) و (1969) دیده میشود

$$\boldsymbol{T}^i(x) = (\mathbf{d}\,e^i)(x), \tag{1999}$$

$$\boldsymbol{T}_{j\,k}(x) = -(e_j \diamond e_k)(x). \tag{2000}$$

دیده میشود $\boldsymbol{T}(x)$ لزومَن صفر نیست. حتا اگر $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ نَ فقط در x که در یک همسایِگی یِ x صفر باشد، باز هم $\boldsymbol{T}(x)$ صفر نیست. اصولَن بستِگی یِ $\boldsymbol{T}$ به $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ نقطِئی ست. اما اگر هموستار ِ متناظر با

یک میدان-پایه یِ مختصاتی، در x صفر شود، پیچش هم در آن نقطه صفر میشود. پیچش به طُر ِ یکتا از هموستار ِ متناظر با یک میدان-پایه یِ مختصاتی تعیین میشود، و نسبت به چنین-هموستار ی خطی و نقطِئی ست: اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد،

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}\, e_i \otimes (e_j \wedge e_k), \\ &= 2\,\mathsf{aSym}_{(2,3)}[\boldsymbol{\Gamma}(e)]. \end{aligned} \tag{2001}$$

از جمله اگر هموستار ِ متناظر با یک میدان-پایه یِ مختصاتی، در x صفر باشد، پیچش هم در x صفر است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ خمی-همبند ِ تخت است. دیده شد در چنین-خمینه ای میشود یک میدان-پایه برا یِ فضا یِ مماس ساخت که مشتق ِ هموردا یِ مقدارها یَش صفر است. اگر خمینه مُضعَن تخت باشد هم مُضعَن چنین میدان-پایه ای هست. e را میدان-پایه ای میگیرم که مشتق ِ هموردا یِ هر یک از مقدارها یَش صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}_j\, e_k = 0. \tag{2002}$$

در این صورت (2000) برقرار است، یعنی هر مئلفه یِ پیچش جابِجاگر ِ دُ تا از میدانها یِ e است. پس پیچش صفر است، اگر و تنها اگر جابِجاگر ِ هر دُ-مقدار ِ میدان-پایه با هم صفر باشد. این یعنی پیچش صفر است، اگر و تنها اگر میدان-پایه یِ e مختصاتی باشد. این نتیجه را از (1999) هم میشد به دست آورد، که میگوید اگر $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ صفر باشد هر مئلفه یِ پیچش مشتق ِ برونی یِ یک ی از میدانها یِ دُگان ِ e است. پس پیچش صفر است، اگر و تنها اگر دُگان ِ e یک میدان-پایه یِ مختصاتی (برا یِ فضا یِ هممماس) باشد.

به این ترتیب این گزارِها همئرز َند:

- خمینه یِ $\mathbb{M}$ تخت است و پیچش ِ آن صفر است.
- خمینه یِ $\mathbb{M}$ مُضعَن یک میدان-پایه یِ مختصاتی دارد که هموستار ِ متناظر با آن صفر است.

مُضعی-بودن ِ میدان-پایه یِ مختصاتی مهم است. ممکن است میدانها یِ برداری یِ e_i که دُ-به-دُ با هم جابِجا میشوند، بر کل ِ خمینه تعریف شده باشند، و در هر نقطه یِ خمینه یک پایه برا یِ فضا یِ مماس بر آن نقطه بسازند (وقت ی خمینه تخت و پیچش صفر باشد چنین میدانها یی وجود دارند)، اما این لزومَن

به معنی یِ آن نیست که نقشه ای هست که دامنه اَش کل ِ خمینه است و میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن e است. دایره یک خمینه یِ یک-بُعدی ست، پس پیچش بر آن صفر است (همه یِ دُ-فرمها بر آن صفر َند). فضا یِ مماس بر دایره یک میدان-پایه دارد که همه جا تعریف شده و هیچ جا صفر نیست. هموستار ِ متناظر را صفر تعریف میکنم. با این هموستار، دایره یک خمینه یِ تخت میشود. اما دایره نقشه یِ سراسری ندارد. برا یِ پوشاندن ِ دایره دست- ِ-کم دُ نقشه لازم است.

با استفاده از مشتق ِ هموردا میشود تجزیه یِ مشتق ِ لی یِ T با بردار ِ u به بخشها یی که نسبت به u و T نقطِئی یَند را به شکل ی مستقل از پایه نوشت. از

$$\mathbf{L}_v\, T = v^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, T + \boldsymbol{\mathcal{L}}(e_i, \mathbf{D}\, v^i, T), \tag{571}$$

دیده میشود

$$\mathbf{L}_u\, T = u^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(e_i \otimes \mathbf{D}\, u^i; T), \tag{2003}$$

که T یک میدان ِ تانسری یِ نُع ِ (r,s) است، u یک میدان ِ برداری ست، و e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس بر خمینه است. e را مختصاتی میگیرم. در این صورت،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{e_i}\, T &= (\mathbf{D}_i\, T^{j\cdots}{}_{\cdots k}) e_j \otimes \cdots \otimes e^k,\\ &= \boldsymbol{\nabla}_i\, T - \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(e_i, T),\end{aligned} \tag{2004}$$

یا

$$\begin{aligned}u^i\, \mathbf{L}_{e_i}\, T &= u^i\, \boldsymbol{\nabla}_i\, T - u^i\, \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(e_i, T),\\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\, T - \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u, T).\end{aligned} \tag{2005}$$

از

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(-\boldsymbol{\Gamma}_u; T) = \boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u, T), \tag{1782}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\Gamma}^{(r,s)}(u, T) = -\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(\boldsymbol{\Gamma}_u; T). \tag{2006}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{L}_u\, T = \boldsymbol{\nabla}_u\, T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(e_i \otimes \mathbf{D}\, u^i + \boldsymbol{\Gamma}_u; T). \tag{2007}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} e_i \otimes \mathbf{D}\, u^i + \boldsymbol{\Gamma}_u &= (e_i \otimes e^j)(\mathbf{D}_j\, u^i + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\, u^k), \\ &= (e_i \otimes e^j)\,[(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)^i - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k}\, u^k + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\, u^k], \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_j\, u) \otimes e^j + (e_i \otimes e^j)\boldsymbol{T}^i{}_{k\,j}\, u^k. \end{aligned} \tag{2008}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u\, T &= \boldsymbol{\nabla}_u\, T + [(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)^i + \boldsymbol{T}^i{}_{k\,j}\, u^k]\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_i{}^j\, T, \\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\, T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}[(\boldsymbol{\nabla}_j\, u) \otimes e^j; T] + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u; T). \end{aligned} \tag{2009}$$

جمله یِ اول نسبت به u، جمله یِ دوم نسبت به T، و جمله یِ سوم نسبت به هم u و هم T نقطِئی ست. رابطه یِ بالا برا یِ میدان ِ برداری یِ v میشود

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u\, v &= \boldsymbol{\nabla}_u\, v - v^j\, \boldsymbol{\nabla}_j\, u + (\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u)^i{}_j\, v^j\, e_i, \\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, u - \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u, v), \end{aligned} \tag{2010}$$

که هم ان (1967) است. برا یِ میدان ِ همبرداری یِ σ هم

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_u\, \sigma &= \boldsymbol{\nabla}_u\, \sigma + [\sigma(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)]e^j + \sigma_i\, (\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u)^i{}_j\, e^j, \\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\, \sigma + [\sigma(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)]\, e^j + \boldsymbol{T}_{\{1,2\}}(\sigma, u), \end{aligned} \tag{2011}$$

که با استفاده از

$$\begin{aligned} [\sigma(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)]e^j &= e^j\, \boldsymbol{\nabla}_j[\sigma(u)] - e^j[(\boldsymbol{\nabla}_j\, \sigma)(u)], \\ &= \boldsymbol{\nabla}[\sigma(u)] - (\boldsymbol{\nabla}\, \sigma)_{\{2\}}(u), \end{aligned} \tag{2012}$$

ضمنَن میشود

$$\mathbf{L}_u\,\sigma = [(\boldsymbol{\nabla}\,\sigma)_{\{1\}} - (\boldsymbol{\nabla}\,\sigma)_{\{2\}}](u) + \boldsymbol{\nabla}[\sigma(u)] + \boldsymbol{T}_{\{1,2\}}(\sigma, u),$$
$$= \mathbf{i}_u\,\boldsymbol{\delta}\,\sigma + \boldsymbol{\nabla}[\sigma(u)] + \boldsymbol{T}_{\{1,2\}}(\sigma, u). \tag{2013}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد،

$$\mathbf{L}_u\,T = \boldsymbol{\nabla}_u\,T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}[(\boldsymbol{\nabla}_j\,u)\otimes e^j; T]. \tag{2014}$$

$$\mathbf{L}_u\,v = \boldsymbol{\nabla}_u\,v - \boldsymbol{\nabla}_v\,u. \tag{2015}$$

$$\mathbf{L}_u\,\sigma = \mathbf{i}_u\,\boldsymbol{\delta}\,\sigma + \boldsymbol{\nabla}[\sigma(u)]. \tag{2016}$$

52 خمش ِ خمینه

خمش ِ خمینه حالت ِ خاص ِ خمش در کلافها یِ برداری ست. خمش ِ خمینه را با $\boldsymbol{R}$ نشان میدهم. به این ترتیب، اگر $\boldsymbol{\Gamma}$ هموستار و e یک پایه باشد،

$$[\boldsymbol{R}(e)]^i{}_j = \mathbf{d}\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_j + [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_k \wedge [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^k{}_j. \tag{2017}$$

اگر $(e' = \Lambda\,e)$ یک پایه یِ دیگر باشد،

$$[\boldsymbol{R}(e')]^{i'}{}_{j'} = \mathbf{d}\,[\boldsymbol{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{j'} + [\boldsymbol{\Gamma}(e')]^{i'}{}_{k'} \wedge [\boldsymbol{\Gamma}(e')]^{k'}{}_{j'},$$
$$= \mathbf{d}\{(\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^m{}_n\,\Lambda^n{}_j + (\Lambda^{-1})^i{}_m\,\mathbf{d}\,\Lambda^m{}_j\}$$
$$+ \{(\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^m{}_n - \mathbf{d}\,(\Lambda^{-1})^i{}_n\}\Lambda^n{}_k$$
$$\wedge\,(\Lambda^{-1})^k{}_p\,\{[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^p{}_q\,\Lambda^q{}_j + \mathbf{d}\,\Lambda^p{}_j\},$$
$$= \mathbf{d}\{(\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^m{}_n\,\Lambda^n{}_j\} + [\mathbf{d}\,(\Lambda^{-1})^i{}_m] \wedge \mathbf{d}\,\Lambda^m{}_j$$
$$+ (\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^m{}_n \wedge [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^n{}_q\,\Lambda^q{}_j$$
$$+ (\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^m{}_n \wedge \mathbf{d}\,\Lambda^n{}_j - \mathbf{d}\,(\Lambda^{-1})^i{}_n \wedge [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^p{}_q\,\Lambda^q{}_j$$
$$- [\mathbf{d}\,(\Lambda^{-1})^i{}_n] \wedge \mathbf{d}\,\Lambda^n{}_j,$$

$$= (\Lambda^{-1})^i{}_m \{\mathbf{d}\,[\mathbf{\Gamma}(e)]^m{}_q + [\mathbf{\Gamma}(e)]^m{}_n \wedge [\mathbf{\Gamma}(e)]^n{}_q\}\Lambda^q{}_j, \tag{2018}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{R}(e')]^{i'}{}_{j'} &= (\Lambda^{-1})^i{}_m\,[\boldsymbol{R}(e)]^m{}_q\,\Lambda^q{}_j,\\ &= [\boldsymbol{R}(e)]^{i'}{}_{j'},\end{aligned} \tag{2019}$$

یا

$$\boldsymbol{R}(e') = \boldsymbol{R}(e), \tag{2020}$$

یعنی $\boldsymbol{R}$ (خمش) به پایه بستِگی ندارد. به هم ین خاطر از این پس $\boldsymbol{R}(e)$ را با $\boldsymbol{R}$ نشان میدهم. البته این حالت ِ خاص ِ آن است که f (دُ-فرم ِ مستقل-از-بدیهیگر ِ خمش) به بدیهیگر بستِگی ندارد. به این ترتیب (2017)، سادِتر چنین نوشته میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_j = \mathbf{d}\,\mathbf{\Gamma}^i{}_j + \mathbf{\Gamma}^i{}_k \wedge \mathbf{\Gamma}^k{}_j. \tag{2021}$$

خمش ِ خمینه به پایه بستِگی ندارد. اما هموستار به پایه بستِگی دارد. برا یِ محاسبه یِ طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا باید هموستار ِ متناظر با هم ان پایه ای به کار رود که خمش در آن پایه حساب شده: رابطِها یِ

$$\boldsymbol{R}^{i'}{}_{j'} = \mathbf{d}\,\mathbf{\Gamma}^{i'}{}_{j'} + \mathbf{\Gamma}^{i'}{}_{k'} \wedge \mathbf{\Gamma}^{k'}{}_{j'}, \tag{2022}$$

یا

$$\boldsymbol{R}^{i'}{}_{j'} = \mathbf{d}\,\mathbf{\Gamma}^{i'}{}_{j'} + \mathbf{\Gamma}^{i'}{}_{k} \wedge \mathbf{\Gamma}^{k}{}_{j'}, \tag{2023}$$

درست نیستند. رابطه یِ درست

$$\boldsymbol{R}^{i'}{}_{j'} = \mathbf{d}\,\mathbf{\Gamma}'^{i'}{}_{j'} + \mathbf{\Gamma}'^{i'}{}_{k'} \wedge \mathbf{\Gamma}'^{k'}{}_{j'}, \tag{2024}$$

یا

$$\boldsymbol{R}^{i'}{}_{j'} = \mathbf{d}\,\mathbf{\Gamma}'^{i'}{}_{j'} + \mathbf{\Gamma}'^{i'}{}_{k} \wedge \mathbf{\Gamma}'^{k}{}_{j'}, \tag{2025}$$

است، که Γ' هموستار ِ متناظر با پایه یِ پریمدار است.

هر یک از $\boldsymbol{R}^i{}_j$ ها یک دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل است:

$$\boldsymbol{R}^i{}_j = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,e^k \wedge e^l. \tag{2026}$$

به $\boldsymbol{R}$ که مئلفِها یَش $\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}$ ها هستند تانسر ِ خمش (تانسر ِ ریمان) میگویند:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,e_i \otimes e^j \otimes e^k \otimes e^l. \tag{2027}$$

رُشن است که

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,l\,k} = -\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}. \tag{2028}$$

خمش ِ ریمان در مجذور ِ مشتق- ِ-هموردا یِ برونی ظاهر میشود. متناظر با پایه یِ e،

$$\boldsymbol{\delta}^2\,e^i = [-(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}^k{}_j) + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k] \wedge e^j. \tag{1958}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\delta}^2\,e^i = (-\boldsymbol{R}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k) \wedge e^j. \tag{2029}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{R}^i{}_j \wedge e^j = 0. \tag{2030}$$

کاملَن مشابه با خمش ِ متناظر با یک هموستار ِ آفین بر یک کلاف ِ برداری، از (2021) دیده میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_i = \mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_i. \tag{2031}$$

به این ترتیب،

$$\grave{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}^i{}_i, \tag{2032}$$

که مفصلتر َش میشود

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} = \boldsymbol{R}^{i}{}_{i\,k\,l}. \tag{2033}$$

به $\grave{\boldsymbol{R}}$ تارَد ِ خمش میگویم.

از (2021) وقت ی e یک پایه یِ مختصاتی ست نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{i}{}_{j} &= (\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{n\,j})e^m\wedge e^n + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Gamma}^{k}{}_{n\,j}\,e^m\wedge e^n,\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{n\,j} - \mathbf{D}_n\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{m\,j} + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Gamma}^{k}{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Gamma}^{k}{}_{m\,j})\,e^m\wedge e^n.\end{aligned} \tag{2034}$$

پس در یک پایه یِ مختصاتی،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = \mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{l\,j} - \mathbf{D}_l\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{k\,j} + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{k\,p}\,\boldsymbol{\Gamma}^{p}{}_{l\,j} - \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{l\,p}\,\boldsymbol{\Gamma}^{p}{}_{k\,j}. \tag{2035}$$

u و v و w میدانها یی برداری یَند. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^i &= \mathbf{i}_u[\mathbf{d}\,(\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^i + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,(\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^j],\\ &= \mathbf{L}_u\,(\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^i + (\mathbf{i}_u\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j})(\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^j,\\ &= \mathbf{L}_u[\mathbf{i}_v(\mathbf{d}\,w^i + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,w^j)] + (\mathbf{i}_u\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j})\mathbf{i}_v(\mathbf{d}\,w^j + \boldsymbol{\Gamma}^{j}{}_{k}\,w^k).\end{aligned} \tag{2036}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u\,w)^i &= \mathbf{i}_v[\mathbf{d}\,(\boldsymbol{\nabla}_u\,w)^i + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,(\boldsymbol{\nabla}_u\,w)^j],\\ &= \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\mathbf{i}_u(\mathbf{d}w^i + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,w^j) + (\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j})(\boldsymbol{\nabla}_u\,w)^j,\\ &= \mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u(\mathbf{d}\,w^i + \boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,w^j) - \mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}(\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j}\,w^j)\\ &\quad + (\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\Gamma}^{i}{}_{j})\mathbf{i}_u(\mathbf{d}w^j + \boldsymbol{\Gamma}^{j}{}_{k}\,w^k).\end{aligned} \tag{2037}$$

از ترکیب ِ (2036) و (2037) نتیجه میشود

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,w)^i-(\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u\,w)^i,\\
&=\mathbf{L}_u\,\mathbf{i}_v(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)-\mathbf{i}_v\,\mathbf{L}_u(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)\\
&\quad+(\mathbf{i}_u\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j)\mathbf{i}_v(\mathbf{d}\,w^j+\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\,w^k)-(\mathbf{i}_v\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j)\mathbf{i}_u(\mathbf{d}\,w^j+\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\,w^k)\\
&\quad+\mathbf{i}_v\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{d}(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j),\\
&=\mathbf{L}_u[(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)(v)]-[\mathbf{L}_u(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)](v)\\
&\quad+[\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge(\mathbf{d}\,w^j+\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\,w^k)](u,v)+[\mathbf{d}(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)](u,v),\\
&=(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)\,\mathbf{L}_u\,v+[(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j)\,w^j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\,w^k](u,v),\\
&=\mathbf{i}_{u\diamond v}(\mathbf{d}\,w^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\,w^j)+(\boldsymbol{R}^i{}_j\,w^j)(u,v),
\end{aligned}
\tag{2038}
$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{R}^i{}_j\,w^j)(u,v)=[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})w]^i, \tag{2039}$$

یا

$$\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)=(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})w \tag{2040}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)=([\boldsymbol{\nabla}_u,\boldsymbol{\nabla}_v]-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})w. \tag{2041}$$

البته برا یِ نوشتن ِ طرف ِ چپ ِ این روابط لازم نیست u و v و w میدان ِ برداری باشند: طرف ِ راست نسبت به u و v نقطِئی ست، هر چند تک-تک ِ جملات ِ طرف ِ راست چنین نیستند. رابطِها یِ (2039) تا (2041)، در واقع حالت ِ خاص ِ

$$\mathbf{m}[\check{f}(u,v)]=[\boldsymbol{\nabla}_u,\boldsymbol{\nabla}_v]-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}, \tag{1512}$$

اند که برا یِ کلاف ِ مماس (حالت ِ خاص ی از کلاف ِ برداری) نوشته شده اند. در حالت ِ کلی خمش ِ یک کلاف ِ برداری عملگر ی ست که بر سه متغیر (دُ بردار ِ فضا یِ مماس و یک بردار ِ

کلاف) اثر میکند و یک متغیر (یک بردارِ کلاف) میدهد. به این ترتیب، در حالتِ کلی خمشِ یک کلافِ برداری با دُ گونه شیئ مربوط است: بردارها یِ فضا یِ مماس و بردارها یِ کلاف. در حالتِ خاصِ خمشِ خمینه، بردارها یِ کلاف هم ان بردارها یِ فضا یِ مماس َند و به این ترتیب، خمشِ خمینه با فقط یک گونه شیئ مربوط است. خمشِ خمینه بر سه بردار (فضا یِ مماس) اثر میکند و یک بردار (فضا یِ مماس) میدهد. به زبانِ شاخصها، در حالتِ کلی از چهار شاخصِ خمشِ یک کلافِ برداری دُ تا شاخصِ فضا یِ مماس و دُ تا شاخصِ کلافِ برداری یَند. در حالتِ خاصِ خمشِ خمینه، هر چهار-شاخص از یک گونه (شاخصِ فضا یِ مماس) اند.

خمشِ خمینه حالتِ خاصِ خمشِ یک کلافِ برداری ست. پس خمشِ خمینه اتحادِ دومِ بیانکی را بر میئاورَد:

$$\mathbf{d}\,\boldsymbol{R}^i{}_j + \mathbf{\Gamma}^i{}_k \wedge \boldsymbol{R}^k{}_j - \boldsymbol{R}^i{}_k \wedge \mathbf{\Gamma}^k{}_j = 0. \tag{2042}$$

$\{(i, e_i) \mid i\}$ را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ را دُگان َش میگیرم. بر حسبِ اینها، رابطه یِ بالا میشود

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{D}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n})e^l \wedge e^m \wedge e^n + \mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,k}\,\boldsymbol{R}^k{}_{j\,m\,n}\,e^l \wedge e^m \wedge e^n \\ &\quad - \boldsymbol{R}^i{}_{k\,m\,n}\,\mathbf{\Gamma}^k{}_{l\,j}\,e^m \wedge e^n \wedge e^l, \\ &= (\mathbf{D}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n} + \mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,k}\,\boldsymbol{R}^k{}_{j\,m\,n} - \mathbf{\Gamma}^k{}_{l\,j}\,\boldsymbol{R}^i{}_{k\,m\,n})e^l \wedge e^m \wedge e^n, \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{R}_{m\,n})^i{}_j\,e^l \wedge e^m \wedge e^n, \end{aligned} \tag{2043}$$

که (با توجه به پادتقارنِ $\boldsymbol{R}_{m\,n}$ نسبت به m و n) نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}_{m\,n})^i{}_j + (\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R}_{n\,l})^i{}_j + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R}_{l\,m})^i{}_j = 0, \tag{2044}$$

یا به شکلِ بستِتر،

$$\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}_{m\,n} + \boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R}_{n\,l} + \boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R}_{l\,m} = 0. \tag{2045}$$

شاید به نظر برسد رابطِها یِ

$$(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,m\,n}+(\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,n\,l}+(\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,l\,m}=0, \tag{2046}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{m\,n}+(\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{n\,l}+(\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{l\,m}=0, \tag{2047}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n}+\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,n\,l}+\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,l\,m}=0, \tag{2048}$$

شکل ِ مفصل ِ (2045) اند. چنین نیست. شکل ِ مفصل ِ (2045) رابطه یِ (2044) است: مشتق ِ هموردا یِ مئلفه یِ یک تانسر، لزومَن با مئلفه یِ مشتق ِ هموردا یِ یک تانسر برابر نیست. اشتباه ِ احتمالی ممکن است از اینجا پیش بیاید که در مُرد ِ خمش ِ خمینه، هر چهار-شاخص ِ تانسر ِ خمش از یک گونه اند. وقت ی کلاف ِ برداری کلاف ِ مماس (یا حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ تعداد ی کلاف ِ مماس و هممماس) نباشد، شاخصها یِ اول و دوم ِ خمش شاخصها یِ کلاف، و شاخصها یِ سوم و چهارم ِ خمش شاخصها یِ خمینه اند. در این حالت مشتق ِ هموردا بر شاخصها یِ تار اثر میکند و لابد استفاده یِ نادرست از چیزها یی مثل ِ (2046) یا (2047) یا (2048) به جا یِ (2044) کمتر پیش میئاید. همچنین (2044) و (2045) در میدان-پایِها یِ مختصاتی برقرار َند و در میدان-پایِها یِ دلبخاه لزومَن برقرار نیستند، بر خلاف ِ (2042) که مستقل از پایه است.

اتحاد ِ دوم ِ بیانکی را میشود بر حسب ِ مشتق- ِ-هموردا یِ برونی هم نوشت. $\boldsymbol{R}^i{}_j$ یک دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل است. پس بر حسب ِ میدان-پایه یِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ برا یِ فضا یِ مماس، و $\{(i,e^i)\mid i\}$ که دُگان ِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ است،

$$\mathbf{d}\,\boldsymbol{R}^i{}_j=\boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{R}^i{}_j+\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}\,\boldsymbol{T}^k\wedge e^n. \tag{2049}$$

اتحاد ِ دوم ِ بیانکی میشود

$$\boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{R}^i{}_j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_k\wedge\boldsymbol{R}^k{}_j-\boldsymbol{R}^i{}_k\wedge\boldsymbol{\Gamma}^k{}_j+\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}\,\boldsymbol{T}^k\wedge e^n=0. \tag{2050}$$

اگر $\{(i,e_i)\mid i\}$ و $\{(i,e^i)\mid i\}$ مختصاتی باشند،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{R}^i{}_j&=3\,\mathsf{aSym}(e^l\otimes\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_j),\\&=3\,\mathsf{aSym}[e^l\otimes e^m\otimes e^n\,(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{m\,n}],\\&=\frac{1}{2}\,e^l\wedge e^m\wedge e^n\,(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{m\,n}.\end{aligned} \tag{2051}$$

از اینجا،

$$\mathbf{d}\,\boldsymbol{R}^i{}_j = \frac{1}{2}\,e^l\wedge e^m\wedge e^n[(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_j)_{m\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}]. \tag{2052}$$

به این ترتیب اتحاد ِ دوم ِ بیانکی میشود

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{D}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,k})e^l\wedge e^m\wedge e^n\\
&\quad + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,k}\,\boldsymbol{R}^k{}_{j\,m\,n}\,e^l\wedge e^m\wedge e^n - \boldsymbol{R}^i{}_{k\,m\,n}\,\boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,j}\,e^m\wedge e^n\wedge e^l\\
&\quad + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n},\\
&= [(\mathbf{D}_l\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,k}\,\boldsymbol{R}^k{}_{j\,m\,n} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,j}\,\boldsymbol{R}^i{}_{k\,m\,n}\\
&\quad - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{l\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,k}) + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}]e^l\wedge e^m\wedge e^n,\\
&= [(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,m\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}]e^l\wedge e^m\wedge e^n
\end{aligned} \tag{2053}$$

یا

$$\begin{aligned}
0 &= (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,m\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n}\\
&\quad + (\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,n\,l} + \boldsymbol{T}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\\
&\quad + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,l\,m} + \boldsymbol{T}^k{}_{n\,l}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,m}.
\end{aligned} \tag{2054}$$

برا یِ رسیدن به این رابطه یک میدان-پایه یِ مختصاتی به کار رفت. اما دیده میشود نتیجه مستقل از پایه است. شکل ِ بسته یِ این اتحاد (که همچنان مستقل از پایه است) میشود

$$\begin{aligned}
0 &= (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})_{m\,n} + (\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R})_{n\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})_{l\,m}\\
&\quad + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}_{k\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{R}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^k{}_{n\,l}\,\boldsymbol{R}_{k\,m}.
\end{aligned} \tag{2055}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})_{m\,n} + (\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R})_{n\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})_{l\,m} = 0, \tag{2056}$$

که شکل ِ بسته یِ هم ان (2046) است.

$\boldsymbol{\Gamma}_1$ و $\boldsymbol{\Gamma}_2$ دُ هموستار َند، که

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 - \boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Theta}. \tag{2057}$$

مشتق ِ هموردا یِ متناظر با این هموستارها را با به ترتیب $\boldsymbol{\nabla}_1$ و $\boldsymbol{\nabla}_2$، و خمشها یِ متناظر را با به ترتیب $\boldsymbol{R}_1$ و $\boldsymbol{R}_2$ نشان میدهم. بر اساس ِ آنچه برا یِ هموستارها یِ آفین به دست آمد،

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^i{}_j = \mathbf{d}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_j + \boldsymbol{\Gamma}_1{}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Theta}^k{}_j + \boldsymbol{\Theta}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Gamma}_1{}^k{}_j + \boldsymbol{\Theta}^i{}_k \wedge \boldsymbol{\Theta}^k{}_j. \tag{2058}$$

$\{(i, e_i) \mid i\}$ را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ را دُگان َش میگیرم. بر حسب ِ اینها، رابطه یِ بالا میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^i{}_j &= (\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,j})e^m \wedge e^n + \boldsymbol{\Gamma}_1{}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j}\,e^m \wedge e^n \\ &\quad + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Gamma}_1{}^k{}_{n\,j}\,e^m \wedge e^n + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j}\,e^m \wedge e^n, \\ &= (\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,j} + \boldsymbol{\Gamma}_1{}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Gamma}_1{}^k{}_{m\,j}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,k} \\ &\quad + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j})e^m \wedge e^n, \\ &= [(\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta}_n)^i{}_j + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j}]e^m \wedge e^n.\end{aligned} \tag{2059}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^i{}_{j\,m\,n} &= (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta}_n)^i{}_j - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta}_m)^i{}_j \\ &\quad + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{m\,j}.\end{aligned} \tag{2060}$$

یا بستِتر

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)_{m\,n} = \boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta}_n - \boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta}_m + \boldsymbol{\Theta}_m\,\boldsymbol{\Theta}_n - \boldsymbol{\Theta}_n\,\boldsymbol{\Theta}_m. \tag{2061}$$

همچنین، از

$$(\boldsymbol{\nabla}_m\,\mathfrak{A})^i{}_{n\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_m\,\mathfrak{A}_n)^i{}_j - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{m\,n}\,\mathfrak{A}^i{}_{k\,j} \tag{2062}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^i{}_j &= [(\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,j} + \boldsymbol{\Gamma}_1{}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,j} \\ &\quad + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j}]e^m \wedge e^n.\end{aligned} \tag{2063}$$

$$= \Big[(\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{n\,j} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{T}_1{}^{k}{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{k\,j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{n\,j}\Big]e^m \wedge e^n. \tag{2064}$$

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^{i}{}_{j\,m\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{n\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{m\,j} + \boldsymbol{T}_1{}^{k}{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{k\,j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{m\,j}. \tag{2065}$$

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)_{m\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})_n - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})_m + \boldsymbol{T}_1{}^{k}{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\Theta}_m\,\boldsymbol{\Theta}_n - \boldsymbol{\Theta}_n\,\boldsymbol{\Theta}_m. \tag{2066}$$

$$\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1 = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})_n\,e^m \wedge e^n + \boldsymbol{T}_1{}^{k}\,\boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\Theta} \wedge \boldsymbol{\Theta}, \tag{2067}$$

که $\boldsymbol{T}_1$ پیچش ِ متناظر با $\boldsymbol{\Gamma}_1$ است. (2064) تا (2067) با استفاده از یک میدان-پایه یِ مختصاتی به دست آمدند، اما مستقل از میدان-پایه درست َند، چون دُ-طرف ِ هر یک بر حسب ِ تانسرها یِ مستقل از میدان-پایه نوشته شده. از جمله، اگر پیچش صفر باشد،

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^{i}{}_{j} = [(\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{n\,j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{n\,j}]e^m \wedge e^n. \tag{2068}$$

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^{i}{}_{j\,m\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{n\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^{i}{}_{m\,j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{m\,j}. \tag{2069}$$

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)_{m\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})_n - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})_m + \boldsymbol{\Theta}_m\,\boldsymbol{\Theta}_n - \boldsymbol{\Theta}_n\,\boldsymbol{\Theta}_m. \tag{2070}$$

$$\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1 = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})_n\,e^m \wedge e^n + \boldsymbol{\Theta} \wedge \boldsymbol{\Theta}. \tag{2071}$$

u و v و w میدانها یی برداری یَند و τ یک میدان ِ همبرداری ست. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v[\tau(w)] = \tau(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,w) + (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,\tau)(w) + (\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau)(\boldsymbol{\nabla}_v\,w) + (\boldsymbol{\nabla}_v\,\tau)(\boldsymbol{\nabla}_u\,w). \tag{2072}$$

از اینجا،

$$(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)[\tau(w)] = \tau[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)w] + [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)\tau](w). \tag{2073}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{L}_u\,\mathbf{L}_v - \mathbf{L}_v\,\mathbf{L}_u - \mathbf{L}_{u\,\diamond\,v})[\tau(w)],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})[\tau(w)],\\ &= \tau[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})(w)]\\ &\quad + [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})(\tau)](w). \qquad (2074)\end{aligned}$$

همچنین

$$\tau\,[\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)] = \tau\,[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})w]. \qquad (2075)$$

به این ترتیب،

$$\tau\,[\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)] + [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})(\tau)](w) = 0. \qquad (2076)$$

اگر w و τ از یک نُع بودند (w میدان ِ برداری و τ میدان ِ همبرداری ست)، جمله یِ دوم ِ طرف ِ چپ را هم میشد بر حسب ِ خمش نوشت، با عوض-کردن ِ جا یِ w و τ در جمله یِ اول. در این صورت این رابطه یک ویژِگی یِ تقارنی یِ دیگر ِ خمش میبود: این که $\Big(\tau\,[\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)]\Big)$ نسبت به w و τ هم پادمتقارن است. اما چون w و τ از یک نُع نیستند، چنین پادتقارن ی بیمعنی ست. همخمش ِ $\boldsymbol{S}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v) = [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})(\tau)](w). \qquad (2077)$$

رُشن است که $[\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v)]$ نسبت به u و v پادمتقارن است. همچنین رُشن است که $[\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v)]$ نسبت به w نقطِئی ست. در واقع از (2076) دیده میشود $\boldsymbol{S}$ نسبت به هر چهار-متغیر َش نقطِئی ست. این را به شکل ِ صریح هم میشود دید. اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(w,\tau,\Sigma\,u,v) &= \{[\boldsymbol{\nabla}_{\Sigma\,u}\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_{\Sigma\,u} - \boldsymbol{\nabla}_{(\Sigma\,u)\,\diamond\,v}](\tau)\}(w),\\ &= [\Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,\tau - \boldsymbol{\nabla}_v(\Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau) - \boldsymbol{\nabla}_{\Sigma(u\,\diamond\,v)-(\mathbf{L}_v\,\Sigma)u}\,\tau](w),\\ &= \Sigma\,[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\,\diamond\,v})(\tau)](w)\\ &\quad + [(\mathbf{L}_v\,\Sigma - \boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau)](w). \qquad (2078)\end{aligned}$$

جمله یِ دوم صفر است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{S}(w,\tau,\Sigma\,u,v)=\Sigma\,\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v), \tag{2079}$$

که نشان میدهد $[\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v)]$ نسبت به u نقطِئی ست. کاملَن مشابه دیده میشود $[\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v)]$ نسبت به v هم نقطِئی ست. سرانجام،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v(\Sigma\,\tau)&=\Sigma\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,\tau+(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma)\tau\\&\quad+(\boldsymbol{\nabla}_u\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_v\,\tau)+(\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma)(\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau),\end{aligned} \tag{2080}$$

که نشان میدهد

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)(\Sigma\,\tau)&=\Sigma(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)(\tau)+[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)(\Sigma)]\tau,\\&=\Sigma(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)(\tau)+(\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}\,\Sigma)\tau.\end{aligned} \tag{2081}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(w,\Sigma\,\tau,u,v)&=[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\Sigma\,\tau)](w),\\&=[\Sigma(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u)(\tau)+(\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}\,\Sigma)\tau-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v}(\Sigma\,\tau)](w),\\&=\Sigma[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v-\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u-\boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\tau)](w),\end{aligned} \tag{2082}$$

که نشان میدهد $[\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v)]$ نسبت به τ هم نقطِئی ست.

تانسر ِ $\boldsymbol{S}$ بر حسب ِ مئلفِها میشود

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_i{}^j{}_{k\,l}\,e^i\otimes e_j\otimes e^k\otimes e^l. \tag{2083}$$

همچنین، دُ-فرمها یِ متناظر میشوند

$$\boldsymbol{S}_i{}^j=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{S}_i{}^j{}_{k\,l}\,e^k\wedge e^l. \tag{2084}$$

رابطه یِ (2076) هم میشود

$$\tau[\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)]+[\boldsymbol{S}_{\{2,3,4\}}(\tau,u,v)](w)=0, \tag{2085}$$

یا

$$\tau[\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)] + \tau[\boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(w,u,v)] = 0, \qquad (2086)$$

که همئرز است با

$$\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}} + \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}} = 0. \qquad (2087)$$

شکلِ مئلفِئی یِ اینها هم میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{S}_j{}^i{}_{k\,l} = 0, \qquad (2088)$$

یا بستِتر

$$\boldsymbol{R}^i{}_j + \boldsymbol{S}_j{}^i = 0. \qquad (2089)$$

خمشِ خمینه حالتِ خاص ی از خمشِ کلاف است. به این ترتیب، اگر خمینه تخت باشد خمشِ خمینه صفر است. بر عکس اگر خمشِ خمینه صفر باشد و خمینه ساده-همبند باشد، خمینه تخت است. اگر خمشِ خمینه صفر باشد، میگویم خمینه مُضعَن-تخت (یا ریمان-تخت) است. اگر خمشِ خمینه در یک نقطه صفر باشد، میگویم خمینه در آن نقطه تخت (ریمان-تخت) است.

به سادِگی دیده میشود این گزارِها همئرز َند:

- خمینه یِ $\mathbb{M}$ در یک همسایِگی یِ نقطه یِ x_0 ریمان-تخت است، و پیچشِ آن صفر است.
- خمینه یِ $\mathbb{M}$ در یک همسایِگی یِ نقطه یِ x_0 یک میدان-پایه یِ مختصاتی دارد که هموستارِ متناظر با آن صفر است.

53 اتحادِ اولِ بیانکی

خمش نسبت به متغیرها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است. متغیرها یِ سوم و چهارمِ خمش در فضا یِ مماس َند. متغیرِ دومِ خمش در کلاف است، که حتا اگر کلاف برداری باشد هم لزومَن فضا یِ مماس

نیست. پس در حالت ِ کلی (پاد)تقارن ِ خمش نسبت به متغیر ِ دوم و سوم (یا چهارم) َش معنی ندارد. متغیرها یِ دوم و سوم و چهارم ِ خمش ِ خمینه در فضا یِ مماس َند. پس (پاد)تقارن ِ خمش ِ خمینه نسبت به متغیرها یِ دوم تا چهارم َش معنی دارد.

u و v و w میدانها یی برداری یَند. از

$$\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v) = \boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, u - u \diamond v \tag{1967}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_w(\boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, u - u \diamond v) = \boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]. \tag{2090}$$

با استفاده از این، و

$$\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v) = (\boldsymbol{\nabla}_u\, \boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\, \boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u \diamond v})w, \tag{2040}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)] + \boldsymbol{\nabla}_u[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w)] + \boldsymbol{\nabla}_v[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)],\\
&= \boldsymbol{\nabla}_w\, \boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_w\, \boldsymbol{\nabla}_v\, u - \boldsymbol{\nabla}_w(u \diamond v)\\
&\quad + \boldsymbol{\nabla}_u\, \boldsymbol{\nabla}_v\, w - \boldsymbol{\nabla}_u\, \boldsymbol{\nabla}_w\, v - \boldsymbol{\nabla}_u(v \diamond w)\\
&\quad + \boldsymbol{\nabla}_v\, \boldsymbol{\nabla}_w\, u - \boldsymbol{\nabla}_v\, \boldsymbol{\nabla}_u\, w - \boldsymbol{\nabla}_v(w \diamond u),\\
&= \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(v,w,u) + \boldsymbol{\nabla}_{w \diamond u}\, v - \boldsymbol{\nabla}_v(w \diamond u)\\
&\quad + \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v) + \boldsymbol{\nabla}_{u \diamond v}\, w - \boldsymbol{\nabla}_w(u \diamond v)\\
&\quad + \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(u,v,w) + \boldsymbol{\nabla}_{v \diamond w}\, u - \boldsymbol{\nabla}_u(v \diamond w),\\
&= \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(v,w,u) + \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v) + \boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(u,v,w)\\
&\quad - \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v, w \diamond u) - v \diamond (w \diamond u)\\
&\quad - \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w, u \diamond v) - w \diamond (u \diamond v)\\
&\quad - \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u, v \diamond w) - u \diamond (v \diamond w),
\end{aligned} \tag{2091}$$

که در آخرین مرحله باز هم (1967) به کار رفته. اتحاد ِ یاکُبی این است که مجموع ِ جابِجاگرها یِ طرف ِ راست ِ (2091) صفر است. پس (2091) یعنی

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(u,v,w)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(v,w,u),\\
&=\boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]+\boldsymbol{\nabla}_u[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w)]+\boldsymbol{\nabla}_v[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u\diamond v)+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v\diamond w)+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w\diamond u).
\end{aligned}\tag{2092}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]&=(\boldsymbol{\nabla}_w\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(u,v)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(\boldsymbol{\nabla}_w u,v)+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,\boldsymbol{\nabla}_w v),
\end{aligned}\tag{2093}$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]+\boldsymbol{\nabla}_u[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w)]+\boldsymbol{\nabla}_v[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)],\\
&=(\boldsymbol{\nabla}_w\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(u,v)+(\boldsymbol{\nabla}_u\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(v,w)+(\boldsymbol{\nabla}_v\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(w,u)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(\boldsymbol{\nabla}_u v-\boldsymbol{\nabla}_v u,w)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(\boldsymbol{\nabla}_v w-\boldsymbol{\nabla}_w v,u)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(\boldsymbol{\nabla}_w u-\boldsymbol{\nabla}_u w,v).
\end{aligned}\tag{2094}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_w[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]+\boldsymbol{\nabla}_u[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w)]+\boldsymbol{\nabla}_v[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u\diamond v)+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v\diamond w)+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w\diamond u),\\
&=(\boldsymbol{\nabla}_w\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(u,v)+(\boldsymbol{\nabla}_u\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(v,w)+(\boldsymbol{\nabla}_v\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(w,u)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v),w]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w),u]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u),v].
\end{aligned}\tag{2095}$$

از ترکیب ِ این با (2092) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(u,v,w)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(v,w,u)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v),\\
&=(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(v,w)+(\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(w,u)+(\boldsymbol{\nabla}_w\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(u,v)\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w),u]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u),v]\\
&\quad+\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v),w].
\end{aligned}\tag{2096}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(u,v,w)+\boldsymbol{R}_{\{2,3,4\}}(v,w,u)=0.\tag{2097}$$

به (2096) یا (2097) اتحاد ِ اول ِ بیانکی میگویند. این اتحاد بخش ِ پادمتقارن ِ خمش نسبت به متغیرها یِ دوم تا چهارم َش را به پیچش مربوط میکند.

با استفاده از

$$\boldsymbol{T}^i=\mathbf{d}\,e^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge e^j,\tag{1968}$$

$$\boldsymbol{R}^i{}_j=\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_k\wedge\boldsymbol{\Gamma}^k{}_j,\tag{2021}$$

یک شکل ِ دیگر برا یِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی به دست میئاید. از (2021) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^i{}_j\wedge e^j&=(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j)\wedge e^j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_k\wedge\boldsymbol{\Gamma}^k{}_j\wedge e^j,\\
&=\mathbf{d}(\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge e^j)+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge\mathbf{d}\,e^j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\wedge e^k,\\
&=\mathbf{d}(\mathbf{d}\,e^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge e^j)+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge(\mathbf{d}\,e^j+\boldsymbol{\Gamma}^j{}_k\wedge e^k),
\end{aligned}\tag{2098}$$

که در آخرین مرحله از این استفاده شده که $\mathbf{d}^2$ صفر است. از این و (1968) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_j\wedge e^j=\mathbf{d}\,\boldsymbol{T}^i+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_j\wedge\boldsymbol{T}^j.\tag{2099}$$

این را میشود با

$$\boldsymbol{\delta}^2\,e^i=(-\boldsymbol{R}^i{}_j+\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k)\wedge e^j\tag{2029}$$

مقایسه کرد، که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{R}^i{}_j \wedge e^j = \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j}\,\boldsymbol{T}^k \wedge e^j - \boldsymbol{\delta}^2\,e^i. \tag{2100}$$

البته از هر-دُ دیده میشود اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{R}^i{}_j \wedge e^j = 0. \tag{2030}$$

شکل ِ مفصل ِ (2099) میشود

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^i{}_j \wedge e^j &= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l})e^j \wedge e^k \wedge e^l + \boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}(\mathbf{d}\,e^k) \wedge e^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,n}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l}\,e^j \wedge e^k \wedge e^l, \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,n}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l})\,e^j \wedge e^k \wedge e^l + \boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}(\boldsymbol{T}^k - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_n\,e^n) \wedge e^l, \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,n}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} - 2\,\boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{\Gamma}^n{}_{j\,k})e^j \wedge e^k \wedge e^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k}\,e^j \wedge e^k \wedge e^l \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,n}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} - \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{\Gamma}^n{}_{j\,k} - \boldsymbol{T}^i{}_{k\,n}\,\boldsymbol{\Gamma}^n{}_{j\,l})e^j \wedge e^k \wedge e^l \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_j, e_k)]^n\,e^j \wedge e^k \wedge e^l \\
&= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_j, e_k), e_l]\}e^j \wedge e^k \wedge e^l,
\end{aligned} \tag{2101}$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} &= (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} \\
&\quad + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_j, e_k), e_l] \\
&\quad + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_k, e_l), e_j] \\
&\quad + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_l, e_j), e_k].
\end{aligned} \tag{2102}$$

دیده میشود این هم ان (2096) برا یِ بردار- ِ-پایِها یِ e_j و e_k و e_l به جا یِ u و v و w است.
باز-شده یِ این رابطه میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k}$$
$$+ \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}. \quad (2103)$$

رابطِها یِ

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T}^i)_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T}^i)_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T}^i)_{j\,k}$$
$$+ \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}, \quad (2104)$$

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T}_{k\,l})^i + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T}_{l\,j})^i + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T}_{j\,k})^i$$
$$+ \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}, \quad (2105)$$

با (2103) همئرز نیستند، و باز-شده یِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی (2103) است، نَ (2104) یا (2105).

اگر پیچش صفر باشد هم

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = 0, \quad (2106)$$

که هم ان (2097) برا یِ بردار- ِ-پایِها یِ e_j و e_k و e_l به جا یِ u و v و w است.

از رابطه یِ همخمش با خمش دیده میشود اتحاد ِ اول ِ بیانکی را بر حسب ِ همخمش هم میشود نوشت. (2096) میشود

$$0 = \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(u,v,w) + \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(v,w,u) + \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(w,u,v),$$
$$+ (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(v,w) + (\boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(w,u) + (\boldsymbol{\nabla}_w\,\boldsymbol{T})_{\{2,3\}}(u,v)$$
$$+ \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(v,w),u]$$
$$+ \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u),v]$$
$$+ \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v),w], \quad (2107)$$

و اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(u,v,w) + \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(v,w,u) + \boldsymbol{S}_{\{1,3,4\}}(w,u,v) = 0. \quad (2108)$$

همچنین،

$$0 = \boldsymbol{S}_j{}^i \wedge e^j + \mathbf{d}\,\boldsymbol{T}^i + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_j \wedge \boldsymbol{T}^j, \tag{2109}$$

یا

$$\begin{aligned} 0 = {} & \boldsymbol{S}_j{}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{S}_k{}^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{S}_l{}^i{}_{j\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} \\ & + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_j, e_k), e_l] \\ & + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_k, e_l), e_j] \\ & + \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_l, e_j), e_k], \end{aligned} \tag{2110}$$

که باز-شده اَش میشود

$$\begin{aligned} 0 = {} & \boldsymbol{S}_j{}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{S}_k{}^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{S}_l{}^i{}_{j\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} \\ & + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}, \end{aligned} \tag{2111}$$

یا

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}_j{}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{S}_k{}^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{S}_l{}^i{}_{j\,k} = {} & -(\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} \\ & - \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} - \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} - \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}. \end{aligned} \tag{2112}$$

و اگر پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{S}_j{}^i \wedge e^j = 0, \tag{2113}$$

یا

$$\boldsymbol{S}_j{}^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{S}_k{}^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{S}_l{}^i{}_{j\,k} = 0. \tag{2114}$$

این که خمش در یک نقطه صفر باشد، تضمین نمیکند پیچش هم در آن نقطه صفر است. از اتحادِ

اول ِ بیانکی نتیجه میشود اگر در یک نقطه خمش صفر باشد، آنگاه

$$0 = (\boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k \boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l \boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}. \tag{2115}$$

از این نتیجه نمیشود پیچش صفر است. قبلَن دیده شد ممکن است در یک همسایِگی یِ نقطه یِ x هموستار ِ متناظر با یک میدان-پایه صفر باشد، اما پیچش صفر نباشد. از این که هموستار در یک مجموعه یِ باز صفر باشد نتیجه میشود تانسر ِ خمش هم در آن مجموعه صفر است. به این ترتیب، حالت ی هست که در یک مجموعه یِ باز هموستار ِ متناظر با یک میدان-پایه (e) صفر است، و در نتیجه تانسر ِ خمش صفر است، اما پیچش صفر نیست. در این حالت پیچش صفر است، اگر و تنها اگر میدان-پایه یِ e مختصاتی باشد. همچنین، اگر در یک همسایِگی یِ x خمش صفر باشد (خمینه مُضعَن تخت باشد) یک میدان-پایه (e) هست که هموستار ِ متناظر با e در آن همسایِگی صفر است. باز هم، پیچش در آن همسایِگی صفر است، اگر و تنها اگر e مختصاتی باشد. حتا اگر خمینه (سراسری) تخت باشد، لازم نیست پیچش صفر باشد. یک مثال این است که خمینه ساده-همبند باشد، و هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ e صفر باشد. در این صورت،

$$\boldsymbol{T}^i = \mathbf{d}\,e^i, \tag{2116}$$

و لازم نیست $\boldsymbol{T}^i$ صفر باشد. به سادِگی میشود تحقیق کرد در این حالت (2115) براورده میشود. برا یِ اثبات، این را به کار میبرم که

$$(\boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} = \mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}, \tag{2117}$$

چون مشتق ِ هموردا یِ e_n ها و e^n ها صفر است. از (2116) نتیجه میشود

$$\mathbf{d}\,\boldsymbol{T}^i = 0. \tag{2118}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{d}\,\boldsymbol{T}^i, \\ &= \frac{1}{2}\{(\mathbf{D}_j\,\boldsymbol{T}^i{}_{k\,l})e^j \wedge e^k \wedge e^l + \boldsymbol{T}^i{}_{k\,l}[(\mathbf{d}\,e^k) \wedge e^l - e^k \wedge (\mathbf{d}\,e^l)]\}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{T})^i{}_{k\,l}\, e^j \wedge e^k \wedge e^l + 2\,\boldsymbol{T}^i{}_{m\,l}\,\boldsymbol{T}^m \wedge e^l\}$$
$$= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{\nabla}_j \boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{m\,l}\,\boldsymbol{T}^m{}_{j\,k}\} e^j \wedge e^k \wedge e^l, \qquad (2119)$$

که هم ان (2115) است. البته رُشن است که رابطه یِ (2116) یا نتیجه اَش (2118) خاص ِ میدان-پایه ای ست که هموستار ِ متناظر با آن صفر است. اما وقت ی خمش صفر باشد چنین میدان-پایه ای هست، و اتحاد ِ اول ِ بیانکی چون مستقل از میدان-پایه است، اگر در یک میدان-پایه برقرار باشد در هر میدان-پایه ای برقرار است. پس این که نشان داده شد پیچش (همراه با خمش ِ صفر) در یک میدان-پایه یِ خاص اتحاد ِ اول ِ بیانکی را بر میثاورَد از کلیت ِ اثبات نمیکاهد.

54 تانسر ِ ریچی

خمش ِ یک کلاف ِ دلبخاه بر دُ بردار در فضا یِ مماس ِ خمینه-یِ-پایه و یک نقطه از کلاف اثر میکند و یک بردار در فضا یِ مماس بر یک تار میدهد . به زبان ِ شاخصها، خمش دُ شاخص از جنس ِ فضا یِ مماس بر خمینه-یِ-پایه، و یک شاخص از جنس ِ فضا یِ مماس بر تار دارد: مئلفِها یِ خمش به شکل ِ $F^\alpha{}_{i\,j}(x,y)$ اند، که x در خمینه-یِ-پایه و y در تار است، و شاخصها یِ لاتین و یونانی متناظر با به ترتیب خمینه-یِ-پایه و تار َند. اگر کلاف برداری و هموستار آفین باشد، تابع ِ خطی یِ متناظر با خمش بر دُ بردار در فضا یِ مماس بر خمینه-یِ-پایه و یک بردار در کلاف اثر میکند و یک بردار در فضا یِ مماس بر تار میدهد، که متناظر با یک بردار در کلاف است. به زبان ِ شاخصها، خمش دُ شاخص از جنس ِ فضا یِ مماس بر خمینه-یِ-پایه، و دُ شاخص از جنس ِ فضا یِ مماس بر تار (یا خُد ِ تار) دارد: مئلفِها یِ خمش به شکل ِ $\check{F}^\alpha{}_{\beta\,i\,j}(x)$ اند. در این حالت یک ادغام برا یِ $\check{F}$ ممکن است، که نتیجه اَش یک دُ-فرم است که بر دُ بردار در فضا یِ مماس بر خمینه-یِ-پایه اثر میکند. مئلفِها یِ ادغام-شده یِ خمش $\check{F}^\alpha{}_{\alpha\,i\,j}$ اند، که هم ان $\grave{f}_{i\,j}$ اند.

برا یِ خمش ِ خمینه، چون فضا یِ مماس بر خمینه-یِ-پایه هم ان تار ِ فضا یِ مماس است، ادغامها یِ دیگر ی هم برا یِ خمش ممکن است. مئلفِها یِ خمش به شکل ِ $\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}$ اند. شاخص ِ اول را میشود با هر یک از شاخصها یِ دوم، سوم، یا چهارم ادغام کرد. نتیجه یِ ادغام ِ شاخص ِ اول

با شاخص ِ دوم در خمش تارَد ِ خمش است:

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} = \boldsymbol{R}^{i}{}_{i\,k\,l}. \tag{2033}$$

برا یِ دُ-ادغام ِ دیگر، با توجه به این که $\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l}$ نسبت به k و l پادمتقارن است،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,i} = -\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,i\,k}. \tag{2120}$$

پس نتیجه یِ ادغام ِ شاخص ِ اول با شاخص ِ چهارم مستقل از نتیجه یِ ادغام ِ شاخص ِ اول با شاخص ِ سوم نیست. به این ترتیب، یک ادغام ِ مستقل ِ دیگر بر خمش ممکن است. تعریف میکنم

$$\mathsf{R}_{i\,j} = \boldsymbol{R}^{k}{}_{i\,k\,j}. \tag{2121}$$

به R تانسر ِ ریچی میگویند.

از

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} &= (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{j\,k}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j},\end{aligned} \tag{2103}$$

(اتحاد ِ اول ِ بیانکی) دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,i\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{i\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,i} &= (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{j\,i}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{j\,i} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{i\,l} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j},\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j}.\end{aligned} \tag{2122}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j} + \grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j}. \tag{2123}$$

از جمله دیده میشود اگر پیچش صفر باشد،

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} = \mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j}. \tag{2124}$$

$\boldsymbol{\Gamma}_1$ و $\boldsymbol{\Gamma}_2$ دُ هموستار َند، که

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 - \boldsymbol{\Gamma}_1 = \boldsymbol{\Theta}. \tag{2057}$$

مشتق ِ هموردا یِ متناظر با این هموستارها را با به ترتیب $\boldsymbol{\nabla}_1$ و $\boldsymbol{\nabla}_2$، و خمشها یِ متناظر را با به ترتیب $\boldsymbol{R}_1$ و $\boldsymbol{R}_2$ نشان میدهم. پیچش ِ متناظر با $\boldsymbol{\Gamma}_1$ را با $\boldsymbol{T}_1$ نشان میدهم. بر اساس ِ آنچه برا یِ $(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)$ به دست آمد،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^i{}_{j\,m\,n} &= (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{m\,j} + \boldsymbol{T}_1{}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,j} \\ &\quad + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{m\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{m\,j},\end{aligned} \tag{2065}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1 &= \boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_i + \boldsymbol{T}^k\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,i}, \\ &= \mathbf{d}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_i.\end{aligned} \tag{2125}$$

$\{(i, e_i) \mid i\}$ را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ را دُگان َش میگیرم. بر حسب ِ اینها، رابطه یِ بالا میشود

$$\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1 = (\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,i})\,e^m \wedge e^n, \tag{2126}$$

یا

$$\begin{aligned}(\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1)_{m\,n} &= (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,i} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{m\,i} + \boldsymbol{T}_1{}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,i}, \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta}_n)^i{}_i - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta}_m)^i{}_i.\end{aligned} \tag{2127}$$

رُشن است که برابری یِ اول مستقل از میدان-پایه درست است. از جمله، اگر پیچش صفر باشد،

$$\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1 = \boldsymbol{\delta}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_i. \tag{2128}$$

$$(\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1)_{m\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,m}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,i} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{m\,i}, \tag{2129}$$

و با یک میدان-پایه یِ مختصاتی،

$$(\grave{\boldsymbol{R}}_2 - \grave{\boldsymbol{R}}_1)_{m\,n} = (\mathbf{D}_m\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,i} - (\mathbf{D}_n\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{m\,i}. \tag{2130}$$

برا یِ تانسر ِ ریچی هم،

$$\begin{aligned}(\mathsf{R}_2 - \mathsf{R}_1)_{j\,n} = (\boldsymbol{\nabla}_{1\,i}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_{1\,n}\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{i\,j} + \boldsymbol{T}_1{}^k{}_{i\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,j}\\ + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{\Theta}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{\Theta}^k{}_{i\,j}.\end{aligned} \tag{2131}$$

میگویم خمینه ریچی-تخت است، اگر تانسر ِ ریچی صفر باشد. همچنین، اگر تانسر ِ ریچی در یک نقطه صفر باشد، میگویم خمینه در آن نقطه ریچی-تخت است. رُشن است که ریمان-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) ریچی-تخت-بودن (در آن نقطه یا ناحیه) را نتیجه میدهد.

به این ترتیب، به سادگی دیده میشود اگر خمینه یِ $\mathbb{M}$ یک نقشه یِ ϕ داشته باشد که هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با این نقشه صفر باشد، آنگاه خمش و پیچش ِ خمینه در دامنه یِ ϕ صفر َند. پس تانسر ِ ریچی هم در دامنه یِ ϕ صفر است. یعنی $\mathbb{M}$ در دامنه یِ ϕ ریچی-تخت است. اما در حالت ِ کلی از ریچی-تخت-بودن در یک ناحیه ریمان-تخت-بودن در آن ناحیه نتیجه نمیشود. پس ممکن است تانسر ِ ریچی در یک ناحیه یِ باز صفر باشد، حتا پیچش هم در آن ناحیه صفر باشد، ولی در آن ناحیه میدان-پایه ای نباشد که هموستار ِ متناظر با آن صفر باشد، حتا مُضعَن.

6

خمینه یِ دُ- فرمدار

55 میدان- ِ-دُ-فرم ِ ناتکین

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ هموار است. میگویم میدان- ِ-دُ-فرم ِ g ناتکین است، اگر در هر x از خمینه $g(x)$ ناتکین باشد. $g(x)$ ناتکین است، اگر از

$$[g(x)](\cdot, v) = 0, \tag{2132}$$

نتیجه شود v صفر است. دیده میشود ناتکین-بودن ِ یک دُ-فرم با این همئرز است که ماتریس ِ آن دُ-فرم ناتکین باشد. همچنین دیده میشود، تعریف ِ ناتکین-بودن ِ $g(x)$ با این همئرز است که از

$$[g(x)](v, \cdot) = 0, \tag{2133}$$

نتیجه شود v صفر است.

$\mathbb{M}$ یک خمینه است که یک میدان- ِ-دُ-فرم ِ ناتکین ِ g بر آن هست. به $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار میگویم. سادِتر این که میگویم $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است.

با هر دُ-فرم ِ ناتکین بر یک فضا یِ خطی یِ باپایان-بُعدی، میشود بین ِ آن فضا و دُگان َش یک یکریختی یِ پوشا برقرار کرد. با یک میدان ِدُ-فرم ِ ناتکین هم میشود بین ِ فضا یِ مماس و فضا یِ هممماس یک یکریختی یِ پوشا برقرار کرد. اثر ِ میدان ِدُ-فرم ِ ناتکین ِ g بر میدان ِ برداری یِ v را

میشود $g(\bullet, v)$ یا $g(v, \bullet)$ گرفت. اگر g متقارن باشد، این دُ-شکل یکسان َند. در حالت ِ کلی (که g لزومَن متقارن نیست) تعریف میکنم

$$\underset{\sim}{g}\, v = g(\bullet, v). \tag{2134}$$

دیده میشود

$$\underset{\sim}{g}_{i\,j} = g_{i\,j}. \tag{2135}$$

یکریختی یی بین ِ فضاها یِ مماس و هممماس که با استفاده از g ساخته میشود $\underset{\sim}{g}$ است. بر حسب ِ مئلفِها، اگر v یک بردار باشد،

$$(\underset{\sim}{g}\, v)_i = g_{i\,j}\, v^j. \tag{2136}$$

مانسته یِ این تناظر را برا یِ تانسرها یِ $(r, 0)$ هم میشود به کار برد. از جمله اگر S یک تانسر ِ $(2, 0)$ باشد،

$$[(\underset{\sim}{g} \otimes \underset{\sim}{g})S]_{i\,j} = g_{i\,k}\, g_{j\,l}\, S^{k\,l}. \tag{2137}$$

از جمله دنبال ِ S ی میگردم که اثر ِ $(\underset{\sim}{g} \otimes \underset{\sim}{g})$ بر آن خُد ِ g باشد:

$$g_{i\,k}\, g_{j\,l}\, S^{k\,l} = g_{i\,j}. \tag{2138}$$

این یعنی

$$g_{j\,l}\, S^{k\,l} = \delta^k_j, \tag{2139}$$

یا

$$S^{k\,l} = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{l\,k}. \tag{2140}$$

با استفاده از دُ-فرم ِ ناتکین ِ g بر فضا یِ $\mathbb{V}$، دُ-فرم ِ ناتکین ِ h بر $\mathbb{V}^*$ را چنین تعریف میکنم.

$$h(\underset{\sim}{g}\, u, \underset{\sim}{g}\, v) = g(u, v). \tag{2141}$$

دیده میشود این تعریف همئرز است با

$$\underset{\sim}{g}^* \, \underset{\sim}{h} \, \underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{g}, \tag{2142}$$

یا

$$\underset{\sim}{h} = (\underset{\sim}{g}^{-1})^*. \tag{2143}$$

همچنین، رُشن است که

$$\underset{\sim}{g} = (\underset{\sim}{h}^{-1})^*, \tag{2144}$$

یا

$$\underset{\sim}{h}^* \, \underset{\sim}{g} \, \underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{h}, \tag{2145}$$

و اگر σ و ω در $\mathbb{V}^*$ باشند،

$$g(h\,\sigma, h\,\omega) = h(\sigma, \omega). \tag{2146}$$

ضمنَن،

$$\underset{\sim}{g} \, \underset{\sim}{h} \, \underset{\sim}{g}^* = \underset{\sim}{g}. \tag{2147}$$

$$\underset{\sim}{h} \, \underset{\sim}{g} \, \underset{\sim}{h}^* = \underset{\sim}{h}. \tag{2148}$$

به این ترتیب،

$$h(\underset{\sim}{g}^* \, u, \underset{\sim}{g}^* \, v) = g(u, v). \tag{2149}$$

$$g(\underset{\sim}{h}^* \, \sigma, \underset{\sim}{h}^* \, \omega) = h(\sigma, \omega). \tag{2150}$$

یا

$$h(\underset{\sim}{h}^{-1} \, u, \underset{\sim}{h}^{-1} \, v) = g(u, v). \tag{2151}$$

$$g(\underset{\sim}{g}^{-1} \, \sigma, \underset{\sim}{g}^{-1} \, \omega) = h(\sigma, \omega). \tag{2152}$$

به h دُ-فرم ِ القاییده از g میگوییم. دیده میشود اگر h دُ-فرم ِ القاییده از g باشد، g هم دُ-فرم ِ القاییده از h است. همچنین، دیده میشود g متقارن (پادمتقارن) است، اگر و تنها اگر دُ-فرم ِ القاییده از آن متقارن (پادمتقارن) باشد.

میگوییم دُ-فرم ِ g شبه- ِ-متقارن است، اگر g متقارن یا پادمتقارن باشد. وقت ی g شبه- ِ-متقارن است، میگوییم تقارنی یِ g صفر (یک) است، اگر g متقارن (پادمتقارن) باشد. تقارنی یِ g را با $\mathsf{sy}(g)$ نشان میدهم:

$$g_{j\,i} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\, g_{i\,j}. \tag{2153}$$

رُشن است که اگر g شبه- ِ-متقارن باشد h (دُ-فرم ِ القاییده از g) هم شبه- ِ-متقارن خاهد بود، و

$$\mathsf{sy}(h) = \mathsf{sy}(g). \tag{2154}$$

با استفاده از یک دُ-فرم ِ ناتکین میشود یک بردار را به یک همبردار نگاشت. با استفاده از وارون ِ این تابع، میشود یک همبردار را به یک بردار نگاشت. با ترکیب ِ این عملها میشود از یک تانسر ِ (r,s) یک تانسر ِ (r',s') ساخت، که $(r'+s')$ با $(r+s)$ برابر است. g یک دُ-فرم ِ ناتکین است و T تانسر ی در $(\mathbb{V}_1\otimes\cdots\mathbb{V}_{r+s})$ است، که هر یک از $\mathbb{V}_i$ ها یا $\mathbb{V}$ است یا $\mathbb{V}^*$ (یا فضا یِ مماس است یا فضا یِ هممماس). تانسر ِ T' را چنین تعریف میکنم.

$$T' = (\underset{\sim}{g}^{n_1}\otimes\cdots\otimes\underset{\sim}{g}^{n_{r+s}})T, \tag{2155}$$

که n_i صفر یا یک است اگر $\mathbb{V}_i$ برابر ِ $\mathbb{V}$ باشد، و صفر یا منفی یِ یک است اگر $\mathbb{V}_i$ برابر ِ $\mathbb{V}^*$ باشد. از جمله دیده میشود

$$\begin{aligned}
[(\cdots\otimes\underset{\sim}{g}\otimes\cdots)(T_1)]^{\cdots}_{\cdots i\cdots} &= \underset{\sim}{g}_{i\,j}\,(T_1)^{\cdots j\cdots}_{\cdots\cdots},\\
[(\cdots\otimes\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes\cdots)(T_2)]^{\cdots i\cdots}_{\cdots\cdots} &= (\underset{\sim}{g}^{-1})^{i\,j}\,(T_2)^{\cdots}_{\cdots j\cdots}.
\end{aligned} \tag{2156}$$

با یک نمادگذاری یِ سادِتر، این رابطِها را چنین مینویسم.

$$\begin{aligned}
(T_1)^{\cdots}_{\cdots i\cdots} &= \underset{\sim}{g}_{i\,j}\,(T_1)^{\cdots j\cdots}_{\cdots\cdots},\\
(T_2)^{\cdots i\cdots}_{\cdots\cdots} &= (\underset{\sim}{g}^{-1})^{i\,j}\,(T_2)^{\cdots}_{\cdots j\cdots}.
\end{aligned} \tag{2157}$$

رُشن است که اگر g شبه- ِ-متقارن باشد $\underset{\sim}{g}$ و $\underset{\sim}{g}^{-1}$ هم چنین َند، و

$$(\underset{\sim}{g}^{-1})^{j\,i} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^{i\,j}. \tag{2158}$$

اثر ِ $\underset{\sim}{g}$ یا وارون َش را میشود بر خُد ِ g هم در نظر گرفت. از جمله نتیجه میشود

$$g^{i\,j} = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{i\,k}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^{j\,l}\,g_{k\,l}, \tag{2159}$$

یا

$$g^{i\,j} = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{j\,i}. \tag{2160}$$

به این ترتیب، اثر ِ $(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes\underset{\sim}{g}^{-1})$ بر g هم ان دُ-فرم ِ القاییده از g است. یعنی اگر h دُ-فرم ِ القاییده از g باشد،

$$g^{i\,j} = h^{i\,j}. \tag{2161}$$

همچنین،

$$g^{i}{}_{j} = \delta^{i}_{j}. \tag{2162}$$

البته رُشن است که اگر g شبه- ِ-متقارن باشد، ضمنَن

$$g^{i\,j} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^{i\,j}. \tag{2163}$$

$$g_{j}{}^{i} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\delta^{i}_{j}. \tag{2164}$$

یک شکل ِ رابطِها یِ (2157) میشود

$$\begin{aligned}(T_1)^{\cdots}_{\cdots i}{}^{\cdots}_{\cdots} &= g_{i\,j}\,(T_1)^{\cdots}_{\cdots}{}^{j}{}^{\cdots}_{\cdots},\\ (T_2)^{\cdots}_{\cdots}{}^{i}{}^{\cdots}_{\cdots} &= g^{j\,i}\,(T_2)^{\cdots}_{\cdots j}{}^{\cdots}_{\cdots}.\end{aligned} \tag{2165}$$

با توجه به این شکل، اثر ِ $\underset{\sim}{g}$ یا وارون ِ آن بر یک تانسر را پایین یا بالا-بردن ِ شاخص ِ (ها یِ) آن تانسر هم میگویند. از جمله، دُ-فرم ِ القاییده از g در واقع هم ان g با شاخصها یِ بالا-رفته است.

دیده میشود اگر $\{(i,e_i)\mid i\}$ یک پایه یِ فضا یِ خطی یِ $\mathbb{V}$ (فضا یِ مماس) و $\{(i,e^i)\mid i\}$ دُگان ِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ باشد، و g یک دُ-فرم ِ ناتکین بر $\mathbb{V}$ باشد،

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{g}\, e_i &= g_{j\,i}\, e^j, \\ e^j &= g^{j\,i}(\underset{\sim}{g}\, e_i), \end{aligned} \tag{2166}$$

و نیز،

$$\begin{aligned} (\underset{\sim}{g}\, e_j)\otimes e^j &= g_{i\,j}\, e^i\otimes e^j, \\ &= g^i{}_j(\underset{\sim}{g}\, e_i)\otimes e^j, \\ &= g_i{}^j\, e^i\otimes(\underset{\sim}{g}\, e_j), \\ &= g^{j\,i}(\underset{\sim}{g}\, e_j)\otimes(\underset{\sim}{g}\, e_i). \end{aligned} \tag{2167}$$

همچنین، اگر u و v بردار باشند،

$$\begin{aligned} g(u,v) &= g_{i\,j}\, u^i\, v^j, \\ &= u^i\, v_i. \end{aligned} \tag{2168}$$

و،

$$\begin{aligned} u_i\, v^i &= g(v,u), \\ &= (\underset{\sim}{g}\, u)v, \\ &= (\underset{\sim}{g}^*\, v)u, \\ &= g[u,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\underset{\sim}{g}^*)v]. \end{aligned} \tag{2169}$$

در حالت ِ کلی $(u^i\, v_i)$ با $(u_i\, v^i)$ برابر نیست. چنین است، اگر g متقارن باشد. در واقع در حالت ِ کلی،

$$\begin{aligned} u_i\, v^i &= u^i\,[(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\underset{\sim}{g}^*)v]_i, \\ &= u^i\, g^j{}_i\, g_{k\,j}\, v^k, \end{aligned} \tag{2170}$$

و اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$u_i\, v^i = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\, u^i\, v_i. \tag{2171}$$

همچنین، اگر σ و ω همبردار باشند، و h دُ-فرم ِ القاییده از g باشد،

$$\begin{aligned} h(\sigma,\omega) &= g^{i\,j}\,\sigma_i\,\omega_j, \\ &= \sigma^j\,\omega_j. \end{aligned} \tag{2172}$$

با استفاده از یک دُ-فرم ِ ناتکین بر $\mathbb{V}$ (و در صورت ِ لزوم دُ-فرم ِ القاییده از آن بر $\mathbb{V}^*$)، برا یِ نگاشت- ِ-خطیها یی که دامنه یِشان $\mathbb{V}$ یا $\mathbb{V}^*$ است و در $\mathbb{V}$ یا $\mathbb{V}^*$ مقدار میگیرند ترانهاده تعریف میکنم. ترانهاده یِ T را با T^{t} نشان میدهم. اگر T در $\mathsf{LF}(\mathbb{V}_2;\mathbb{V}_1)$ باشد (که هر یک از $\mathbb{V}_i$ ها $\mathbb{V}$ یا $\mathbb{V}^*$ است)، T^{t} را در $\mathsf{LF}(\mathbb{V}_1;\mathbb{V}_2)$ تعریف میکنم، چنان که

$$g_1(u, T^{\mathrm{t}}\, v) = g_2(T\, u, v). \tag{2173}$$

g_i دُ-فرم ِ متناظر با $\mathbb{V}_i$ است: g_i هم ان g است، اگر $\mathbb{V}_i$ برابر ِ $\mathbb{V}$ باشد؛ و دُ-فرم ِ القاییده از g است، اگر $\mathbb{V}_i$ برابر ِ $\mathbb{V}^*$ باشد. از تعریف ِ T^{t} دیده میشود

$$\underset{\sim}{g}_1\, T^{\mathrm{t}} = T^*\, \underset{\sim}{g}_2, \tag{2174}$$

یا

$$T^{\mathrm{t}} = \underset{\sim}{g}_1^{-1}\, T^*\, \underset{\sim}{g}_2. \tag{2175}$$

شکل ِ مثلفِئی یِ این رابطه، برا یِ حالتها یِ مختلف ِ $\mathbb{V}_1$ و $\mathbb{V}_2$ چنین است.

$$(T^{\mathrm{t}})^i{}_j = g^{k\,i}\, g_{l\,j}\, T^l{}_k, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}), \tag{2176}$$

$$(T^{\mathrm{t}})_{i\,j} = g_{k\,i}\, g_{l\,j}\, T^{l\,k}, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}^*), \tag{2177}$$

$$(T^{\mathrm{t}})^{i\,j} = g^{k\,i}\, g^{l\,j}\, T_{l\,k}, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}), \tag{2178}$$

$$(T^{\mathrm{t}})_i{}^j = g_{k\,i}\, g^{l\,j}\, T_l{}^k, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}^*). \tag{2179}$$

از جمله دیده میشود

$$(g^{\mathrm{t}})^{i}{}_{j} = \delta^{i}_{j}, \qquad g \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}), \tag{2180}$$

$$(g^{\mathrm{t}})_{i\,j} = g_{j\,i}, \qquad g \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}^*), \tag{2181}$$

$$(g^{\mathrm{t}})^{i\,j} = g^{j\,i}, \qquad g \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}), \tag{2182}$$

$$(g^{\mathrm{t}})_{i}{}^{j} = g_{k\,i}\,g^{j\,k}, \qquad g \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}^*). \tag{2183}$$

در همه یِ این موارد، g در صورت ِ لزوم با بالا-بردن ِ شاخص به تابع ِ مناسب تبدیل شده، و بعد ترانهاده اَش حساب شده. دیده میشود در همه یِ این موارد

$$g^{\mathrm{t}} = g^{-1}. \tag{2184}$$

در واقع برا یِ تعریف ِ ترانهاده لازم نیست فضاها یِ مبدئ و مقصد به هم مربوط باشند. اگر T در $\mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{U})$ باشد و $g_{\mathbb{U}}$ و $g_{\mathbb{V}}$ دُ-فرمها یی ناتکین بر، به ترتیب، $\mathbb{U}$ و $\mathbb{V}$ باشند، ترانهاده یِ T، مشابه با (2173)، چنین تعریف میشود.

$$g_{\mathbb{U}}(u, T^{\mathrm{t}}\,v) = g_{\mathbb{V}}(T\,u, v), \tag{2185}$$

که نتیجه میدهد

$$T^{\mathrm{t}} = \underset{\sim}{g}_{\mathbb{U}}^{-1}\,T^{*}\,\underset{\sim}{g}_{\mathbb{V}}. \tag{2186}$$

از تعریف ِ ترانهاده به سادِگی دیده میشود اگر T_1 و T_2 تابعها یی خطی باشند، چنان که $(T_2\,T_1)$ تعریف شده باشد،

$$(T_2\,T_1)^{\mathrm{t}} = T_1^{\mathrm{t}}\,T_2^{\mathrm{t}}. \tag{2187}$$

همچنین، اگر T وارونپذیر باشد،

$$(T^{-1})^{\mathrm{t}} = (T^{\mathrm{t}})^{-1}. \tag{2188}$$

یک ترانهاده یِ دیگر به این شکل تعریف میشود.

$$g_1(u, T\,v) = g_2(T^{\mathrm{t}'}\,u, v). \tag{2189}$$

دیده میشود فرق ِ $T^{\mathrm{t}'}$ با T^{t} این است که در تعریف ِ $\mathrm{T}^{\mathrm{t}'}$، به جا یِ $\underset{\sim}{g}$ از $\underset{\sim}{g}^*$ استفاده شده. به این ترتیب،

$$T^{\mathrm{t}'} = (\underset{\sim}{g}_1^*)^{-1}\, T^*\, \underset{\sim}{g}_2^*. \tag{2190}$$

همچنین،

$$(T^{\mathrm{t}'})^i{}_j = g^{i\,k}\, g_{j\,l}\, T^l{}_k, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}), \tag{2191}$$

$$(T^{\mathrm{t}'})_{i\,j} = g_{i\,k}\, g_{j\,l}\, T^{l\,k}, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V};\mathbb{V}^*), \tag{2192}$$

$$(T^{\mathrm{t}'})^{i\,j} = g^{i\,k}\, g^{j\,l}\, T_{l\,k}, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}), \tag{2193}$$

$$(T^{\mathrm{t}'})_i{}^j = g_{i\,k}\, g^{j\,l}\, T_l{}^k, \quad T \in \mathsf{LF}(\mathbb{V}^*;\mathbb{V}^*). \tag{2194}$$

و دیده میشود

$$\begin{aligned} g^{\mathrm{t}'} &= g^{-1}, \\ &= g^{\mathrm{t}}. \end{aligned} \tag{2195}$$

دُ-ترانهاده یِ g یکسان َند.

از تعریف ِ ترانهاده دیده میشود

$$\begin{aligned} (T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} &= \underset{\sim}{g}_2^{-1}\, (T^{\mathrm{t}})^*\, \underset{\sim}{g}_1, \\ &= \underset{\sim}{g}_2^{-1}\, \underset{\sim}{g}_2^*\, T\, (\underset{\sim}{g}_1^*)^{-1}\, \underset{\sim}{g}_1. \end{aligned} \tag{2196}$$

پس در حالت ِ کلی ترانهاده-ترانهاده همانی نیست. اما

$$\begin{aligned} (T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}'} &= (\underset{\sim}{g}_2^*)^{-1}\, (T^{\mathrm{t}})^*\, \underset{\sim}{g}_1^*, \\ &= (\underset{\sim}{g}_2^*)^{-1}\, \underset{\sim}{g}_2^*\, T\, (\underset{\sim}{g}_1^*)^{-1}\, \underset{\sim}{g}_1^*, \end{aligned} \tag{2197}$$

که نتیجه میدهد

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}'} = T. \tag{2198}$$

مشابه با آن،

$$(T^{\mathrm{t}'})^{\mathrm{t}} = T. \tag{2199}$$

اگر g_1 و g_2 شبه- ِ-متقارن باشند،

$$T^{\mathrm{t}'} = (-1)^{\mathsf{sy}(g_1)+\mathsf{sy}(g_2)}\, T^{\mathrm{t}}. \tag{2200}$$

از جمله

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (-1)^{\mathsf{sy}(g_1)+\mathsf{sy}(g_2)}\, T. \tag{2201}$$

پس اگر g_1 و g_2 شبه- ِ-متقارن با تقارنیها یِ یکسان باشند،

$$T^{\mathrm{t}'} = T^{\mathrm{t}}. \tag{2202}$$

از جمله

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = T. \tag{2203}$$

و اگر g_1 و g_2 شبه- ِ-متقارن با تقارنیها یِ متفاوت باشند،

$$T^{\mathrm{t}'} = -T^{\mathrm{t}}. \tag{2204}$$

از جمله

$$(T^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = -T. \tag{2205}$$

ضمنَن دیده میشود اگر g متقارن باشد، بالا یا پایین-بردن شاخص با ترانهاده-کردن جابِجا میشود. در این حالت ترانهاده-کردن میشود این که شاخصها جابِجا شوند، شاخصها یِ بالا پایین بروند، و شاخصها یِ پایین بالا بروند.

با ترکیب ِ یک دُ-فرم ِ ناتکین و کاهش ِ درونی، کاهش ِ یک فرم ِ دیفرانسیل با یک فرم ِ دیفرانسیل ِ دیگر ساخته میشود. در خمینه یِ دُ-فرمدار ِ $(\mathbb{M}, g)$، متناظر با فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ω، تابع ِ $\mathbf{j}_\omega$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{j}_\omega\,\sigma = \frac{1}{[\mathsf{ty}(\omega)]!}\,\mathbf{i}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\omega)]}\,\omega}\,\sigma, \tag{2206}$$

که σ فرم ِ دیفرانسیل است. رُشن است که

$$\mathsf{ty}(\mathbf{j}_\omega\,\sigma) = \mathsf{ty}(\sigma) - \mathsf{ty}(\omega), \tag{2207}$$

و اگر $\mathsf{ty}(\omega)$ بزرگتر از $\mathsf{ty}(\sigma)$ باشد، $(\mathbf{j}_\omega\,\sigma)$ صفر است. همچنین، دیده میشود اگر گونه یِ ω و σ به ترتیب r و s باشد،

$$(\mathbf{j}_\omega\,\sigma)_{i_1\cdots i_{s-r}} = \frac{1}{r!}\,g^{j_1\,k_1}\cdots g^{j_r\,k_r}\,\omega_{j_1\,\cdots j_r}\,\sigma_{k_1\cdots k_r\,i_1\cdots i_{s-r}}. \tag{2208}$$

اگر ω و σ از یک گونه باشند $(s = r)$

$$\mathbf{j}_\omega\,\sigma = \frac{1}{r!}\,g^{j_1\,k_1}\cdots g^{j_r\,k_r}\,\omega_{j_1\,\cdots j_r}\,\sigma_{k_1\cdots k_r}. \tag{2209}$$

در این حالت ضمنَن

$$\mathbf{j}_\sigma\,\omega = \mathbf{j}'_\omega\,\sigma, \tag{2210}$$

که $\mathbf{j}'$ مانسته یِ $\mathbf{j}$ با $\underset{\sim}{g}^*$ به جا یِ $\underset{\sim}{g}$ است. رُشن است که اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\mathbf{j}'_\omega = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{j}_\omega. \tag{2211}$$

از جمله رُشن است که اگر g متقارن باشد (و ω و σ از یک گونه باشند)،

$$\mathbf{j}_\sigma\,\omega = \mathbf{j}_\omega\,\sigma. \tag{2212}$$

دیده میشود اگر σ و τ و ω فرمِ دیفرانسیل باشند،

$$\mathbf{j}_{\omega\wedge\tau}\,\sigma = \frac{1}{[\mathsf{ty}(\omega)+\mathsf{ty}(\tau)]!}\,\mathbf{i}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\omega)+\mathsf{ty}(\tau)]}\,(\omega\wedge\tau)}\,\sigma,$$

$$= \frac{1}{[\mathsf{ty}(\omega)]!}\,\frac{1}{[\mathsf{ty}(\tau)]!}\,\mathbf{i}_{\{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\omega)]}\,\omega\}\otimes\{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\tau)]}\,\tau\}}\,\sigma,$$
$$= \frac{1}{[\mathsf{ty}(\omega)]!}\,\frac{1}{[\mathsf{ty}(\tau)]!}\,\mathbf{i}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\tau)]}\,\tau}\,\mathbf{i}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes[\mathsf{ty}(\omega)]}\,\omega}\,\sigma,$$
$$= \mathbf{j}_\tau\,\mathbf{j}_\omega\,\sigma, \tag{2213}$$

یا

$$\mathbf{j}_{\omega\wedge\tau} = \mathbf{j}_\tau\,\mathbf{j}_\omega. \tag{2214}$$

رُشن است که $(\mathbf{j}_\omega\,\sigma)$ نسبت به ω و σ خطی (و اگر ω و σ میدان باشند نقطِئی) ست. اگر Σ اسکالر باشد،

$$\mathbf{j}_\Sigma = \mathbf{m}(\Sigma), \tag{2215}$$

اگر ω یک-فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{j}_\omega\,\sigma = \mathbf{i}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega}\,\sigma, \tag{2216}$$

و اگر u بردار باشد،

$$\mathbf{j}_{\underset{\sim}{g}\,u}\,\sigma = \mathbf{i}_u\,\sigma. \tag{2217}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. $\{(i,e_i)\mid i\}$ یک پایه یِ فضا یِ مماس میگیرم. متناظر با این پایه، تابع ِ خطی یِ δ_e از فضا یِ هممماس به فضا یِ مماس را چنین تعریف میکنم.

$$\delta_e\,e^i = e_i, \tag{2218}$$

که $\{(i,e^i)\mid i\}$ دُگان ِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ است. اگر g یک دُ-فرم بر $\mathbb{M}$ باشد، از جمله اگر $(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار باشد، $(\delta_e\,\underset{\sim}{g})$ یک تابع ِ خطی از فضا یِ مماس به فضا یِ مماس است، چنان که

$$\delta_e\,\underset{\sim}{g}\,e_i = \sum_j g_{j\,i}\,e_j. \tag{2219}$$

البته رُشن است که δ_e و در نتیجه $(\delta_e\, g)$ به پایه بستِگی دارند.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ دُ-فرمدار و $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. با استفاده از g میشود از یک-فرم- ِ-مساحت ِ $\boldsymbol{\sigma}(v_1, \dots, v_{m-1})$ متناظر با بردارها یِ v_1 تا v_{m-1} یک بردار ساخت، که $g^{-1}[\boldsymbol{\sigma}(v_1, \dots, v_{m-1})]$ است این بردار را با $\mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1})$ نشان میدهم، و به آن بردار- ِ-مساحت ِ متوازی‌السطوح ِ متناظر با کنج ِ $\{(1, v_1), \dots, (m-1, v_{m-1})\}$ میگویم. دیده میشود

$$\begin{aligned}[\mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1})]^i &= g^{j\,i}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{j\, j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}},\\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}},\end{aligned} \tag{2220}$$

یا

$$\mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1}) = e_i\, \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}, \tag{2221}$$

که مئلفِها برحسب ِ پایه یِ e برا یِ فضا یِ مماس، و دُگان َش نوشته شده اند. با

$$\mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1}) =: e_i\, \mathbf{a}^i(v_1, \dots, v_{m-1}), \tag{2222}$$

دیده میشود

$$\mathbf{a}^i(v_1, \dots, v_{m-1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}. \tag{2223}$$

$\mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1})$ تعمیم ِ هم ان ضرب ِ خارجی یِ 2 بردار در یک فضا یِ 3 بُعدی ست. از جمله، اگر v_0 تا v_{m-1} بردار باشند،

$$g[v_0, \mathbf{a}(v_1, \dots, v_{m-1})] = \boldsymbol{\varepsilon}(v_0, \dots, v_{m-1}). \tag{2224}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^i &= g^{j\,i}\, \boldsymbol{\varepsilon}_j,\\ &= g^{j\,i}[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][\mathbf{o}_j(e)],\end{aligned} \tag{2225}$$

یا بستِتر،

$$\mathbf{a} = g^{j\,i}\, e_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_j,$$
$$= g^{j\,i}\, [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\, e_i \otimes [\mathbf{o}_j(e)]. \tag{2226}$$

البته (2225) کم-ابهامتر از (2226) است.

56 گرادیان ِ یک میدان ِ اسکالر

مشتق ِ برونی یِ یک میدان ِ اسکالر (که در واقع هم ان مشتق ِ آن میدان ِ اسکالر است) یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل است. در یک خمینه یِ دُ-فرمدار، میشود این یک-فرم را به یک بردار تبدیل کرد و به این ترتیب، از مشتق ِ یک میدان ِ اسکالر یک میدان ِ برداری ساخت.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. گرادیان ِ میدان ِ اسکالر ِ Σ را با $(\mathbf{grad}\,\Sigma)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{grad}\,\Sigma = \underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma. \tag{2227}$$

شکل ِ بسته یِ این تعریف برا یِ $\mathbf{grad}$ میشود

$$\mathbf{grad} = \underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}. \tag{2228}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{grad}\,\Sigma)^i = g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j\,\Sigma, \tag{2229}$$

که با تعریف ِ

$$\mathbf{D}^i = g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j, \tag{2230}$$

میشود آن را چنین نوشت.

$$(\mathbf{grad}\,\Sigma)^i = \mathbf{D}^i\,\Sigma. \tag{2231}$$

رُشن است که اگر $\{(i,e_i)\mid i\}$ یک پایه یِ فضا یِ مماس و $\{(i,e^i)\mid i\}$ دُگان ِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\,\Sigma &= e_i\,\mathbf{D}^i\,\Sigma,\\ &= e_i\,g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j\,\Sigma,\\ &= \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j\,\mathbf{D}_j\,\Sigma,\end{aligned}\tag{2232}$$

یا بستِتر،

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} &= e_i\,\mathbf{D}^i,\\ &= e_i\,g^{j\,i}\,\mathbf{D}_j\\ &= \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j\,\mathbf{D}_j.\end{aligned}\tag{2233}$$

دیده میشود اگر v یک بردار باشد،

$$\mathbf{D}_v\,\Sigma = g(v,\mathbf{grad}\,\Sigma).\tag{2234}$$

این رابطه را به شکل ِ

$$\mathbf{D}_v\,\Sigma = g(v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{D}\,\Sigma)\tag{2235}$$

هم مینویسم. همچنین، با توجه به این که مشتق ِ هموردا یِ میدان ِ اسکالر ِ Σ هم ان مشتق ِ Σ است،

$$\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma = g(v,\mathbf{grad}\,\Sigma),\tag{2236}$$

یا،

$$\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma = g(v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma).\tag{2237}$$

مشتق ِ لی یِ میدان ِ اسکالر ِ Σ با میدان ِ برداری یِ v هم هم ان مشتق ِ سویی یِ میدان ِ Σ با میدان ِ v است. پس،

$$\begin{aligned} g(v, \mathbf{grad}\,\Sigma) &= \mathbf{D}_v\,\Sigma, \\ &= \boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma, \\ &= \mathbf{L}_v\,\Sigma. \end{aligned} \tag{2238}$$

57 حجم ِ سازگار با دُ-فرم

هم ان طُر که در یک فضا یِ خطی میشود حجم را چنان تعریف کرد که با یک دُ-فرم ِ ناتکین سازگار باشد، بر یک خمینه یِ سمتپذیر میشود عنصر- ِ-حجم ی تعریف کرد که با یک میدان- ِ-دُ-فرم ِ ناتکین سازگار باشد.

میگویم خمینه یِ دُ-فرمدار ِ $(\mathbb{M}, g)$ سمتدار است، اگر $\mathbb{M}$ سمتدار باشد. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ سمتدار ِ m بُعدی ست. متناظر با میدان-کنج ِ راستدست ِ e بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$، (که ϕ_a یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ است) m فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ε_a بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$ را با اثر ِ ε بر e_a تعریف میکنم:

$$\varepsilon_a(e_{a\,1}, \ldots, e_{a\,m}) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_{e_a}\,\underset{\sim}{g})|}, \tag{2239}$$

یعنی

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}_a}(e_a) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_{e_a}\,\underset{\sim}{g})|}. \tag{2240}$$

نشان میدهم ε_a به کنج (پایه) بستِگی ندارد. برا یِ این کار ϕ_b را یک نقشه یِ دیگر ِ $\mathbb{M}$، و e_b را یک میدان-کنج ِ راستدست در $\mathsf{dom}(\phi_b)$ میگیرم. در $[\mathsf{dom}(\phi_a)] \cap [\mathsf{dom}(\phi_b)]$،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b}(e_a) &= [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b}(e_b)][\mathsf{det}(\Lambda)], \\ &= \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_{e_b}\,\underset{\sim}{g})|[\mathsf{det}(\Lambda)]^2}, \end{aligned} \tag{2241}$$

که Λ تابع ِ تغییر- ِ-پایه است:

$$\Lambda\, e_{b\,i} = e_{a\,i}, \tag{2242}$$

و از این که e_a و e_b هر-دُ راستدست َند معلوم میشود $\mathsf{det}(\Lambda)$ مثبت است. از رابطه یِ تبدیل- ِ-پایه دیده میشود

$$\delta_{e_a} = \Lambda\, \delta_{e_b}\, \Lambda^*. \tag{2243}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathsf{det}(\delta_{e_a}\, \underset{\sim}{g}) &= \mathsf{det}(\Lambda\, \delta_{e_b}\, \Lambda^*\, \underset{\sim}{g}),\\ &= \mathsf{det}[\Lambda\, \delta_{e_b}\, \Lambda^*\, (\delta_{e_b})^{-1}\, \delta_{e_b}\, \underset{\sim}{g}],\\ &= [\mathsf{det}(\Lambda)]\{\mathsf{det}[\delta_{e_b}\, \Lambda^*\, (\delta_{e_b})^{-1}]\}[\mathsf{det}(\delta_{e_b}\, \underset{\sim}{g})],\end{aligned} \tag{2244}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{det}(\delta_{e_a}\, \underset{\sim}{g}) = [\mathsf{det}(\delta_{e_b}\, \underset{\sim}{g})][\mathsf{det}(\Lambda)]^2. \tag{2245}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b}(e_a) &= \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_{e_a}\, \underset{\sim}{g})|},\\ &= \mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}_a}(e_a),\end{aligned} \tag{2246}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \boldsymbol{\varepsilon}_a, \tag{2247}$$

یعنی تعریف ِ $\boldsymbol{\varepsilon}$ به شکل ِ (2239) مستقل از نقشه است. پس شاخص ِ نقشه را از $\boldsymbol{\varepsilon}$ بر میدارم و $\boldsymbol{\varepsilon}$ به شکل ِ (2240) را چنین مینویسم.

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}, \tag{2248}$$

که e یک کنجِ راستدست است. به ε با تعریفِ بالا عنصر-ِ-حجمِ سازگار با g میگویم. رُشن است که اگر g هموار باشد عنصر-ِ-حجمِ سازگار با g هم هموار است. و رُشن است که عنصر-ِ-حجمِ سازگار با دُ-فرم یکتا ست. همچنین، رُشن است که هر خمینه یِ دُ-فرمدار مُضعَن یک عنصر-ِ-حجمِ سازگار با دُ-فرم دارد.

دیده میشود اگر e یک کنجِ چپدست باشد،

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) = -\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}. \tag{2249}$$

رابطِها یِ (2248) و (2249) را میشود در این خلاصه کرد.

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) = [\mathsf{sgn}(e)]\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}. \tag{2250}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدارِ سمتدار است، که ε یک عنصر-ِ-حجمِ آن است (که لزومَن با g سازگار نیست). عنصر-ِ-حجمِ سازگار با g را با $\tilde{\varepsilon}$ نشان میدهم. رُشن است که ε با $\tilde{\varepsilon}$ متناسب است. از

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\, \varepsilon &= \mathbf{o}(e), \\ &= \frac{1}{[\mathsf{sgn}(e)]\,\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\, \tilde{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2251}$$

نتیجه میشود.

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{[\mathsf{sgn}(e)]\,\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\, \tilde{\varepsilon}. \tag{2252}$$

ضریبِ تناسب، هر چند با استفاده از یک پایه حساب شده، مستقل از پایه است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدارِ سمتدارِ m بُعدی ست، که ε یک عنصر-ِ-حجمِ آن است. شاخصها یِ ε را با g بالا میبرم:

$$\varepsilon^{i_1 \cdots i_m} = g^{j_1\, i_1} \cdots g^{j_m\, i_m}\, \varepsilon_{j_1 \cdots j_m}. \tag{2253}$$

دیده میشود ε با شاخصها یِ بالا هم کاملَن پادمتقارن است و صفر نمیشود. به این ترتیب، ε با شاخصها یِ بالا یک عنصر- ِ-حجم برا یِ فضا یِ هممماس است. مئلفِها را در پایه یِ e مینویسم. با استفاده از

$$[(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^{-1}]^i{}_j = g^{j\,i}, \tag{2254}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1\cdots m} &= [(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^{-1}]^{i_1}{}_1 \cdots [(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^{-1}]^{i_m}{}_m\, \varepsilon_{j_1\cdots j_m},\\ &= \{\mathsf{det}\,[(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^{-1}]\}\varepsilon_{1\cdots m},\end{aligned} \tag{2255}$$

که نتیجه میدهد

$$\varepsilon^{1\cdots m} = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}, \tag{2256}$$

و اگر ε با g سازگار باشد،

$$\varepsilon^{1\cdots m} = [\mathsf{sgn}(e)]\frac{\mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})]}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}. \tag{2257}$$

$\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})$ به پایه بستِگی دارد (چون δ_e به پایه بستِگی دارد)، اما از (2245) دیده میشود $\mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})]$ مستقل از پایه است:

$$\mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_{e'}\, \underset{\sim}{g})] = \mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})]. \tag{2258}$$

علامت ِ g را با $\mathsf{sgn}(g)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم

$$\mathsf{sgn}(g) = \mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})]. \tag{2259}$$

به این ترتیب، از (2257) نتیجه میشود اگر ε با g سازگار باشد،

$$\varepsilon^{1\cdots m} = [\mathsf{sgn}(e)]\frac{\mathsf{sgn}(g)}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}. \tag{2260}$$

از (2256) دیده میشود

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_k\, l_1\cdots l_{m-k}}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_k\, l_1\cdots l_{m-k}} = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}[(m-k)!]\begin{bmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k\end{bmatrix}, \tag{2261}$$

که 2 حالت ِ خاص َش چنین میشوند.

$$\varepsilon^{l_1\cdots l_m}\,\varepsilon_{l_1\cdots l_m} = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}(m!). \tag{2262}$$

$$\varepsilon^{i\, l_2\cdots l_{m-1}}\,\varepsilon_{j\, l_2\cdots l_{m-1}} = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}[(m-1)!]\delta^i_j. \tag{2263}$$

از جمله معلوم میشود اگر ε با g سازگار باشد،

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_k\, l_1\cdots l_{m-k}}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_k\, l_1\cdots l_{m-k}} = [\mathsf{sgn}(g)][(m-k)!]\begin{bmatrix} i_1\cdots i_k \\ j_1\cdots j_k\end{bmatrix}, \tag{2264}$$

که 2 حالت ِ خاص َش چنین میشوند.

$$\varepsilon^{l_1\cdots l_m}\,\varepsilon_{l_1\cdots l_m} = [\mathsf{sgn}(g)](m!). \tag{2265}$$

$$\varepsilon^{i\, l_2\cdots l_{m-1}}\,\varepsilon_{j\, l_2\cdots l_{m-1}} = [\mathsf{sgn}(g)][(m-1)!]\delta^i_j. \tag{2266}$$

از این که

$$\mathsf{det}[(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^*] = \mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g}), \tag{2267}$$

نتیجه میشود به جا یِ (2253) میشود این را هم به کار برد.

$$\varepsilon^{i_1\cdots i_m} = g^{i_1\, j_1}\cdots g^{i_m\, j_m}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_m}. \tag{2268}$$

با ε با شاخصها یِ بالا، میشود یک عنصر- ِحجم بر فضا یِ هممماس ساخت. این را با ε^* نشان میدهم:

$$\begin{aligned}\varepsilon^* &= \frac{1}{m!}\,\varepsilon^{i_1\cdots i_m}\, e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_m},\\ &= \varepsilon^{1\cdots m}\, e_1\wedge\cdots\wedge e_m,\end{aligned} \tag{2269}$$

دیده میشود

$$\varepsilon^* = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes m}\,\varepsilon, \tag{2270}$$

که البته میشود در آن $\underset{\sim}{g}$ را با $\underset{\sim}{g}^*$ هم جایگزین کرد. دُگان ِ e را با e^*، و دُ-فرم ِ القاییده از g را با h نشان میدهم، که البته $\underset{\sim}{h}$ هم ان $(\underset{\sim}{g}^{-1})^*$ است. دیده میشود

$$\delta_{e^*} = (\delta_e)^{-1}. \tag{2271}$$

$$(\delta_{e^*})^* = \delta_{e^*}. \tag{2272}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \delta_{e^*}\, \underset{\sim}{h} &= [(\delta_e)^{-1}]^*\, (\underset{\sim}{g}^{-1})^*, \\ &= [(\delta_e\, \underset{\sim}{g})^{-1}]^*. \end{aligned} \tag{2273}$$

پس،

$$\mathsf{det}(\delta_{e^*}\, \underset{\sim}{h}) = [\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})]^{-1}. \tag{2274}$$

رابطه یِ (2260) میشود

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^*}(e^*) = \frac{\mathsf{sgn}(g)}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}. \tag{2275}$$

مانسته یِ (2250) چنین میشود

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}^*}(e^*) = [\mathsf{sgn}(e^*)]\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_{e^*}\, \underset{\sim}{h})|}. \tag{2276}$$

این یعنی $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ سازگار با h تعریف شده. به این ترتیب،

$$\mathsf{sgn}(e^*) = [\mathsf{sgn}(g)][\mathsf{sgn}(e)]. \tag{2277}$$

در یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ سمتدار، دُ-فرم ِ خمینه (در واقع فقط علامت َش) یک دستیدِگی بر فضا یِ هممماس القا میکند.

58 دُگانی یِ هاج

$\mathbb{V}$ یک فضا یِ خطی یِ m بُعدی ست. بُعد ِ فضا یِ s فرمها یِ دیفرانسیل بر $\mathbb{V}$، با بُعد ِ فضا یِ $(m-s)$ فرمها یِ دیفرانسیل ِ بر $\mathbb{V}$ برابر است. پس این دُ-فضا یکریخت َند. اگر برا یِ $\mathbb{V}$ یک عنصر- ِ-حجم و یک دُ-فرم ِ ناتکین تعریف شده باشد، با استفاده از آنها میشود بین ِ فضا یِ s فرمها یِ دیفرانسیل بر $\mathbb{V}$ و فضا یِ $(m-s)$ فرمها یِ دیفرانسیل بر $\mathbb{V}$ یک یکریختی یِ وارونپذیر ساخت.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ دُ-فرمدار، و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. دُگانی یِ هاج با دامنه یِ s فرم- ِ-دیفرانسیلها را با $\mathbf{h}_s$ نشان میدهم و اثر ِ آن بر s فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{h}_s\,\sigma = \mathbf{j}_\sigma\,\varepsilon. \tag{2278}$$

باز-شده یِ این تعریف چنین است.

$$\mathbf{h}_s\,\sigma = \frac{1}{s!}\,\mathbf{i}_{(g^{-1})^{\otimes s}\,\sigma}\,\varepsilon. \tag{2279}$$

رُشن است که $(\mathbf{h}_s\,\sigma)$ یک $(m-s)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. از این پس به جا یِ $(\mathbf{h}_s\,\sigma)$ نماد ِ سادِتر ِ $(\mathbf{h}\,\sigma)$ را به کار میبرم، که

$$\mathbf{h}\,\sigma = \mathbf{h}_{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\sigma. \tag{2280}$$

به سادِگی دیده میشود $\mathbf{h}$ خطی و نقطِئی ست. از تعریف ِ $\mathbf{h}$ دیده میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}\,\sigma)_{i_1\cdots i_{m-s}} &= \frac{1}{s!}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\,g^{k_1\,j_1}\cdots g^{k_s\,j_s}\,\sigma_{k_1\cdots k_s},\\ &= \frac{1}{s!}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\,\sigma^{j_1\cdots j_s}.\end{aligned} \tag{2281}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}) = \frac{1}{(m-s)!}\,g^{i_1\,k_1}\cdots g^{i_s\,k_s}\,\varepsilon_{k_1\cdots k_s\,j_1\cdots j_{m-s}}\\ e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_{m-s}}.\end{aligned} \tag{2282}$$

$$\mathbf{h}[(\underset{\sim}{g}\, e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}\, e_{i_s})] = \frac{1}{(m-s)!}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{i_1 \cdots i_s\, j_1 \cdots j_{m-s}}\, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-s}}. \tag{2283}$$

مفصلتر،

$$(\mathbf{h}\,\sigma)_{i_1 \cdots i_{m-s}} = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{s!} \sum_{j_1 \cdots j_s} [j_1 \cdots j_s\, i_1 \cdots i_{m-s}]\, \sigma^{j_1 \cdots j_s}. \tag{2284}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}\,(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s}) &= \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{(m-s)!} \sum_{k_1 \cdots k_s j_1 \cdots j_{m-s}} g^{i_1\, k_1} \cdots g^{i_s\, k_s} \\ &\quad [k_1 \cdots k_s\, j_1 \cdots j_{m-s}]\, e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-s}}. \end{aligned} \tag{2285}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}[(\underset{\sim}{g}\, e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}\, e_{i_s})] &= \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{(m-s)!} \sum_{j_1 \cdots j_s} [i_1 \cdots i_s\, j_1 \cdots j_{m-s}] \\ &\quad e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_{m-s}}. \end{aligned} \tag{2286}$$

دیده میشود بستِگی یِ دُگانی یِ هاج به عنصر- ِ-حجم نقطِئی ست. دُگانی یِ هاج متناظر با عنصر- ِ-حجم ِ ε را با $\mathbf{h}$، و دُگانی یِ هاج متناظر با عنصر- ِ-حجم ِ $\tilde{\varepsilon}$ را با $\tilde{\mathbf{h}}$ نشان میدهم. (دُ-فرم ِ ناتکین ِ g که دُگانیها با آن حساب میشوند را برا یِ $\mathbf{h}$ و $\tilde{\mathbf{h}}$ یکسان گرفته ام.) رُشن است که متناظر با هر پایه یِ e،

$$\tilde{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{v}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(e)}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\, \mathbf{h}. \tag{2287}$$

یعنی نسبت ِ $\tilde{\mathbf{h}}$ به $\mathbf{h}$ هم ان نسبت ِ $\tilde{\varepsilon}$ به ε است. ضریب ِ $\mathbf{h}$ در طرف ِ راست، هر چند با پایه یِ e حساب شده مستقل از پایه است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ m بُعدی یِ دُ-فرمدار، و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. $\mathbf{h}^2$ یک s فرم ِ دیفرانسیل را به یک s فرم ِ دیفرانسیل تبدیل میکند. اگر عنصر- ِ-حجم ِ ε با دُ-فرم ِ ناتکین ِ g سازگار باشد،

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^2(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s}) &= \frac{1}{(s!)[(m-s)!]}\, g^{i_1\, k_1} \cdots g^{i_s\, k_s}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{k_1 \cdots k_s\, j_1 \cdots j_{m-s}} \\ &\quad g^{j_1\, l_1} \cdots g^{j_{m-s}\, l_{m-s}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{l_1 \cdots l_{m-s}\, p_1 \cdots p_s}\, e^{p_1} \wedge \cdots \wedge e^{p_s}, \\ &= \frac{(-1)^{s(m-s)}}{(s!)[(m-s)!]}\, g^{i_1\, k_1} \cdots g^{i_s\, k_s}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{l_1 \cdots l_{m-s}}{}_{k_1 \cdots k_s} \\ &\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{l_1 \cdots l_{m-s}\, p_1 \cdots p_s}\, e^{p_1} \wedge \cdots \wedge e^{p_s}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{s(m-s)}}{(s!)[(m-s)!]}\, g^{i_1\, k_1} \cdots g^{i_s\, k_s}\, g_{k_1\, j_1} \cdots g_{k_s\, j_s}\, \varepsilon^{l_1 \cdots l_{m-s}\, j_1 \cdots j_s} \\
&\quad \varepsilon_{l_1 \cdots l_{m-s}\, p_1 \cdots p_s}\, e^{p_1} \wedge \cdots \wedge e^{p_s}, \\
&= \frac{(-1)^{s(m-s)}}{s!} [\mathsf{sgn}(g)] (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})_{j_1}{}^{i_1} \cdots (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})_{j_s}{}^{i_s} \\
&\quad \begin{bmatrix} j_1 \cdots j_s \\ p_1 \cdots p_s \end{bmatrix} e^{p_1} \wedge \cdots \wedge e^{p_s}, \\
&= (-1)^{s(m-s)} [\mathsf{sgn}(g)] (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})_{j_1}{}^{i_1} \cdots (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})_{j_s}{}^{i_s} \\
&\quad e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_s}, \\
&= (-1)^{s(m-s)} [\mathsf{sgn}(g)] (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes s} (e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s}). \qquad (2288)
\end{aligned}
$$

پس،

$$
\mathbf{h}_{m-s}\, \mathbf{h}_s = (-1)^{s(m-s)} [\mathsf{sgn}(g)] (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes s}, \qquad (2289)
$$

یا

$$
(\mathbf{h}^2)_s = (-1)^{s(m-s)} [\mathsf{sgn}(g)] (\underset{\sim}{g}^* \underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes s}. \qquad (2290)
$$

تعریف میکنم

$$
\mathbf{h}'_s = \mathbf{h}_s\, [\underset{\sim}{g}\, (\underset{\sim}{g}^{-1})^*]^{\otimes s}, \qquad (2291)
$$

یا

$$
\mathbf{h}'_s\, \sigma = \mathbf{j}'_\sigma\, \varepsilon. \qquad (2292)
$$

به این ترتیب،

$$
(\mathbf{h}_{m-s})^{-1} = (-1)^{s(m-s)} [\mathsf{sgn}(g)] \mathbf{h}'_s. \qquad (2293)
$$

از جمله

$$
(\mathbf{h}^{-1}\, \sigma)^{i_1 \cdots i_{m-s}} = \frac{\mathsf{sgn}(g)}{s!}\, \varepsilon^{i_1 \cdots i_{m-s}\, j_1 \cdots j_s}\, g_{j_1\, k_1} \cdots g_{j_s\, k_s}\, \sigma^{k_1 \cdots k_s},
$$

$$= \frac{\mathsf{sgn}(g)}{s!}\, \varepsilon^{i_1\cdots i_{m-s}\, j_1\cdots j_s}\, \sigma_{j_1\cdots j_s}. \tag{2294}$$

همچنین،

$$\mathbf{h}^{-1}[(\underset{\sim}{g}\, e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}\, e_{i_s})] = \frac{\mathsf{sgn}(g)}{(m-s)!}\, g_{k_1\, i_1} \cdots g_{k_s\, i_s}\, \varepsilon^{k_1\cdots k_s\, j_1\cdots j_{m-s}}$$
$$(\underset{\sim}{g}\, e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}\, e_{j_{m-s}}). \tag{2295}$$

$$\mathbf{h}^{-1}(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_s}) = \frac{\mathsf{sgn}(g)}{(m-s)!}\, \varepsilon^{j_1\cdots j_{n-s}\, i_1\cdots i_s}$$
$$(\underset{\sim}{g}\, e_{j_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}\, e_{j_{m-s}}). \tag{2296}$$

دیده میشود $\mathbf{h}'$ در واقع هم ان دُگانی-یِ-هاج ی ست که با $\underset{\sim}{g}^*$ (به جا یِ $\underset{\sim}{g}$) تعریف شده. البته برا یِ تعریف ِ $\mathbf{h}'$ لازم نیست عنصر- ِ-حجم ِ ε با دُ-فرم ِ g سازگار باشد. اگر g متقارن باشد،

$$\mathbf{h}' = \mathbf{h}, \tag{2297}$$

و در این حالت،

$$\mathbf{h}_{m-s}\, \mathbf{h}_s = (-1)^{s(m-s)}[\mathsf{sgn}(g)], \tag{2298}$$

یا بستِتر

$$(\mathbf{h}^2)_s = (-1)^{s(m-s)}[\mathsf{sgn}(g)]. \tag{2299}$$

همچنین، اگر g پادمتقارن باشد،

$$\mathbf{h}'_s = (-1)^s\, \mathbf{h}_s, \tag{2300}$$

و در این حالت،

$$\mathbf{h}_{m-s}\, \mathbf{h}_s = (-1)^{s(m+1-s)}[\mathsf{sgn}(g)], \tag{2301}$$

یا بستِتر

$$(\mathbf{h}^2)_s = (-1)^{s(m+1-s)}[\mathsf{sgn}(g)]. \tag{2302}$$

کلیتر، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\mathbf{h}'_s = (-1)^{s\,\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{h}_s, \tag{2303}$$

و در این حالت،

$$\mathbf{h}_{m-s}\,\mathbf{h}_s = (-1)^{s\,[m+\mathsf{sy}(g)-s]}[\mathsf{sgn}(g)], \tag{2304}$$

یا بستِتر

$$(\mathbf{h}^2)_s = (-1)^{s\,[m+\mathsf{sy}(g)-s]}[\mathsf{sgn}(g)]. \tag{2305}$$

رابطه یِ (2289) برا یِ حالت ی ست که عنصر- ِ-حجم ِ ε با دُ-فرم ِ ناتکین ِ g سازگار باشد. در حالت ِ کلی که لزومَن چنین نیست، رابطه یِ ε با $\tilde{\varepsilon}$ (عنصر- ِ-حجم ِ سازگار با g) ساده است.

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}{[\mathsf{sgn}(e)]\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,\tilde{\varepsilon}. \tag{2252}$$

از اینجا شکل ِ کلیتر ِ (2289)، برا یِ وقت ی که ε لزومَن با g سازگار نیست، به دست میئاید.

$$\mathbf{h}_{m-s}\,\mathbf{h}_s = (-1)^{s(m-s)}[\mathsf{sgn}(g)]\frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\,(\underset{\sim}{g}^*\,\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes s}, \tag{2306}$$

یا

$$\mathbf{h}_{m-s}\,\mathbf{h}_s = (-1)^{s(m-s)}\,\frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}\,(\underset{\sim}{g}^*\,\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes s}. \tag{2307}$$

پس،

$$(\mathbf{h}_{m-s})^{-1} = (-1)^{s(m-s)}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\mathbf{h}'_s. \tag{2308}$$

شکل ِ کلیتر ِ رابطِها یِ (2294) تا (2296) هم چنین میشود.

$$(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{m-s}} = \frac{1}{s!}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-s}\,j_1\cdots j_s}\,\sigma_{j_1\cdots j_s}. \tag{2309}$$

$$\mathbf{h}^{-1}\,[(\underset{\sim}{g}\,e_{i_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{i_s})] = \frac{1}{(m-s)!}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,g_{k_1\,i_1}\cdots g_{k_s\,i_s}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1\cdots k_s\,j_1\cdots j_{m-s}}$$
$$(\underset{\sim}{g}\,e_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{j_{m-s}}). \tag{2310}$$

$$\mathbf{h}^{-1}\,(e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}) = \frac{1}{(m-s)!}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{j_1\cdots j_{m-s}\,i_1\cdots i_s}$$
$$(\underset{\sim}{g}\,e_{j_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{j_{m-s}}). \tag{2311}$$

اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\mathbf{h}_{m-s}\,\mathbf{h}_s = (-1)^{s\,[m+\mathsf{sy}(g)-s]}[\mathsf{sgn}(g)]\frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}, \tag{2312}$$

یا

$$\mathbf{h}_{m-s}\,\mathbf{h}_s = (-1)^{s\,[m+\mathsf{sy}(g)-s]}\,\frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}. \tag{2313}$$

همچنین،

$$(\mathbf{h}_{m-s})^{-1} = (-1)^{s\,[m+\mathsf{sy}(g)-s]}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\mathbf{h}_s. \tag{2314}$$

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل بر $(\mathbb{M},g)$، و ω یک r فرم- ِ-دیفرانسیل بر $(\mathbb{M},g)$ است. دیده میشود

$$\mathbf{h}(\sigma\wedge\omega) = \mathbf{j}_{\sigma\wedge\omega}\,\varepsilon,$$
$$= \mathbf{j}_\omega\,\mathbf{j}_\sigma\,\varepsilon, \tag{2315}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\mathbf{h}\,(\sigma\wedge\omega) = \mathbf{j}_\omega\,\mathbf{h}\,\sigma,$$
$$= (-1)^{[\mathsf{ty}(\sigma)][\mathsf{ty}(\omega)]}\,\mathbf{j}_\sigma\,\mathbf{h}\,\omega. \tag{2316}$$

همچنین، با اثر-دادن ِ $\mathbf{h}^{-1}$ بر این رابطه نتیجه میشود

$$\sigma\wedge\omega = \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{j}_\omega\,\mathbf{h}\,\sigma, \tag{2317}$$

که با تعریف ِ τ با

$$\tau = \mathbf{h}\,\sigma \tag{2318}$$

نتیجه میدهد

$$\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{j}_\omega\,\tau = (\mathbf{h}^{-1}\,\tau)\wedge\omega, \tag{2319}$$

یا

$$(-1)^{(m-r-s)(r+s)}\,\mathbf{h}'\,\mathbf{j}_\omega\,\tau = (-1)^{s(m-s)}(\mathbf{h}'\,\tau)\wedge\omega, \tag{2320}$$

که میشود

$$\mathbf{h}'\,\mathbf{j}_\omega\,\tau = (-1)^{r(m-r)}(\mathbf{h}'\,\tau)\wedge\omega. \tag{2321}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{h}'\,\mathbf{j}_\omega\,\sigma = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}(\mathbf{h}'\,\sigma)\wedge\omega. \tag{2322}$$

رُشن است که با تبدیل ِ g به g^* همراه با تبدیل ِ $\mathbf{h}$ به $\mathbf{h}'$ رابطِها یی مشابه به دست میئاید:

$$\mathbf{h}'(\sigma\wedge\omega) = \mathbf{j}'_\omega\,\mathbf{h}'\,\sigma. \tag{2323}$$

$$\mathbf{h}\,\mathbf{j}'_\omega\,\sigma = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\omega. \tag{2324}$$

همچنین،

$$(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega) = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}\,\mathbf{h}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma. \tag{2325}$$

$$(\mathbf{h}'\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}'\,\omega) = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}\,\mathbf{h}'\,\mathbf{j}_{\mathbf{h}'\,\omega}\,\sigma. \tag{2326}$$

سرانجام، با استفاده از رابطه یِ $\mathbf{h}^{-1}$ با $\mathbf{h}'$ رابطه یِ (2323) میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-1}(\sigma\wedge\omega) &= (-1)^{[\mathsf{ty}(\sigma)+\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\sigma)-\mathsf{ty}(\omega)]}[\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{h}'(\sigma\wedge\omega),\\ &= (-1)^{[\mathsf{ty}(\sigma)+\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\sigma)-\mathsf{ty}(\omega)]}[\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{j}'_\omega\,\mathbf{h}'\,\sigma,\end{aligned} \tag{2327}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{h}^{-1}(\sigma\wedge\omega)=(-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}\,\mathbf{j}'_\omega\,\mathbf{h}^{-1}\,\sigma. \tag{2328}$$

از تعریف ِ دُگانی یِ هاج دیده میشود

$$\mathbf{h}\,1=\varepsilon. \tag{2329}$$

در تعریف ِ دُگانی یِ هاج، هم عنصر- ِ-حجم ِ ε به کار میرود و هم دُ-فرم ِ ناتکین ِ g. اما در اثر ِ $\mathbf{h}$ بر 1 فقط ε ظاهر میشود: g ظاهر نمیشود. از جمله،

$$\mathbf{h}'\,1=\varepsilon. \tag{2330}$$

پس

$$\mathbf{h}'_0=\mathbf{h}_0. \tag{2331}$$

البته این از (2291) هم صریحَن دیده میشود. از (2313) هم دیده میشود

$$\mathbf{h}_m\,\mathbf{h}_0=\frac{[\mathbf{v}_\varepsilon(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}, \tag{2332}$$

که e یک پایه است. از جمله اگر عنصر- ِ-حجم ِ ε با دُ-فرم ِ ناتکین ِ g سازگار باشد،

$$\mathbf{h}_m\,\mathbf{h}_0=\mathsf{sgn}(g). \tag{2333}$$

پس در حالت ِ کلی،

$$\mathbf{h}\,\varepsilon=\frac{[\mathbf{v}_\varepsilon(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}, \tag{2334}$$

$$\mathbf{h}'\,\varepsilon=\frac{[\mathbf{v}_\varepsilon(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}, \tag{2335}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{h}'_m=\mathbf{h}_m. \tag{2336}$$

این را هم میشود مستقیمَن از (2291) به دست آورد. e را یک پایه میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{det}[\underset{\sim}{g}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^*] &= \mathsf{det}[\underset{\sim}{g}\,\delta_e\,(\delta_e)^{-1}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^*],\\ &= \mathsf{det}\{\underset{\sim}{g}\,\delta_e\,[(\delta_e)^{-1}]^*\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^*\},\\ &= [\mathsf{det}(\underset{\sim}{g}\,\delta_e)]\Big(\mathsf{det}\{[(\delta_e\,\underset{\sim}{g})^{-1}]^*\}\Big),\\ &= [\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})]\{\mathsf{det}[(\delta_e\,\underset{\sim}{g})^{-1}]\},\\ &= 1.\end{aligned} \tag{2337}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}[\underset{\sim}{g}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^*]^{\otimes m}\,\boldsymbol{\varepsilon} &= \{\mathsf{det}[\underset{\sim}{g}\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^*]\}\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= \boldsymbol{\varepsilon},\end{aligned} \tag{2338}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{h}'\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{h}\,\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2339}$$

که هم ان (2336) است.

اگر عنصر- ِ-حجم ِ $\boldsymbol{\varepsilon}$ با دُ-فرم ِ ناتکین ِ g سازگار باشد،

$$\mathbf{h}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{sgn}(g). \tag{2340}$$

$$\mathbf{h}'\,\boldsymbol{\varepsilon} = \mathsf{sgn}(g). \tag{2341}$$

همچنین، اگر $\{(i, e_i) \mid i\}$ یک پایه یِ فضا یِ مماس و $\{(i, e^i) \mid i\}$ دُگان ِ آن باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{i}_{e_i}\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= \mathbf{i}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\underset{\sim}{g}\,e_i}\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= \mathbf{j}_{\underset{\sim}{g}\,e_i}\,\boldsymbol{\varepsilon},\end{aligned} \tag{2342}$$

که نشان میدهد

$$\varepsilon_i = \mathbf{h}\, \underset{\smile}{g}\, e_i. \tag{2343}$$

و نیز،

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}^i &= g^{j\,i}\, \varepsilon_j, \\
&= g^{j\,i}\, \mathbf{i}_{e_j}\, \varepsilon, \\
&= \mathbf{i}_{g^{j\,i}\, e_j}\, \varepsilon, \\
&= \mathbf{i}_{\underset{\smile}{(g^*)}^{-1}\, e^i}\, \varepsilon, \\
&= \mathbf{j}'_{e^i}\, \varepsilon,
\end{aligned} \tag{2344}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{h}'\, e^i. \tag{2345}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. اگر ω و σ فرم- ِ-دیفرانسیلها یی با گونه یِ یکسان باشند $(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega)$ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل و بنابراین متناسب با عنصر- ِ-حجم است. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega &= \mathbf{h}\,\mathbf{j}'_\sigma\, \omega, \\
&= \mathbf{h}\,\mathbf{j}_\omega\, \sigma, \\
&= (\mathbf{j}_\omega\, \sigma)\mathbf{h}\, 1, \\
&= (\mathbf{j}_\omega\, \sigma)\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2346}$$

یا

$$\mathbf{h}^{-1}(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) = \mathbf{j}_\omega\, \sigma. \tag{2347}$$

از جمله اگر گونه یِ σ و ω برابر ِ s باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-1}(\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega) &= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,g^{j_1\,i_1}\cdots g^{j_s\,i_s}\,\omega_{j_1\cdots j_s},\\ &= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega^{i_1\cdots i_s}.\end{aligned}\tag{2348}$$

مشابه با (2347)، اگر گونه یِ σ و ω یکسان باشد،

$$\mathbf{h}'^{-1}(\sigma\wedge\mathbf{h}'\,\omega) = \mathbf{j}'_\omega\,\sigma.\tag{2349}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{h}'^{-1}(\sigma\wedge\mathbf{h}'\,\omega) = \mathbf{j}_\sigma\,\omega.\tag{2350}$$

$$\mathbf{h}^{-1}(\omega\wedge\mathbf{h}\,\sigma) = \mathbf{h}'^{-1}(\sigma\wedge\mathbf{h}'\,\omega).\tag{2351}$$

$$\omega\wedge\mathbf{h}\,\sigma = \sigma\wedge\mathbf{h}'\,\omega.\tag{2352}$$

در رسیدن از برابری یِ دوم به برابری یِ سوم (2331) به کار رفته. از جمله دیده میشود اگر g شبه- ِ- متقارن باشد (و البته گونه یِ σ و ω یکسان باشد)،

$$\omega\wedge\mathbf{h}\,\sigma = (-1)^{[\mathsf{ty}(\sigma)][\mathsf{sy}(g)]}\,\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega.\tag{2353}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه و ε یک عنصر- ِ-حجم بر آن است. در حالت ِ کلی، برا یِ تعریف ِ دُگانی یِ هاج یک دُ-فرم (ِ ناتکین) هم لازم است. به هم ین خاطر دُگانی یِ هاج را برا یِ خمینِها یِ دُ-فرمدار ِ سمتدار تعریف میکنند. اما در تعریف ِ اثر ِ دُگانی یِ هاج بر اسکالرها (صفرفرم- ِ-دیفرانسیلها) دُ-فرم ظاهر نمیشود:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\,\Sigma &= \mathbf{j}_\Sigma\,\varepsilon,\\ &= [\mathbf{m}(\Sigma)]\,\varepsilon,\\ &= \Sigma\,\varepsilon.\end{aligned}\tag{2354}$$

این را میشد مستقیمَن از (2329) هم دید.

59 همضرب ِ برونی

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. همضرب ِ برونی یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ در r فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ω را با $(\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega = \mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma) \wedge (\mathbf{h}\,\omega)]. \tag{2355}$$

رُشن است که $(\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega)$ نسبت به σ و ω خطی ست. همچنین، همضرب ِ برونی ترایایی ست، یعنی اگر σ و ω و τ فرم- ِ-دیفرانسیل باشند،

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} (\omega \wedge^{\mathrm{t}} \tau) = (\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega) \wedge^{\mathrm{t}} \tau. \tag{2356}$$

پس میشود پرانتزها را برداشت. دیده میشود

$$\mathsf{ty}(\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega) = \mathsf{ty}(\sigma) + \mathsf{ty}(\omega) - m. \tag{2357}$$

$$\omega \wedge^{\mathrm{t}} \sigma = (-1)^{[m-\mathsf{ty}(\sigma)][m-\mathsf{ty}(\sigma)]}\, \sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega. \tag{2358}$$

از

$$(\mathbf{h}\,\sigma) \wedge (\mathbf{h}\,\omega) = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}\, \mathbf{h}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma, \tag{2325}$$

نتیجه میشود

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}\, \mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma. \tag{2359}$$

همچنین از

$$\mathbf{h}^{-1}\,(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) = \mathbf{j}_\omega\,\sigma, \tag{2347}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma) \wedge^{\mathrm{t}} \omega = \mathbf{j}_\omega\,\sigma, \qquad \mathsf{ty}(\omega) = \mathsf{ty}(\sigma). \tag{2360}$$

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega = \mathbf{j}_\omega\,\mathbf{h}\,\sigma, \quad \mathsf{ty}(\omega) + \mathsf{ty}(\sigma) = m. \tag{2361}$$

به این ترتیب، اگر گونه یِ σ برابر ِ s باشد،

$$(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega=\frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega^{i_1\cdots i_s},\qquad \mathsf{ty}(\omega)=s. \tag{2362}$$

$$\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega=\frac{1}{(s!)[(m-s)!]}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1\cdots i_s\,j_1\cdots j_{m-s}}\,\sigma^{i_1}\cdots\sigma^{i_s}\,\omega^{j_1}\cdots\omega^{j_{m-s}},\qquad \mathsf{ty}(\omega)=m-s. \tag{2363}$$

همگونه یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل را بُعد ِ خمینه منها یِ گونه یِ آن فرم- ِ-دیفرانسیل تعریف میکنم. همگونه یِ σ را با $\mathsf{tty}(\sigma)$ نشان میدهم:

$$\mathsf{tty}(\sigma)=\mathsf{dim}(\mathbb{M})-\mathsf{ty}(\sigma). \tag{2364}$$

رُشن است که

$$\mathsf{tty}(\sigma)=\mathsf{ty}(\mathbf{h}\,\sigma). \tag{2365}$$

$$\mathsf{tty}(\mathbf{h}\,\sigma)=\mathsf{ty}(\sigma). \tag{2366}$$

بر حسب ِ همگونه،

$$\mathsf{tty}(\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega)=\mathsf{tty}(\sigma)+\mathsf{tty}(\omega). \tag{2367}$$

$$\omega\wedge^{\mathrm{t}}\sigma=(-1)^{[\mathsf{tty}(\sigma)][\mathsf{tty}(\sigma)]}\,\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega. \tag{2368}$$

$$\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega=(-1)^{[\mathsf{tty}(\omega)][\mathsf{dim}(\mathbb{M})-\mathsf{tty}(\omega)]}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma,$$

$$=(-1)^{[\mathsf{tty}(\omega)][\mathsf{ty}(\omega)]}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma. \tag{2369}$$

دیده میشود اگر τ یک فرم- ِ-دیفرانسیل باشد که گونه اَش بُعد ِ خمینه است (همگونه اَش صفر است)،

$$\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\tau=(\mathbf{h}\,\tau)\,\sigma. \tag{2370}$$

$$\tau\wedge^{\mathrm{t}}\sigma=(\mathbf{h}\,\tau)\,\sigma. \tag{2371}$$

از جمله،

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} (\mathbf{h}^{-1}\, 1) = \sigma. \tag{2372}$$

$$(\mathbf{h}^{-1}\, 1) \wedge^{\mathrm{t}} \sigma = \sigma. \tag{2373}$$

پس اگر Σ اسکالر باشد،

$$\Sigma\, \sigma = \sigma \wedge^{\mathrm{t}} (\mathbf{h}^{-1}\, \Sigma), \tag{2374}$$

$$= (\mathbf{h}^{-1}\, \Sigma) \wedge^{\mathrm{t}} \sigma. \tag{2375}$$

همچنین متناظر با عنصر- ِ-حجم ِ ε،

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}\, \sigma. \tag{2376}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \wedge^{\mathrm{t}} \sigma = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}\, \sigma. \tag{2377}$$

و اگر عنصر- ِ-حجم ِ ε با دُ-فرم ِ g سازگار باشد،

$$\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \boldsymbol{\varepsilon} = [\mathsf{sgn}(g)]\sigma. \tag{2378}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \wedge^{\mathrm{t}} \sigma = [\mathsf{sgn}(g)]\sigma. \tag{2379}$$

سرانجام، رُشن است که اگر Σ اسکالر باشد و $\mathsf{ty}(\sigma)$ کمتر از بُعد ِ خمینه باشد، $(\Sigma \wedge^{\mathrm{t}} \sigma)$ صفر است:

$$\Sigma \wedge^{t} \sigma = 0, \qquad \mathsf{ty}(\sigma) < \mathsf{dim}(\mathbb{M}). \tag{2380}$$

این حالت ِ خاص ی از آن است که اگر مجموع ِ $[\mathsf{ty}(\sigma)]$ و $[\mathsf{ty}(\omega)]$ کمتر از بُعد ِ خمینه باشد، یعنی اگر مجموع ِ $[\mathsf{tty}(\sigma)]$ و $[\mathsf{tty}(\omega)]$ بیش از بُعد ِ خمینه باشد، $(\sigma \wedge^{\mathrm{t}} \omega)$ صفر است:

$$\sigma \wedge^{t} \omega = 0, \quad \mathsf{ty}(\sigma) + \mathsf{ty}(\omega) < \mathsf{dim}(\mathbb{M}). \tag{2381}$$

60 دُگانی یِ هاج، و دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. اگر v یک بردار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_v\,\varepsilon &= \mathbf{i}_{\underset{\sim}{g}^{-1}(\underset{\sim}{g}\,v)}\,\varepsilon,\\ &= \mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,v.\end{aligned} \tag{2382}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\,\mathbf{div}\,v &= (\mathbf{div}\,v)\varepsilon,\\ &= \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\varepsilon,\\ &= \mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,v.\end{aligned} \tag{2383}$$

پس،

$$\mathbf{div}\,v = \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,v, \tag{2384}$$

یا بستِتر

$$\mathbf{div} = \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}. \tag{2385}$$

از این رابطه چنین مینماید که برا یِ تعریف ِ دیورژانس ِ یک میدان ِ برداری یک دُ-فرم ِ ناتکین لازم است. اما قبلَن دیورژانس بدون ِ استفاده از چنین دُ-فرم ی تعریف شده بود:

$$\mathbf{d}\,\varepsilon_v = (\mathbf{div}\,v)\,\varepsilon. \tag{1021}$$

نکته این است که در $(\mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,v)$، در واقع دُ-فرم ِ g حذف میشود. همچنین،

$$\mathbf{h}^{-1}\,\varepsilon = 1. \tag{2386}$$

به این ترتیب، $(\mathbf{div}\,v)$ در واقع مستقل از g است. البته اگر ε با g سازگار باشد، میشود $(\mathbf{div}\,v)$ را بر حسب ِ g (به جا یِ ε) نوشت. اگر e یک میدان-کنج ِ مختصاتی یِ راستدست باشد،

$$\mathbf{div}\,v = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,\mathbf{D}_i\left[v^i\,\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\right]. \tag{2387}$$

اگر e یک میدان-کنج ِ مختصاتی یِ چپدست باشد، این رابطه همچنان برقرار است، چون (-1) ی که در $\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}$ ضرب میشود حذف میشود. در واقع چنان که قبلَن دیده شد، برا یِ تعریف ِ دیورژانس لازم نیست خمینه سمتپذیر باشد. رابطه یِ بالا را میشود یک تعریف ِ دیورژانس گرفت که بر حسب ِ یک دُ-فرم ِ ناتکین است، و در آن عنصر- ِ-حجم ظاهر نمیشود.

رابطه یِ (2387) برا یِ حالت ی ست که ε با g سازگار است، و میدان-کنج مختصاتی ست. در حالت ِ کلی که ε لزومَن با g سازگار نیست، اما میدان-کنج مختصاتی ست، برا یِ دیورژانس این رابطه به دست میئاید.

$$\mathbf{div}\, v = \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\, \mathbf{D}_i\{v^i[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}. \tag{1031}$$

دیده میشود (2387) هم ان (1031) است، که در آن رابطه یِ زیر نشانده شده.

$$\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e) = [\mathsf{sgn}(e)]\, \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}. \tag{2250}$$

61 کرل

با اثردادن ِ یک دُ-فرم ِ ناتکین بر یک بردار، یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل ساخته میشود. مشتق ِ برونی یِ این یک-فرم- ِ-دیفرانسیل یک دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل است. اگر خمینه 3 بُعدی و سمتپذیر باشد، با دُگانی یِ هاج میشود این دُ-فرم- ِ-دیفرانسیل را به یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل تبدیل کرد. با اثر ِ وارون ِ دُ-فرم ِ ناتکین بر این یک-فرم- ِ-دیفرانسیل، یک بردار به دست میئاید. به این ترتیب، از مشتق ِ یک میدان ِ برداری یک میدان ِ برداری یِ دیگر ساخته میشود.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ 3 بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. کرل ِ میدان ِ برداری یِ v را با $(\mathbf{curl}\, v)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathbf{curl}\, v = \underset{\sim}{g}^{-1}\, \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \underset{\sim}{g}\, v. \tag{2388}$$

شکل ِ بستِتر ِ این تعریف چنین است.

$$\mathbf{curl} = \underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}. \tag{2389}$$

اگر $\mathbb{S}$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ سمتدار در $\mathbb{M}$ باشد، از قضیه یِ سْتُکس دیده میشود

$$\int_{\mathbb{S}} \mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}\,v = \int_{\mathbf{b}\,\mathbb{S}} \underset{\sim}{g}\,v. \tag{2390}$$

از تعریف ِ کِرل،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}\,v &= \mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,\mathbf{curl}\,v,\\ &= \mathbf{i}_{\mathbf{curl}\,v}\,\boldsymbol{\varepsilon},\\ &= (\mathbf{curl}\,v)^i\,\boldsymbol{\varepsilon}_i.\end{aligned} \tag{2391}$$

به این ترتیب از قضیه یِ سْتُکس نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{S}} (\mathbf{curl}\,v)^i\,\boldsymbol{\varepsilon}_i = \int_{\mathbf{b}\,\mathbb{S}} \underset{\sim}{g}\,v. \tag{2392}$$

کرل را میشود با گرادیان و دیورژانس ترکیب کرد:

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} &= \underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{d},\\ &= \underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}^2,\end{aligned} \tag{2393}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{grad} = 0. \tag{2394}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\,\mathbf{curl} &= \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g},\\ &= \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}^2\,\underset{\sim}{g},\end{aligned} \tag{2395}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{div}\,\mathbf{curl} = 0. \tag{2396}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ 3 بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. e را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و v را یک میدان ِ برداری میگیرم. اگر ε با g سازگار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}\,v &= \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}(g_{k\,l}\,v^l\,e^k),\\ &= \mathbf{h}^{-1}\{[\mathbf{D}_j(g_{k\,l}\,v^l)]\,e^j\wedge e^k\},\\ &= [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i\,j\,k}[\mathbf{D}_j(g_{k\,l}\,v^l)](\underset{\sim}{g}\,e_i),\end{aligned} \tag{2397}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{curl}\,v = [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i\,j\,k}[\mathbf{D}_j(g_{k\,l}\,v^l)]e_i, \tag{2398}$$

یا

$$\mathbf{curl}\,v = [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i\,j\,k}(\mathbf{D}_j\,v_k)e_i. \tag{2399}$$

دیده میشود رابطه یِ کِرل با وارون ِ دُگانی یِ هاج نقطِئی ست. به این ترتیب، در حالت ِ کلی که عنصر- ِحجم ِ ε لزومَن با دُ-فرم ِ g سازگار نیست (اما میدان-پایه یِ e همچنان مختصاتی ست)،

$$\mathbf{curl}\,v = \frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\varepsilon^{i\,j\,k}(\mathbf{D}_j\,v_k)e_i. \tag{2400}$$

بر خلاف ِ دیورژانس که میشد آن را مستقل از عنصر- ِ-حجم نوشت، کرل را نمیشود مستقل از عنصر- ِ-حجم نوشت. همچنین، بر خلاف ِ این که برا یِ تعریف ِ دیورژانس لازم نبود خمینه سمتدار باشد، برا یِ تعریف ِ کرل سمتدار-بودن ِ خمینه لازم است.

تعریف ِ کرل را میشود به خمینِها یی که 3 بُعدی نیستند هم گسترش داد. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. $\mathbf{curl}_r$ را تابع ی تعریف میکنم که بر میدانها یِ تانسری یِ $(r, 0)$ ِ پادمتقارن اثر میکند، چنان که

$$\mathbf{curl}_r\,T = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T. \tag{2401}$$

دیده میشود $(\mathbf{curl}_r\, T)$ یک میدان ِ تانسری یِ $(m-r-1,0)$ ِ پادمتقارن است. شکل ِ بستِتر ِ تعریف ِ بالا چنین است.

$$\mathbf{curl}_r = (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\, \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \underset{\sim}{g}^{\otimes r}. \tag{2402}$$

وقت ی نُع ِ میدان ی که $\mathbf{curl}_r$ بر آن اثر میکند معلوم است، برا یِ سادِگی به جا یِ $\mathbf{curl}_r$ خُد ِ $\mathbf{curl}$ را به کار میبرم. دیده میشود تعریف ِ قبلی یِ کرل حالت ِ خاص ِ این تعریف ِ کلیتر برا یِ $(m,r)=(3,1)$ است. اگر $\mathbb{S}$ یک زیرخمینه یِ $(r+1)$ بُعدی یِ سمتدار در $\mathbb{M}$ باشد، قضیه یِ سْتُکس برا یِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ $(\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T)$ و زیرخمینه یِ $\mathbb{S}$ به این شکل در میئاید

$$\frac{1}{(m-r-1)!}\int_{\mathbb{S}} \mathbf{i}_{\mathbf{curl}\, T}\, \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{\mathbf{b}\,\mathbb{S}} \underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T. \tag{2403}$$

اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد، $(\mathbf{grad}\,\Sigma)$ یک میدان ِ برداری ست. به سادِگی دیده میشود

$$\mathbf{curl}\,\mathbf{grad}\,\Sigma = 0. \tag{2404}$$

شکل ِ بسته یِ این رابطه چنین است

$$\mathbf{curl}_1\,\mathbf{grad} = 0. \tag{2405}$$

اگر T یک میدان ِ تانسری یِ $(m-2,0)$ ِ پادمتقارن باشد، $(\mathbf{curl}\, T)$ یک میدان ِ برداری ست. در این حالت

$$\mathbf{div}\,\mathbf{curl}\, T = 0. \tag{2406}$$

شکل ِ بسته یِ این رابطه چنین است

$$\mathbf{div}\,\mathbf{curl}_{m-2} = 0. \tag{2407}$$

دیده میشود در حالت ِ کلی کرل ی که اثر َش بر گرادیان صفر است، با کرل ی که اثر ِ دیورژانس بر آن صفر است فرق میکند. فقط در بُعد ِ 3 است که اینها یکسان َند.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. e را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و T را یک میدان ِ تانسُری یِ $(r, 0)$ ِ پادمتقارن میگیرم. اگر ε با g سازگار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, T = \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}[\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}\, j\, k_1\cdots k_r}\\ [\mathbf{D}_j(g_{k_1\, l_1}\cdots g_{k_r\, l_r}\, T^{l_1\cdots l_r})]e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{m-r-1}},\end{aligned} \tag{2408}$$

یا

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, T = \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}[\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}\, j\, k_1\cdots k_r}\\ (\mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r})e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{m-r-1}}.\end{aligned} \tag{2409}$$

اینجا هم، در حالت ِ کلی که ε لزومَن با g سازگار نیست (اما e همچنان مختصاتی ست)،

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, T = \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\smile}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}\, j\, k_1\cdots k_r}\\ (\mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r})e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{m-r-1}}.\end{aligned} \tag{2410}$$

برا یِ تعریف ِ گسترش-یافته یِ کِرل هم، خمینه باید سمتدار باشد و عنصر- ِ-حجم ِ خمینه در تعریف ظاهر میشود.

دیده میشود بر یک خمینه یِ m بُعدی، $\mathbf{curl}_r$ برا یِ $r \geq m$ صفر است. از جمله بر یک خمینه یِ 2 بُعدی فقط $\mathbf{curl}_0$ و $\mathbf{curl}_1$ ناصفر ند. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ 2 بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. e یک میدان-پایه یِ مختصاتی بر $\mathbb{M}$ است. اگر Σ یک میدان ِ اسکالر بر $\mathbb{M}$ باشد

$$\mathbf{curl}\,\Sigma = \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\smile}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{i\, j}(\mathbf{D}_j\,\Sigma)e_i, \tag{2411}$$

و اگر ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{curl}\,\Sigma = [\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{i\, j}(\mathbf{D}_j\,\Sigma)e_i,. \tag{2412}$$

همچنین، اگر v یک میدان ِ برداری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$\mathbf{curl}\, v = \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{j\,k}(\mathbf{D}_j\, v_k), \tag{2413}$$

و اگر $\boldsymbol{\varepsilon}$ با g سازگار باشد،

$$\mathbf{curl}\, v = [\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{j\,k}(\mathbf{D}_j\, v_k). \tag{2414}$$

برا یِ تبدیل ِ یک r فرم- ِ-دیفرانسیل به یک $(m-r)$ فرم- ِ-دیفرانسیل، که m بُعد ِ فضا یِ خمینه است، میشود خُد ِ دُگانی یِ هاج یا وارون ِ آن را به کار برد. از اینجا یک شکل ِ دیگر ِ کِرل تعریف میشود. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و $\boldsymbol{\varepsilon}$ عنصر- ِ-حجم ِ آن است. تعریف میکنم

$$\mathbf{tcurl}_r\, T = (-1)^{(r+1)(m-r-1)}\, (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\, \mathbf{h}\, \mathbf{d}\, \underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T, \tag{2415}$$

که T یک میدان ِ تانسری یِ $(r,0)$ ِ پادمتقارن بر $\mathbb{M}$ است. $(\mathbf{tcurl}\, T)$ را تیکِرل ِ T مینامم. دیده میشود اگر e مختصاتی باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{tcurl}\, T &= \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}\, g^{j\,p}\, g^{k_1\,l_1} \cdots g^{k_{m-r-1}\,l_{m-r-1}}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{i_1\cdots i_{m-r-1}\,p\,l_1\cdots l_r} \\ &\quad (\mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r})(\underset{\sim}{g}^{-1}\, e^{i_1}) \wedge \cdots \wedge (\underset{\sim}{g}^{-1}\, e^{i_{m-r-1}}), \\ &= \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}\, g^{j\,p}\, g^{k_1\,l_1} \cdots g^{k_{m-r-1}\,l_{m-r-1}}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}}{}_{p\,l_1\cdots l_r} \\ &\quad (\mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{m-r-1}}. \end{aligned} \tag{2416}$$

از رابطه یِ $\mathbf{h}^{-1}$ با $\mathbf{h}'$ دیده میشود

$$\mathbf{curl}_r\, T = (-1)^{(r+1)(m-r-1)}\, (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\, \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\, \mathbf{h}'\, \mathbf{d}\, \underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T, \tag{2417}$$

به این ترتیب، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\mathbf{tcurl}_r = (-1)^{(r+1)\mathsf{sy}(g)}\, \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}\, \mathbf{curl}_r. \tag{2418}$$

اگر g شبه- ِ-متقارن و ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{tcurl}_r = (-1)^{(r+1)\,\mathsf{sy}(g)}[\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{curl}_r. \tag{2419}$$

از جمله اگر g متقارن و ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{tcurl}_r = [\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{curl}_r. \tag{2420}$$

دیده میشود اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\mathbf{tcurl}\,\mathbf{grad}\,\Sigma = 0, \tag{2421}$$

یا

$$\mathbf{tcurl}_1\,\mathbf{grad} = 0. \tag{2422}$$

اما دیورژانس ِ تیکِرل لزومَن صفر نیست. در حالت ِ خاص ی که g شبه- ِ-متقارن و ε با g سازگار باشد، دیورژانس ِ تیکِرل صفر است. یعنی اگر g شبه- ِ-متقارن و ε با g سازگار باشد، و T یک میدان ِ تانسری ی ِ $(m-2,0)$ ِ پادمتقارن باشد،

$$\mathbf{div}\,\mathbf{tcurl}\,T = 0. \tag{2423}$$

بستِتر، اگر g شبه- ِ-متقارن و ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{div}\,\mathbf{tcurl}_{m-2} = 0. \tag{2424}$$

کِرل و تیکِرل برا ی ِ میدانها ی ِ تانسری ی ِ پادمتقارن ِ نُع ِ $(r,0)$ تعریف شدند. به سادِگی میشود عملگرها یی مشابه برا ی ِ فرم- ِ-دیفرانسیلها تعریف کرد. کافی ست g ها یی که فرم- ِ-دیفرانسیلها و بردارها را به هم تبدیل میکنند برداشته شوند. عملگرها ی ِ حاصل را با $\mathbf{cur}$ و $\mathbf{tcur}$ نشان میدهم و $(\mathbf{cur}\,\sigma)$ و $(\mathbf{tcur}\,\sigma)$ را، به ترتیب، کِر ِ σ و تیکِر ِ σ مینامم. $(\mathbb{M},g)$ یک خمینه ی ِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. σ یک s فرم ِ دیفرانسیل است. تعریف میکنم

$$\mathbf{cur}_s\,\sigma = \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\sigma. \tag{2425}$$

$$\mathbf{tcur}_s\,\sigma = (-1)^{s(m-s)}\,\mathbf{h}\,\mathbf{d}\,\sigma. \tag{2426}$$

رُشن است که

$$\mathbf{curl}_r = (\underset{\smile}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\,\mathbf{cur}_r\,\underset{\smile}{g}^{\otimes r}. \tag{2427}$$

$$\mathbf{tcurl}_r = (\underset{\smile}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\,\mathbf{tcur}_r\,\underset{\smile}{g}^{\otimes r}. \tag{2428}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\mathbf{curl}_{m-r-1}\,\mathbf{curl}_r = (\underset{\smile}{g}^{-1})^{\otimes r}(\mathbf{cur}_{m-r-1}\,\mathbf{cur}_r)\underset{\smile}{g}^{\otimes r}. \tag{2429}$$

$$\mathbf{tcurl}_{m-r-1}\,\mathbf{tcurl}_r = (\underset{\smile}{g}^{-1})^{\otimes r}(\mathbf{tcur}_{m-r-1}\,\mathbf{tcur}_r)\underset{\smile}{g}^{\otimes r}. \tag{2430}$$

همچنین،

$$\mathbf{cur}\,\mathbf{d} = 0. \tag{2431}$$

$$\mathbf{tcur}\,\mathbf{d} = 0. \tag{2432}$$

$$\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\mathbf{cur} = 0. \tag{2433}$$

$$\mathbf{d}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{tcur} = 0. \tag{2434}$$

رابطه یِ $\mathbf{tcur}$ با $\mathbf{cur}$ مشابه با رابطه یِ $\mathbf{tcurl}$ با $\mathbf{curl}$ است. به این ترتیب، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\mathbf{tcur}_s = (-1)^{(s+1)\mathsf{sy}(g)}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\smile}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\mathbf{cur}_s. \tag{2435}$$

اگر g شبه- ِ-متقارن و ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{tcur}_s = (-1)^{(s+1)\mathsf{sy}(g)}[\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{cur}_s. \tag{2436}$$

از جمله اگر g متقارن و ε با g سازگار باشد،

$$\mathbf{tcur}_s = [\mathsf{sgn}(g)]\mathbf{cur}_s. \tag{2437}$$

دیده میشود اگر σ یک s فرم-ِ-دیفرانسیل و e مختصاتی باشد،

$$\mathbf{cur}\,\sigma = \frac{1}{(s!)[(m-s-1)!]}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,g)}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1\cdots i_{m-s-1}}{}^{j\,k_1\cdots k_s}$$
$$(\mathbf{D}_j\,\sigma_{k_1\cdots k_s})e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{m-s-1}}. \tag{2438}$$

$$\mathbf{tcur}\,\sigma = \frac{1}{(s!)[(m-s-1)!]}\,g^{j\,m}\,g^{k_1\,l_1}\cdots g^{k_{m-s-1}\,l_{n-s-1}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1\cdots i_{m-s-1}\,m\,l_1\cdots l_r}$$
$$(\mathbf{D}_j\,\sigma_{k_1\cdots k_s})e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{m-s-1}}. \tag{2439}$$

62 دُ-فرمِ درونی

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدارِ دُ-فرمدار است. دُ-فرمِ درونی یِ $\boldsymbol{\eta}_s$ را تابع ی تعریف میکنم که به دُ میدانِ s فرم-ِ-دیفرانسیلِ σ و ω اسکالرِ $\boldsymbol{\eta}_s(\sigma,\omega)$ را نسبت میدهد، که

$$\boldsymbol{\eta}_s(\sigma,\omega) = \int_{\mathbb{M}}\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega. \tag{2440}$$

این را میشود بر حسبِ همضربِ برونی هم نوشت:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_s(\sigma,\omega) &= \int_{\mathbb{M}}\mathbf{h}\,[(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega],\\ &= \int_{\mathbb{M}}[(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega]\boldsymbol{\varepsilon}.\end{aligned} \tag{2441}$$

وقت ی گونه یِ فرمها یی که $\boldsymbol{\eta}_s$ بر آنها اثر میکند معلوم است، برا یِ سادگی به جا یِ $\boldsymbol{\eta}_s$ نمادِ $\boldsymbol{\eta}$ را به کار میبرم. به $\boldsymbol{\eta}$ هم دُ-فرمِ درونی میگویم.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدارِ دُ-فرمدارِ m بُعدی ست، و $\boldsymbol{\varepsilon}$ عنصر-ِ-حجمِ آن است. اگر σ و ω میدانها یِ s فرم-ِ-دیفرانسیل باشند و e یک میدان-پایه باشد،

$$\begin{aligned}\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega &= \left(\frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\right)\wedge\left[\frac{1}{s!}\,\omega_{j_1\cdots j_s}\,\mathbf{h}(e^{j_1}\wedge\cdots\wedge e^{j_s})\right],\\ &= \frac{1}{(s!)^2}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega_{j_1\cdots j_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}\\ &\quad\wedge\left[\frac{1}{(m-s)!}\,g^{j_1\,k_1}\cdots g^{j_s\,k_s}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{k_1\cdots k_s\,l_1\cdots l_{m-s}}\,e^{l_1}\wedge\cdots\wedge e^{l_{m-s}}\right],\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(s!)^2[(m-s)!]}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,g^{j_1\,k_1}\cdots g^{j_s\,k_s}\,\omega_{j_1\cdots j_s}$$
$$[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)][(m-s)!]\begin{bmatrix} i_1\cdots i_s \\ k_1\cdots k_s\end{bmatrix}[\mathbf{o}(e)], \tag{2442}$$

که نشان میدهد

$$\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega = \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,g^{j_1\,i_1}\cdots g^{j_s\,i_s}\,\omega_{j_1\cdots j_s}\,\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{2443}$$

یا

$$\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega = \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega^{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2444}$$

این هم ان (2348) است:

$$\mathbf{h}^{-1}\,(\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega) = \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,g^{j_1\,i_1}\cdots g^{j_s\,i_s}\,\omega_{j_1\cdots j_s},$$
$$= \frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega^{i_1\cdots i_s}. \tag{2348}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{\eta}_s(\sigma,\omega) = \int_{\mathbb{M}}\frac{1}{s!}\,\sigma_{i_1\cdots i_s}\,\omega^{i_1\cdots i_s}\,\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{2445}$$

از (2443) دیده میشود اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$\omega\wedge\mathbf{h}\,\sigma = (-1)^{s\,\mathsf{sy}(g)}\,\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega, \tag{2446}$$

که هم ان (2353) است:

$$\omega\wedge\mathbf{h}\,\sigma = (-1)^{[\mathsf{ty}(\sigma)][\mathsf{sy}(g)]}\,\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega. \tag{2353}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\eta}_s(\sigma,\omega) = (-1)^{s\,\mathsf{sy}(g)}\,\boldsymbol{\eta}_s(\omega,\sigma). \tag{2447}$$

به این ترتیب، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد $\boldsymbol{\eta}_s$ هم شبه- ِ-متقارن است، و

$$\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s) = \frac{1-(-1)^s}{2}\,\mathsf{sy}(g). \tag{2448}$$

یعنی برا یِ g یِ شبه- ِ-متقارن، اگر g پادمتقارن و s فرد باشد، $\boldsymbol{\eta}_s$ پادمتقارن است. در غیر ِ این صورت $\boldsymbol{\eta}_s$ متقارن است. به سادِگی دیده میشود عکس ِ این استنتاجها هم درست است: اگر

$$\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s) = \frac{1-(-1)^s}{2}, \tag{2449}$$

یعنی اگر $\boldsymbol{\eta}_s$ برا یِ همه یِ s ها شبه- ِ-متقارن باشد، برا یِ s ها یِ زُج متقارن و برا یِ s ها یِ فرد پادمتقارن، آنگاه g پادمتقارن است. اگر $\boldsymbol{\eta}_s$ برا یِ همه یِ s ها متقارن باشد، آنگاه g متقارن است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. اگر g متقارن و شبه- ِ-معین-مثبت باشد، حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ تعداد ی g، یا $(g^{-1})^*$، هم متقارن و شبه- ِ-معین-مثبت است. پس متناظر با هم فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ،

$$[\mathbf{h}^{-1}(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\sigma)] \geq 0, \tag{2450}$$

یا

$$[(\mathbf{h}^{-1}\,\sigma) \wedge^{\mathrm{t}} \sigma] \geq 0. \tag{2451}$$

به این ترتیب اگر ε با خمینه همدستیده باشد،

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma, \sigma) \geq 0. \tag{2452}$$

یعنی $\boldsymbol{\eta}$ هم شبه- ِ-معین-مثبت است. رُشن است که اگر ε با خمینه پادهمدستیده باشد، $\boldsymbol{\eta}$ شبه- ِ-معین-منفی میشود. همچنین، اگر g متقارن و معین-مثبت باشد، حاصل- ِ-ضرب ِ تانسری یِ تعداد ی g، یا $(g^{-1})^*$، هم متقارن و معین-مثبت است. پس متناظر با هم فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ناصفر ِ σ،

$$[\mathbf{h}^{-1}(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\sigma)] > 0. \tag{2453}$$

به این ترتیب اگر ε با خمینه همدستیده باشد، و میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ صفر نباشد (و پیوسته باشد)،

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma,\sigma) > 0. \tag{2454}$$

یعنی $\boldsymbol{\eta}$ هم معین-مثبت است. رُشن است که اگر ε با خمینه پادهمدستیده باشد، $\boldsymbol{\eta}$ معین-منفی میشود. به طُر ِ کلی، اگر g متقارن و معین-مثبت یا معین-منفی باشد، و میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ صفر نباشد (و پیوسته باشد)،

$$\frac{\boldsymbol{\eta}(\sigma,\sigma)}{\boldsymbol{\eta}(1,1)} > 0. \tag{2455}$$

پس اگر g متقارن و معین-مثبت یا معین-منفی باشد، صفر-شدن ِ $\boldsymbol{\eta}(\sigma,\sigma)$ با صفر-بودن ِ σ همئرز است (با شرط ِ پیوستِگی یِ σ)، یعنی $\boldsymbol{\eta}$ ناتکین است.

63 همکاهش ِ درونی

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. σ یک $(s+1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل، ω یک s فرم- ِ-دیفرانسیل، و u یک بردار است. دیده میشود

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{i}_u(\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega),\\ &= (\mathbf{i}_u\,\sigma)\wedge\mathbf{h}\,\omega + (-1)^{s+1}\,\sigma\wedge\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega,\\ &= (\mathbf{i}_u\,\sigma)\wedge\mathbf{h}\,\omega - (-1)^{s}\,\sigma\wedge\mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega). \end{aligned} \tag{2456}$$

به این ترتیب،

$$\sigma\wedge\mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega) = (-1)^s\,(\mathbf{i}_u\,\sigma)\wedge\,\mathbf{h}\,\omega, \tag{2457}$$

که نتیجه میدهد

$$(-1)^s\,\boldsymbol{\eta}(\mathbf{i}_u\,\sigma,\omega) = \boldsymbol{\eta}(\sigma,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega). \tag{2458}$$

از اینجا ترانهاده یِ کاهش ِ درونی (متناظر با دُ-فرم ِ درونی یِ $\boldsymbol{\eta}$) به دست میئاید. ترانهاده یِ کاهش- ِ-درونی با u را با $\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}$ نشان میدهم:

$$\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\omega = (-1)^{\mathsf{ty}(\omega)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega. \tag{2459}$$

$\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}$ چنان تعریف شده که

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{i}_u\,\sigma,\omega) = \boldsymbol{\eta}(\sigma,\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\omega). \tag{2460}$$

به ترانهاده یِ کاهش ِ درونی همکاهش ِ درونی هم میگویم. البته در تعریف ِ همکاهش ِ درونی فشردِگی یِ خمینه ظاهر نمیشود.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. دیده میشود اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل و u یک بردار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma &= (-1)^s\,\mathbf{j}_{\underset{\smile}{g}\,u}\,\mathbf{j}_\sigma\,\varepsilon,\\ &= (-1)^s\,\mathbf{j}_{\sigma\wedge(\underset{\smile}{g}\,u)}\,\varepsilon,\\ &= \mathbf{j}_{(\underset{\smile}{g}\,u)\wedge\sigma}\,\varepsilon,\end{aligned} \tag{2461}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma = (\underset{\smile}{g}\,u)\wedge\sigma. \tag{2462}$$

پس معلوم میشود برا یِ تعریف ِ همکاهش ِ درونی سمتدار-بودن ِ خمینه هم لازم نیست، وجود ِ دُ-فرم کافی ست.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. دیده میشود اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل و u یک بردار باشد، $(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma)$ یک $(s+1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل است. از جمله اگر σ یک m فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma = 0. \tag{2463}$$

سرانجام، رُشن است که $(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma)$ نسبت به u و σ هردُ خطی ست. به سادِگی میشود تعریف ِ (2459) یا همئرز با آن (2462) را به میدانها یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل و میدانها یِ برداری هم تعمیم داد. دیده

میشود اگر u یک میدان ِ برداری و σ یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، $(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma)$ نسبت به u و σ نقطِئی ست.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار ِ m بُعدی ست، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. ω یک r فرم- ِ-دیفرانسیل، σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل، و u یک بردار است. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,(\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega) &= (-1)^{m-r-s}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}(\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega),\\ &= (-1)^{m-r-s}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)],\\ &= (-1)^{m-r-s}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)+(-1)^{m-s}(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega)],\\ &= (-1)^{m-r-s}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega+(-1)^r\,\sigma\wedge^{\mathrm{t}}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_u\,\mathbf{h}\,\omega),\\ &= (-1)^{m-r}(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega+\sigma\wedge^{\mathrm{t}}(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\omega),\end{aligned}\tag{2464}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,(\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega)=(-1)^{\mathsf{tty}(\omega)}(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega+\sigma\wedge^{\mathrm{t}}(\mathbf{i}_u^{\mathrm{t}}\,\omega).\tag{2465}$$

این ویژِگی یِ لَیبنیتسی یِ همکاهش- ِ-درونی ست. از (2462) هم دیده میشود

$$(\mathbf{i}_u^t)^2=0.\tag{2466}$$

64 هممشتق ِ برونی

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. σ یک میدان ِ $(s-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل و ω یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل است. دیده میشود

$$\mathbf{d}(\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega)=(\mathbf{d}\,\sigma)\wedge\mathbf{h}\,\omega-(-1)^s\,\sigma\wedge\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega,\tag{2467}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma,\omega)=\int_{\mathbb{M}}\mathbf{d}(\sigma\wedge\mathbf{h}\,\omega)+(-1)^s\int_{\mathbb{M}}\sigma\wedge\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega,$$

$$= \int_{\mathbf{b}(\mathbb{M})} \sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega + (-1)^s \int_{\mathbb{M}} \sigma \wedge \mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega). \tag{2468}$$

اگر $\mathbb{M}$ بیمرز باشد، جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ آخرین برابری صفر است. در این صورت،

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \omega) = (-1)^s \int_{\mathbb{M}} \sigma \wedge \mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega). \tag{2469}$$

پس،

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \omega) = (-1)^s\,\boldsymbol{\eta}(\sigma, \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega). \tag{2470}$$

از اینجا ترانهاده یِ مشتق ِ برونی (متناظر با دُ-فرم- ِ-درونی یِ $\boldsymbol{\eta}$) به دست میئاید. ترانهاده یِ مشتق ِ برونی را با $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ نشان میدهم:

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega = (-1)^{\mathsf{ty}(\omega)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega, \tag{2471}$$

که $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ چنان تعریف شده که

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \omega) = \boldsymbol{\eta}(\sigma, \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega). \tag{2472}$$

به ترانهاده یِ مشتق ِ برونی هممشتق ِ برونی هم میگویم.

هممشتق ِ برونی برا یِ خمینِها یِ فشرده یِ بیمرز تعریف شد. اما رُشن است که (2471) برا یِ خمینِها یِ مرزدار یا نافشرده هم خُش-تعریف است. پس (2471) را تعریف ِ هممشتق ِ برونی برا یِ خمینِها یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار میگیرم. البته رُشن است که (2472) برا یِ خمینِها یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار ِ بیمرز درست است.

رُشن است که $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ خطی ست و یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل را به یک میدان ِ $(s-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل تبدیل میکند. از جمله اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\Sigma = 0. \tag{2473}$$

همچنین،

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^2 = 0. \tag{2474}$$

سرانجام، دیده میشود اگر v یک میدان ِ برداری باشد،

$$\mathbf{div}\, v = -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \underset{\sim}{g}\, v. \tag{2475}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. میگویم یک فرم- ِ-دیفرانسیل همبسته است، اگر هممشتق ِ درونی یِ آن صفر باشد. میگویم یک فرم- ِ-دیفرانسیل همدقیق است، اگر این فرم ِ دیفرانسیل هممشتق ِ برونی یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ دیگر باشد. از (2474) دیده میشود یک فرم- ِ-دیفرانسیل، اگر همدقیق باشد همبسته هم هست. نشان میدهم عکس ِ این هم مُضعَن درست است. یعنی اگر

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \sigma = 0, \tag{2476}$$

و گونه یِ σ کوچکتر از بُعد ِ خمینه باشد، مُضعَن یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ τ هست که

$$\sigma = \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \tau. \tag{2477}$$

برا یِ اثبات رابطه یِ مشابه ی که بین ِ بسته-بودن و دقیق-بودن ِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل هست را به کار میبرم. همبسته-بودن ِ σ یعنی

$$\mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \sigma = 0, \tag{2478}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \sigma = 0, \tag{2479}$$

یعنی $(\mathbf{h}\, \sigma)$ بسته است. چون $\mathrm{ty}(\sigma)$ کوچکتر از بُعد ِ خمینه است، $\mathrm{ty}(\mathbf{h}\, \sigma)$ بزرگتر از صفر میشود. از این، همراه با بسته-بودن ِ $(\mathbf{h}\, \sigma)$، نتیجه میشود مُضعَن یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ τ' هست که

$$\mathbf{h}\, \sigma = \mathbf{d}\, \tau'. \tag{2480}$$

به این ترتیب،

$$\sigma = \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \tau', \tag{2481}$$

که نشان میدهد τ با

$$\tau = (-1)^{\mathsf{ty}(\mathbf{h}^{-1}\,\tau')}\,\mathbf{h}^{-1}\,\tau',$$
$$= -(-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\tau' \tag{2482}$$

رابطه یِ (2477) را بر میئاورَد.

یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ دُ-فرمدار است، و ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. رُشن است که اگر گونه یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل برابر ِ بُعد ِ خمینه باشد، آن فرم- ِ-دیفرانسیل نمیتواند همدقیق باشد (چون فرم- ِ-دیفرانسیل ی نیست که گونه اَش بیش از بُعد ِ خمینه باشد)، اما میتواند همبسته باشد. اگر گونه یِ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ برابر با بُعد ِ خمینه باشد، σ همبسته است، اگر و تنها اگر $(\mathbf{h}\,\sigma)$، که یک صفر فرم- ِ-دیفرانسیل است، مقدار َش ثابت باشد، یعنی مشتق َش صفر باشد. این یعنی هممشتق ِ برونی یِ σ صفر است، اگر و تنها اگر یک عد ِ ثابت ِ c باشد که

$$\sigma = c\,\mathbf{h}^{-1}\,1. \tag{2483}$$

$(\mathbf{h}^{-1}\,1)$ عضو ِ خنثا یِ همضرب- ِ-برونی ست، و ضمنَن هممشتق ِ برونی یَش هم صفر است. از

$$\mathbf{h}\,\varepsilon = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\smile}{g})} \tag{2334}$$

متناظر با میدان-پایه یِ e) دیده میشود (2483) همئرز است با

$$\sigma = c\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\smile}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\varepsilon. \tag{2484}$$

از

$$\mathbf{h}\,\varepsilon = \mathsf{sgn}(g) \tag{2340}$$

هم، که به شرط ِ سازگاری یِ عنصر- ِحجم ِ خمینه با دُ-فرم ِ آن برقرار است، دیده میشود اگر عنصر- ِ-حجم ِ خمینه با دُ-فرم ِ آن سازگار باشد، (2483) همئرز است با

$$\sigma = c[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon, \tag{2485}$$

یعنی شرطِ همبسته-بودنِ فرمِ دیفرانسیلِ σ (که گونه اَش برابر با بُعدِ خمینه است) این میشود که یک عددِ ثابتِ c' باشد که

$$\sigma = c'\,\varepsilon. \tag{2486}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ سمتدارِ دُ-فرمدارِ m بُعدی ست، که ε عنصر-ِ-حجمِ آن است. دیده میشود اگر σ یک میدانِ s فرم-ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{cur}\,\sigma = (-1)^s\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}\,\sigma. \tag{2487}$$

همچنین، دیده میشود اگر T یک میدانِ تانسری یِ $(r,0)$ِ پادمتقارن باشد،

$$\mathbf{curl}\,T = (-1)^r\,(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes(m-r-1)}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T. \tag{2488}$$

اگر σ یک میدانِ s فرم-ِ-دیفرانسیل، و $\{(i, e^i)\mid i\}$ یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ فضا یِ هممماس باشد،

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma &= \frac{(-1)^s}{(s!)[(m-s)!]}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,(\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\,\sigma^{j_1\cdots j_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{m-s}}),\\
&= \frac{(-1)^s}{(s!)[(m-s)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\\
&\quad \mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{j_1\cdots j_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{m-s}})\},\\
&= \frac{(-1)^s}{(s!)[(m-s)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\\
&\quad \Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{j_1\cdots j_s}\}\Big)\mathbf{h}^{-1}(e^i\wedge e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_{m-s}}),\\
&= \frac{(-1)^s\,\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})}{(s!)[(m-s)!][(s-1)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^3}\,\boldsymbol{\varepsilon}_{j_1\cdots j_s\,i_1\cdots i_{m-s}}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{k_1\cdots k_{s-1}\,i\,i_1\cdots i_{m-s}}\\
&\quad \Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{j_1\cdots j_s}\}\Big)(\underset{\sim}{g}\,e_{k_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{k_{s-1}}),\\
&= \frac{(-1)^s}{(s!)[(s-1)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\begin{bmatrix}k_1\cdots k_{s-1}\,i\\ j_1\cdots j_s\end{bmatrix}\\
&\quad \Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{j_1\cdots j_s}\}\Big)(\underset{\sim}{g}\,e_{k_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{k_{s-1}}),\\
&= \frac{(-1)^s}{[(s-1)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\,\Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{k_1\cdots k_{s-1}\,i}\}\Big)\\
&\quad (\underset{\sim}{g}\,e_{k_1})\wedge\cdots\wedge(\underset{\sim}{g}\,e_{k_{s-1}}),
\end{aligned} \tag{2489}$$

یا

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma &= -\frac{g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}}{[(s-1)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{i\,k_1\cdots k_{s-1}}]\}\Big)\\
&\quad e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}},\\
&= -\frac{g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}}{[(s-1)!][\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\\
&\quad \Big(\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{l\,i}\,g^{l_1\,k_1}\cdots g^{l_{s-1}\,k_{s-1}}\,\sigma_{l\,l_1\cdots l_{s-1}}]\}\Big)\\
&\quad e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}}. \qquad (2490)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_{s-1}} &= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{i\,k_1\cdots k_{s-1}}\},\\
&= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}\\
&\quad \mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{l\,i}\,g^{l_1\,k_1}\cdots g^{l_{s-1}\,k_{s-1}}\,\sigma_{l\,l_1\cdots l_{s-1}}\}. \qquad (2491)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} &= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{i\,i_1\cdots i_{s-1}}\},\\
&= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{l\,i}g^{l_1\,i_1}\cdots g^{l_{s-1}\,i_{s-1}}\,\sigma_{l\,l_1\cdots l_{s-1}}\}. \qquad (2492)
\end{aligned}$$

با تعریف ِ

$$\mathfrak{D}^j\,\boldsymbol{\cdot} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{j\,i}\,\boldsymbol{\cdot}\}, \qquad (2493)$$

(وقت ی e مختصاتی ست)، دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma &= -\frac{g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}}{(s-1)!}(\mathfrak{D}^j\,\sigma_j{}^{k_1\cdots k_{s-1}})e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}},\\
&= -\frac{g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}}{(s-1)!}[\mathfrak{D}^j(g^{l_1\,k_1}\cdots g^{l_{s-1}\,k_{s-1}}\,\sigma_{j\,l_1\cdots l_{s-1}})]\\
&\quad e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}}. \qquad (2494)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_{s-1}} &= -g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}\,\mathfrak{D}^j\,\sigma_j{}^{k_1\cdots k_{s-1}},\\
&= -g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}\,\mathfrak{D}^j(g^{l_1\,k_1}\cdots g^{l_{s-1}\,k_{s-1}}\,\sigma_{j\,l_1\cdots l_{s-1}}). \qquad (2495)
\end{aligned}$$

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -\mathfrak{D}^j\,\sigma_j{}^{i_1\cdots i_{s-1}},$$
$$= -\mathfrak{D}^j(g^{l_1\,i_1}\cdots g^{l_{s-1}\,i_{s-1}}\,\sigma_{j\,l_1\cdots l_{s-1}}). \tag{2496}$$

اگر ε با g سازگار باشد (و e همچنان مختصاتی باشد)،

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma = -\frac{g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}}{[(s-1)!]\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,\{\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\,\sigma^{i\,k_1\cdots k_{s-1}}]\}$$
$$e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}}, \tag{2497}$$

یا

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_{s-1}} = -\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,g_{j_1\,k_1}\cdots g_{j_{s-1}\,k_{s-1}}$$
$$\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\,\sigma^{i\,k_1\cdots k_{s-1}}]. \tag{2498}$$
$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\,\sigma^{i\,i_1\cdots i_{s-1}}]. \tag{2499}$$

وقت ی e مختصاتی ست و ε با g سازگار است، (2493) میشود

$$\mathfrak{D}^j\,\boldsymbol{\cdot} = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}}\,\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\sim}{g})|}\,g^{j\,i}\,\boldsymbol{\cdot}]. \tag{2500}$$

در این حالت (2494) تا (2496) همچنان برقرار َند، اما برا یِ تعریف ِ $\mathfrak{D}^j$ دیگر عنصر- ِحجم لازم نیست. حتا لازم نیست خمینه سمتدار باشد. $\mathfrak{D}^j$ را میشود با فقط g تعریف کرد. مستقیمَن هم دیده میشود در (2497) تا (2499) عنصر- ِ-حجم به کار نرفته. در واقع هممشتق ِ برونی را هم میشد مثل ِ دیورژانس با دُ-فرم (به جا یِ عنصر- ِ-حجم) تعریف کرد، که با آن تعریف لازم نبود خمینه سمتدار باشد. از جمله، اگر $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با g تعریف شود و در یک نقطه یِ مشتق ِ مئلفِها یِ g صفر باشد، در آن نقطه،

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma = -\frac{1}{(s-1)!}(\mathbf{D}_i\,\sigma^i{}_{j_1\cdots j_{s-1}})e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}},$$
$$= -\frac{1}{(s-1)!}(\mathfrak{D}^j\,\sigma_{j\,j_1\cdots j_{s-1}})e^{j_1}\wedge\cdots e^{j_{s-1}}. \tag{2501}$$
$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_{s-1}} = -\mathbf{D}_i\,\sigma^i{}_{j_1\cdots j_{s-1}},$$
$$= -\mathfrak{D}^j\,\sigma_{j\,j_1\cdots j_{s-1}}. \tag{2502}$$

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -\mathbf{D}_i\,\sigma^{i\,i_1\cdots i_{s-1}},$$
$$= -\mathfrak{D}^j\,\sigma_j{}^{i_1\cdots i_{s-1}}. \tag{2503}$$

مثل ِ این است که با $\mathfrak{D}^j$ ها یک بردار تعریف شده:

$$\mathfrak{D} = e_i\,\mathfrak{D}^i, \tag{2504}$$

و

$$\mathbf{d}^t = -\mathbf{i}_{\mathfrak{D}}. \tag{2505}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ- فرمدار ِ m بُعدی ست. ω یک میدان ِ r فرم- ِ- دیفرانسیل، و σ یک میدان ِ s فرم- ِ- دیفرانسیل است. مشتق ِ برونی نسبت به ضرب ِ برونی لَیبنیتسی ست. میخاهم مانسته ای برا یِ هممشتق ِ برونی بیابم. از

$$\mathbf{h}\,\mathbf{j}'_\omega\,\sigma = (-1)^{[\mathsf{ty}(\omega)][m-\mathsf{ty}(\omega)]}(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\omega, \tag{2324}$$

دیده میشود

$$\mathbf{j}'_\omega\,\sigma = (-1)^{r(m-r)}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\omega]. \tag{2506}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{j}'_\omega\,\sigma = (-1)^{r(m-r)+(s-r)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\omega],$$
$$= (-1)^{r\,m+s}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\omega + (-1)^{m-s}(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{d}\,\omega)],$$
$$= (-1)^{r\,m+s}[(-1)^{r(m-r)}\,\mathbf{j}'_\omega\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma$$
$$+ (-1)^{m-s+(r+1)(m-r-1)}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\omega}\,\sigma], \tag{2507}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{j}'_\omega\,\sigma = (-1)^r\,(\mathbf{j}'_\omega\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\omega}\,\sigma). \tag{2508}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma &= (-1)^{m-r}(\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega}\,\sigma),\\ &= (-1)^{m}[(-1)^{r}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega}\,\sigma],\end{aligned} \tag{2509}$$

یا،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)] &= (-1)^{m\,(r+1)}[\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\omega}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - (-1)^{r}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega}\,\sigma],\\ &= (-1)^{m\,(r+1)}\{(-1)^{r(m-r)}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)]\\ &\quad - (-1)^{r}\,(-1)^{(r-1)(m-r+1)}\\ &\quad \mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega)]\},\end{aligned} \tag{2510}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)] &= (-1)^{m-r}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)]\\ &\quad + \mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega)].\end{aligned} \tag{2511}$$

این شکل ی از (2508) است که نسبت به ω و σ متقارنتر مینماید. یک راه ِ دیگر ِ رسیدن به هم ین رابطه این است.

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)] &= (-1)^{m-(m-s)-(m-r)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)],\\ &= (-1)^{r+s-m}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)\\ &\quad + (-1)^{m-s}\,(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\omega)],\\ &= (-1)^{r+s-m}\,\mathbf{h}^{-1}[(-1)^{s}\,(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\omega)\\ &\quad + (-1)^{m-s}\,(-1)^{r}(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge(\mathbf{h}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega)],\end{aligned} \tag{2512}$$

که هم ان (2511) است. اینها بر حسب ِ همضرب- ِ-برونی چنین میشوند.

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\sigma\wedge^{\mathrm{t}}\omega) = (-1)^{\mathsf{tty}(\omega)}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\omega + \sigma\wedge^{\mathrm{t}}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega). \tag{2513}$$

از جمله، اگر Σ اسکالر باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma\,\sigma) &= \mathbf{d}^{\mathrm{t}}[(\mathbf{h}^{-1}\,\Sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\,\sigma],\\ &= (-1)^{\mathsf{tty}(\sigma)}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}\,\Sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\,\sigma + (\mathbf{h}^{-1}\,\Sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma,\end{aligned}\tag{2514}$$

یا

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma\,\sigma) = (-1)^{\mathsf{tty}(\sigma)}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{h}^{-1}\,\Sigma)\wedge^{\mathrm{t}}\,\sigma + \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma.\tag{2515}$$

بر حسب ِ مشتق ِ برونی،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma\,\sigma) &= (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}(\Sigma\,\sigma),\\ &= (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{h}\,\sigma + \Sigma\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma],\end{aligned}\tag{2516}$$

که هم ان (2515) است. ضمنَن،

$$\begin{aligned}\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{h}\,\sigma] &= (-1)^{m-\mathsf{ty}(\sigma)}\,\mathbf{h}^{-1}[(\mathbf{h}\,\sigma)\wedge\mathbf{d}\,\Sigma],\\ &= (-1)^{m-\mathsf{ty}(\sigma)}\,(-1)^{m-1}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma,\\ &= (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)-1}\,\mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma.\end{aligned}\tag{2517}$$

پس،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma\,\sigma) &= \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma,\\ &= \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{i}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma.\end{aligned}\tag{2518}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است. اگر $\boldsymbol{\eta}$ شبه- ِ-متقارن باشد، متناظر با میدان ِ $(s-1)$ فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ و میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل ِ ω،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_{s-1}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega, \sigma) &= (-1)^{\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_{s-1})}\,\boldsymbol{\eta}_{s-1}(\sigma, \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\omega),\\ &= (-1)^{\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_{s-1})}\,\boldsymbol{\eta}_{s}(\mathbf{d}\,\sigma, \omega),\end{aligned}$$

$$= (-1)^{\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_{s-1})+\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s)}\,\boldsymbol{\eta}_s(\omega, \mathbf{d}\,\sigma), \tag{2519}$$

که نشان میدهد

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}\,\sigma = (-1)^{\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_{s-1})+\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s)}\,\mathbf{d}\,\sigma. \tag{2520}$$

از جمله اگر $\boldsymbol{\eta}$ متقارن باشد،

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{d}. \tag{2521}$$

اگر g پادمتقارن باشد،

$$\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s) = \frac{1-(-1)^s}{2}. \tag{2449}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_{s-1}) + \mathsf{sy}(\boldsymbol{\eta}_s) = 1, \tag{2522}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = -\mathbf{d}. \tag{2523}$$

پس به طُر ِ کلی، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد،

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{d}. \tag{2524}$$

معلوم شد همکاهش ِ درونی و هممشتق ِ برونی شباهتها یی با کاهش ِ درونی و مشتق ِ برونی دارند. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است، σ یک میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل است، و v یک میدان ِ برداری ست. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma &= (-1)^{s+1}\,(-1)^s\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\mathbf{h}\,\sigma \\ &\quad + (-1)^s\,(-1)^{s-1}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma, \\ &= -\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v\,\mathbf{h}\,\sigma + \mathbf{i}_v\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\sigma),\end{aligned} \tag{2525}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma = -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\sigma, \tag{2526}$$

یا بستِتر

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}} + \mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}} = -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}. \tag{2527}$$

همچنین، با استفاده از

$$(\mathbf{d}\,\mathbf{i}_v)^{\mathrm{t}} = \mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}, \tag{2528}$$

$$(\mathbf{i}_v\,\mathbf{d})^{\mathrm{t}} = \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}, \tag{2529}$$

$$\mathbf{L}_v = \mathbf{i}_v\,\mathbf{d} + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_v, \tag{804}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v^{\mathrm{t}} &= \mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}} + \mathbf{d}^{t}\,\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}},\\ &= -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h},\end{aligned} \tag{2530}$$

یا مفصلتر،

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_v^{\mathrm{t}}\,\sigma &= (\underset{\sim}{g}\,v)\wedge\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{d}^{\mathrm{t}}[(\underset{\sim}{g}\,v)\wedge\sigma],\\ &= -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\sigma.\end{aligned} \tag{2531}$$

برا یِ این که $\mathbf{i}_v^{\mathrm{t}}$ ترانهاده یِ $\mathbf{i}_v$ باشد (ترانهاده ای که با $\boldsymbol{\eta}$ تعریف شده)، لازم نیست خمینه فشرده و بیمرز باشد. اما $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ ترانهاده یِ $\mathbf{d}$ است، به شرط ی که خمینه فشرده و بیمرز باشد. به هم ین ترتیب، $\mathbf{L}_v^{\mathrm{t}}$ هم ترانهاده یِ $\mathbf{L}_v$ است به شرط ی که خمینه فشرده و بیمرز باشد. این که در این حالت $\mathbf{L}_v^{\mathrm{t}}$ ترانهاده یِ $\mathbf{L}_v$ است را مستقیمَن هم میشود دید. σ و ω میدانها یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل َند. دیده میشود

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{L}_v\,\sigma,\omega) = \int_{\mathbb{M}}(\mathbf{L}_v\,\sigma)\wedge\mathbf{h}\,\omega,$$

$$= \int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) - \int_{\mathbb{M}} \sigma \wedge \mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\omega,$$
$$= \int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) - \int_{\mathbb{M}} \sigma \wedge \mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\omega),$$
$$= \int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) + \boldsymbol{\eta}(\sigma, -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\omega). \tag{2532}$$

وقت ی $\mathbb{M}$ فشرده و بیمرز است، اگر τ یک میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل باشد که گونه اَش با بُعد ِ $\mathbb{M}$ برابر است

$$\int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v\,\tau = 0. \tag{1081}$$

گونه یِ $(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega)$ با بُعد ِ $\mathbb{M}$ برابر است. پس

$$\int_{\mathbb{M}} \mathbf{L}_v(\sigma \wedge \mathbf{h}\,\omega) = 0. \tag{2533}$$

به این ترتیب، اگر $\mathbb{M}$ فشرده و بیمرز باشد،

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{L}_v\,\sigma, \omega) = \boldsymbol{\eta}(\sigma, -\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_v\,\mathbf{h}\,\omega), \tag{2534}$$

که نشان میدهد $\mathbf{L}_v^{\mathrm{t}}$ ترانهاده یِ $\mathbf{L}_v$ است.

65 لَپلَسی

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. مشتق ِ برونی گونه یِ فرم- ِ-دیفرانسیلها را یک ی زیاد، و هممشتق ِ برونی گونه یِ فرم- ِ-دیفرانسیلها را یک ی کم میکند. پس ترکیب ِ اینها گونه یِ فرم- ِ-دیفرانسیلها را ثابت نگه میدارد. $(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}})$ و $(\mathbf{d}^t\,\mathbf{d})$ هر-دُ یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل را به یک میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل تبدیل میکنند. لَپلَسی را با $\triangle$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\triangle = -(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}} + \mathbf{d}^t\,\mathbf{d}). \tag{2535}$$

با استفاده از این که مجذور ِ مشتق ِ برونی و مجذور ِ هممشتق ِ برونی صفر َند، یک شکل ِ دیگر برا یِ لَپلَسی میشود

$$\triangle = -(\mathbf{d} + \mathbf{d}^{\mathrm{t}})^2. \tag{2536}$$

این شکل یک نارسایی دارد و آن این که از اثر ِ آن بر میدان ِ s فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ جملِها یی به دست میئاید که $(s-2)$ فرم- ِ-دیفرانسیل، $(s+2)$ فرم- ِ-دیفرانسیل، و s فرم- ِ-دیفرانسیل َند، و این جملِها با هم جمع میشوند:

$$\triangle\,\sigma = -(\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma), \tag{2537}$$

در حال ی که بین ِ فرم- ِ-دیفرانسیلها یِ با گونِها یِ متفاوت جمع تعریف نشده. البته $(s-2)$ فرم- ِ-دیفرانسیل، و $(s+2)$ فرم- ِ-دیفرانسیل ی که به این ترتیب به دست میئایند، به ترتیب $(\mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\sigma)$ و $(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)$، صفر َند. پس عملَن فقط میدانها یِ s فرم- ِ-دیفرانسیل با هم جمع میشوند.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. هممشتق ِ برونی را میشود با استفاده از فقط g تعریف کرد. در این حالت لازم نیست خمینه سمتدار باشد. اما اگر خمینه سمتدار باشد و یک عنصر- ِ-حجم ِ ε داشته باشد، هممشتق ِ برونی را میشود با ε هم تعریف کرد. البته باز هم g لازم است. اگر ε با g سازگار باشد، این دُ-تعریف یکسان َاند. رُشن است که اینها برا یِ انواع ِ تعریف ِ لَپلَسی هم برقرار است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار ِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. از تعریف ِ هممشتق ِ برونی و کِر و تیکِر دیده میشود اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma &= -(-1)^{s}\,\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{d}\,\mathbf{h}\,\mathbf{d}\,\sigma,\\ &= -(-1)^{s+s(m-s)}\,\mathbf{cur}\,\mathbf{tcur}\,\sigma,\end{aligned} \tag{2538}$$

به این ترتیب،

$$\triangle\,\sigma = (-1)^{s(m-s-1)}\,\mathbf{cur}\,\mathbf{tcur}\,\sigma - \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma. \tag{2539}$$

همچنین، اگر T یک میدان ِ تانسری یِ پادمتقارن ِ $(r,0)$ باشد،

$$\begin{aligned}\triangle\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T &= (-1)^{r(m-r-1)}\,\mathbf{cur}\,\mathbf{tcur}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T - \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T,\\ &= (-1)^{r(m-r-1)}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,\mathbf{curl}\,\mathbf{tcurl}\,T - \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\underset{\sim}{g}^{\otimes r}\,T,\end{aligned} \tag{2540}$$

یا

$$(\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes r} \triangle \underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T = (-1)^{r(m-r-1)}\, \mathbf{curl}\, \mathbf{tcurl}\, T - (\underset{\sim}{g}^{-1})^{\otimes r}\, \mathbf{d}\, \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \underset{\sim}{g}^{\otimes r}\, T. \tag{2541}$$

از جمله اگر v یک میدان ِ برداری باشد،

$$\triangle(\underset{\sim}{g}\, v) = \underset{\sim}{g}[(-1)^m\, \mathbf{curl}\, \mathbf{tcurl}\, v + \mathbf{grad}\, \mathbf{div}\, v], \tag{2542}$$

یا

$$\underset{\sim}{g}^{-1} \triangle \underset{\sim}{g}\, v = (-1)^m\, \mathbf{curl}\, \mathbf{tcurl}\, v + \mathbf{grad}\, \mathbf{div}\, v. \tag{2543}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. از تعریف ِ لَپلَسی و تعریف ِ هممشتق ِ برونی، رابطِها یِ به ترتیب (2535) و

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \omega = (-1)^{\mathsf{ty}(\omega)}\, \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \omega, \tag{2471}$$

دیده میشود اگر σ یک میدان ِ فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\triangle\, \sigma = (-1)^{\mathsf{ty}(\sigma)}\, (-\mathbf{d}\, \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \sigma + \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \mathbf{d}\, \sigma). \tag{2544}$$

از جمله اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\triangle\, \Sigma = \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \mathbf{d}\, \Sigma. \tag{2545}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\triangle\, \Sigma = \mathbf{h}^{-1}\, \mathbf{d}\, \mathbf{h}\, \underset{\sim}{g}\, \underset{\sim}{g}^{-1}\, \mathbf{d}\, \Sigma, \tag{2546}$$

که نتیجه میدهد

$$\triangle\, \Sigma = \mathbf{div}\, \mathbf{grad}\, \Sigma. \tag{2547}$$

به این ترتیب، اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد،

$$\triangle\,\Sigma = \mathfrak{D}^i\,\mathbf{D}_i\,\Sigma. \tag{2548}$$

اگر لَپلَسی با عنصر-ِ-حجم ِ ε تعریف شده باشد،

$$\triangle\,\Sigma = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma\}. \tag{2549}$$

و اگر لَپلَسی با فقط دُ-فرم ِ g تعریف شده باشد،

$$\triangle\,\Sigma = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}}\,\mathbf{D}_j\,[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}\,g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma]. \tag{2550}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. σ یک متناظر با s فرم-ِ-دیفرانسیل است، و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. دیده میشود

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_{s-1}} = -\mathbf{D}_i\,\sigma^i{}_{j_1\cdots j_{s-1}} + \mathsf{rem}, \tag{2551}$$

که rem نسبت به σ خطی و نقطِئی ست، و اگر مشتق ِ مئلفِها یِ g صفر باشد (و مشتق ِ $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)$ هم صفر باشد، وقت ی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با عنصر-ِ-حجم ِ ε تعریف شده) صفر است. به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_{j_1\cdots j_s} = \sum_{k=1}^{s}(-1)^k\,\mathbf{D}_{j_k}\,\mathbf{D}_i\,\sigma^i{}_{j_1\cdots j_{k-1}\,j_k\cdots j_s} + \mathsf{rem}, \tag{2552}$$

که rem شامل ِ مشتق ِ دست-ِ-بالا اول ِ σ است و اگر مشتق ِ اول و دوم ِ مئلفِها یِ g صفر باشد (و مشتق ِ اول و دوم ِ $\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)$ هم صفر باشد، وقت ی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با عنصر-ِ-حجم ِ ε تعریف شده) صفر است. همچنین،

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\sigma)_{j_0\cdots j_s} &= \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\,\mathbf{D}_{j_k}\,\sigma_{j_0\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_s},\\ &= \mathbf{D}_{j_0}\,\sigma_{j_1\cdots j_s} + \sum_{k=1}^{s}(-1)^k\,\mathbf{D}_{j_k}\,\sigma_{j_0\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_s}.\end{aligned} \tag{2553}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{d}^t\,\mathbf{d}\,\sigma)_{j_1\cdots j_s} = -g^{j_0\,i}\,\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_{j_0}\,\sigma_{j_1\cdots j_s} - \sum_{k=1}^{s}(-1)^k\,\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_{j_k}\,\sigma^i{}_{j_1\cdots j_{k-1}j_{k+1}\cdots j_s} + \mathsf{rem}, \tag{2554}$$

که rem شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ σ است، و اگر مشتق ِ مئلفِها یِ g صفر باشد (و مشتق ِ $\mathbf{v}_\varepsilon(e)$ هم صفر باشد، وقت ی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با عنصر- ِ-حجم ِ ε تعریف شده) صفر است. از (2552) و (2554) نتیجه میشود

$$(\triangle\,\sigma)_{j_1\cdots j_s} = g^{i\,j}\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_i\,\sigma_{j_1\cdots j_s} + \mathsf{rem}, \tag{2555}$$

که rem شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ σ است و اگر مشتق ِ اول و دوم ِ مئلفِها یِ g صفر باشد (و مشتق ِ اول و دوم ِ $\mathbf{v}_\varepsilon(e)$ هم صفر باشد، وقت ی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با عنصر- ِ-حجم ِ ε تعریف شده) صفر است. دیده میشود (2549) و (2550) حالتها یِ خاص ِ (2555) اند. البته در این حالتها برا یِ صفر-شدن ِ rem کافی ست مشتق ِ مئلفِها یِ g صفر باشد (و مشتق ِ $\mathbf{v}_\varepsilon(e)$ هم صفر باشد، وقت ی $\mathbf{d}^{\mathrm{t}}$ با عنصر- ِ-حجم ِ ε تعریف شده).

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. لَپلَسی یک عمگر ِ مشتق- ِ-دوم است. متناظر با فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ و اسکالر ِ Σ، از

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma\,\sigma) &= \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{j}'_{\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma,\\ &= \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma - \mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma,\end{aligned} \tag{2518}$$

دیده میشود

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,(\Sigma\,\sigma) = \Sigma\,(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma) - \mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma. \tag{2556}$$

به این ترتیب،

$$-\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,(\Sigma\,\sigma) = -(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma) - \Sigma\,\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma. \tag{2557}$$

همچنین،

$$-\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,(\Sigma\,\sigma) = -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma + \Sigma\wedge\mathbf{d}\,\sigma],$$
$$= -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] - \Sigma\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma + \mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\mathbf{d}\,\sigma. \tag{2558}$$

به این ترتیب،

$$\triangle\,(\Sigma\,\sigma) = \Sigma\,(\triangle\,\sigma) - (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma + \mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\mathbf{d}\,\sigma$$
$$- \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma. \tag{2559}$$

در طرف ِ راست، جمله یِ اول شامل ِ مشتق ِ صفرُم ِ Σ و مشتق ِ دست- ِ-بالا دوم ِ σ است، جملِها یِ دوم و سوم شامل ِ مشتق ِ اول Σ و مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ σ، و جملِها یِ چهارم و پنجم شامل ِ مشتقها یِ اول و دوم ِ Σ و مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ σ یَند. میخاهم جملِها یِ شامل ِ مشتق ِ دوم ِ Σ را از جملِها یِ چهارم و پنجم جدا کنم. برا یِ این کار $\mathfrak{K}$ به شکل ِ زیر را به کار میبرم

$$\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma) = -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] + \mathbf{d}\,\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma + (\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\,\sigma. \tag{2560}$$

میخاهم نشان دهم $\mathfrak{K}$ شامل ِ مشتق ِ دوم ِ Σ نیست، یعنی نسبت به $(\mathbf{d}\,\Sigma)$ نقطِئی ست. این یعنی اگر

$$\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma) = \mathfrak{K}_2^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\Sigma + \mathfrak{K}_1^{i}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma, \tag{2561}$$

که $\mathfrak{K}_2$ متقارن است، آنگاه $\mathfrak{K}_2$ صفر است. Σ' را یک میدان ِ اسکالر میگیرم. دیده میشود

$$\mathfrak{K}(\Sigma'\,\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma) = -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[\Sigma'\,(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma] + \mathbf{d}\,[\Sigma'\,\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma] + [\mathbf{d}^{\mathrm{t}}(\Sigma'\,\mathbf{d}\,\Sigma)]\,\sigma,$$
$$= \Sigma'\,\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma) + \mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma'}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma]$$
$$+ (\mathbf{d}\,\Sigma')\wedge\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma - [\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma'}\,\mathbf{d}\,\Sigma]\,\sigma, \tag{2562}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathfrak{K}(\Sigma'\,\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma) = \Sigma'[\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)$$
$$- (\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathrm{d}\,\Sigma'}\,\sigma + (\mathbf{d}\,\Sigma')\wedge\mathbf{i}_{(g^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma. \tag{2563}$$

از (2561) دیده میشود

$$\mathfrak{K}(\Sigma'\,\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)=\mathfrak{K}_2^{i\,j}(\mathbf{D}_i\,\Sigma')(\mathbf{D}_j\,\Sigma)+\Sigma'\,\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma). \tag{2564}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_2^{i\,j}\,(\mathbf{D}_i\,\Sigma')(\mathbf{D}_j\,\Sigma)&=-(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{i}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma'}\,\sigma\\&\quad+(\mathbf{d}\,\Sigma')\wedge\mathbf{i}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma.\end{aligned} \tag{2565}$$

طرف ِ چپ نسبت به Σ و Σ' متقارن، و طرف ِ راست نسبت به Σ و Σ' پادمتقارن است. پس دُ-طرف صفر َند. این یعنی

$$\mathfrak{K}_2^{i\,j}=0. \tag{2566}$$

پس $\mathfrak{K}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)$ نسبت به $(\mathbf{d}\,\Sigma)$ نقطِئی ست. به این ترتیب، با توجه به این که $(-\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\Sigma)$ هم ان $(\triangle\,\Sigma)$ است،

$$\triangle(\Sigma\,\sigma)=\Sigma\,(\triangle\,\sigma)+(\triangle\,\Sigma)\,\sigma+\triangle_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma), \tag{2567}$$

که $\triangle_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)$ شامل ِ مشتق ِ اول ِ Σ و مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ σ است. در واقع،

$$\begin{aligned}\triangle_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)&=-(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma+\mathbf{i}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\mathbf{d}\,\sigma\\&\quad-\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,[(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\sigma]+\mathbf{d}\,\mathbf{i}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma+(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\,\sigma,\end{aligned} \tag{2568}$$

یا،

$$\begin{aligned}\triangle_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,\sigma)&=-\mathbf{L}^{\mathrm{t}}_{\underset{\smile}{g}^{-1}\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma+\mathbf{L}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma+(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\,\sigma,\\&=\mathbf{h}^{-1}\,\mathbf{L}_{\underset{\smile}{g}^{-1}\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\mathbf{h}\,\sigma+\mathbf{L}_{(\underset{\smile}{g}^{-1})^*\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,\sigma+(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\,\sigma.\end{aligned} \tag{2569}$$

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است. σ یک فرم- ِ-دیفرانسیل است. دیده میشود

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma)=\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma,\mathbf{d}\,\sigma). \tag{2570}$$

اگر g شبه- ِ-متقارن باشد، $(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}$ هم با $[(-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{d}]$ برابر است. پس،

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma, \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma) = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \mathbf{d}\,\sigma). \tag{2571}$$

به این ترتیب، اگر g شبه- ِ-متقارن باشد

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma, \triangle\,\sigma) = -\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \mathbf{d}\,\sigma) - (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma, \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma). \tag{2572}$$

اگر $\boldsymbol{\eta}$ متقارن باشد (g متقارن باشد)،

$$\boldsymbol{\eta}(\sigma, \triangle\,\sigma) = -\boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}\,\sigma, \mathbf{d}\,\sigma) - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma, \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma). \tag{2573}$$

اگر g متقارن و معین-مثبت باشد، $\{[\boldsymbol{\eta}(1,1)]^{-1}\,\boldsymbol{\eta}\}$ هم معین-مثبت است. پس هر یک از جملِها یِ طرف ِ راست یک مضرب ِ نامثبت از $[\boldsymbol{\eta}(1,1)]$ است. به این ترتیب،

$$\frac{\boldsymbol{\eta}(\sigma, \triangle\,\sigma)}{\boldsymbol{\eta}(1,1)} \leq 0. \tag{2574}$$

برابری وقت ی و فقط وقت ی رخ میدهد که هر-دُ جمله یِ طرف ِ راست ِ (2573) صفر باشند، که این هم وقت ی و فقط وقت ی رخ میدهد که

$$\mathbf{d}\,\sigma = 0. \tag{2575}$$

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma = 0. \tag{2576}$$

اگر $(\triangle\,\sigma)$ صفر باشد، طرف ِ چپ ِ (2573) صفر است، در نتیجه (2575) و (2576) برقرار ند. برعکس، از تعریف ِ لَپلَسی دیده میشود اگر (2575) و (2576) برقرار باشند $(\triangle\,\sigma)$ صفر است. پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ صفر-بودن ِ $(\triangle\,\sigma)$ برقراری یِ (2575) و (2576) است. میگویم σ همساز است، اگر $(\triangle\,\sigma)$ صفر باشد. پس یک فرم- ِ-دیفرانسیل همساز است، اگر و تنها اگر بسته و همبسته باشد.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است، و g شبه- ِ-متقارن است. دیده

میشود

$$(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = (\mathbf{d}^{t})^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}},$$
$$= (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}. \tag{2577}$$

به هم ین ترتیب،

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d})^{\mathrm{t}} = \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,(\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}},$$
$$= (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}. \tag{2578}$$

پس،

$$\triangle^{\mathrm{t}} = (-1)^{\mathsf{sy}(g)}\,\triangle. \tag{2579}$$

از جمله اگر g متقارن باشد،

$$(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}. \tag{2580}$$

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d})^{\mathrm{t}} = \mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}. \tag{2581}$$

$$\triangle^{\mathrm{t}} = \triangle. \tag{2582}$$

وقت ی g متقارن است، لَپلَسی اِرمیتی ست. از این که لَپلَسی اِرمیتی ست نتیجه میشود ویژه-مقدارها یِ لَپلَسی حقیقی‘یَند و ویژه-برداها یِ لَپلَسی را هم میشود حقیقی گرفت.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است، که g متقارن و معین-مثبت است. فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ یک ویژه-بردار ِ لَپلَسی متناظر با ویژه-مقدار ِ λ است. یعنی

$$\triangle\,\sigma = \lambda\,\sigma, \tag{2583}$$

(و σ ناصفر است). λ حقیقی ست. σ را هم میشود حقیقی گرفت. چنین میکنم. از (2574) دیده میشود

$$\lambda\,\frac{\boldsymbol{\eta}(\sigma,\sigma)}{\boldsymbol{\eta}(1,1)} \leq 0. \tag{2584}$$

اما $\{[\boldsymbol{\eta}(1,1)]^{-1}\,\boldsymbol{\eta}\}$ معین-مثبت است. پس چون σ صفر نیست،

$$\frac{\boldsymbol{\eta}(\sigma,\sigma)}{\boldsymbol{\eta}(1,1)} > 0. \tag{2455}$$

به این ترتیب،

$$\lambda \leq 0. \tag{2585}$$

خلاصه، گیرم $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار باشد، که g متقارن و معین-مثبت است. در این صورت ویژه-مقدارها یِ لَپلَسی حقیقی و نامثبت َند. یک فرم- ِ-دیفرانسیل همساز است (ویژه-بردار ِ لَپلَسی متناظر با ویژه-مقدار ِ صفر است)، اگر و تنها اگر بسته و همبسته باشد.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است، که g متقارن و معین-مثبت است. این که لَپلَسی اِرمیتی ست، یعنی متناظر با s فرم- ِ-دیفرانسیلها یِ دلبخاه ِ σ و ω،

$$\boldsymbol{\eta}(\triangle\,\omega, \sigma) = \boldsymbol{\eta}(\omega, \triangle\,\sigma). \tag{2586}$$

به این ترتیب، σ بر لَپلَسی یِ همه یِ s فرم- ِ-دیفرانسیلها عمود است، اگر و تنها اگر لَپلَسی یِ σ صفر باشد، یعنی σ همساز باشد:

$$[\mathsf{img}(\triangle)]^{\perp} = \mathsf{ker}(\triangle). \tag{2587}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ فشرده یِ سمتدار ِ بیمرز ِ دُ-فرمدار است، که g متقارن و معین-مثبت است. فرم- ِ-دیفرانسیل ِ σ را به شکل ِ مجموع ِ 2 جمله مینویسم، که یک ی در $[\mathsf{img}(\triangle)]$ و دیگری در $[\mathsf{ker}(\triangle)]$ است:

$$\sigma = \omega + \sigma_0. \tag{2588}$$

$$\omega \in [\mathsf{img}(\triangle)]. \tag{2589}$$

$$\sigma_0 \in [\mathsf{ker}(\triangle)]. \tag{2590}$$

به این ترتیب، یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ τ هست که

$$\omega = \triangle\,\tau. \tag{2591}$$

تعریف میکنم

$$\sigma_{\rm e} = -\mathbf{d}\,\tau. \tag{2592}$$

$$\sigma_{\rm ce} = -\mathbf{d}^{\rm t}\,\tau. \tag{2593}$$

دیده میشود

$$\sigma = \mathbf{d}^{\rm t}\,\sigma_{\rm e} + \mathbf{d}\,\sigma_{\rm ce} + \sigma_0. \tag{2594}$$

رُشن است که

$$\mathbf{d}\,\sigma_{\rm e} = 0, \tag{2595}$$

$$\mathbf{d}^{\rm t}\,\sigma_{\rm ce} = 0, \tag{2596}$$

$$\triangle\,\sigma_0 = 0, \tag{2597}$$

و البته رابطه یِ اخیر همئرز با این است که

$$\mathbf{d}\,\sigma_0 = 0, \tag{2598}$$

$$\mathbf{d}^{\rm t}\,\sigma_0 = 0, \tag{2599}$$

یعنی σ_0 بسته و همبسته است. رابطه یِ (2594) تجزیه یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل به 3 جمله است، که اول ی همدقیق، دومی دقیق، و سومی همساز است. بیش از این، جمله یِ اول هممشتق ِ برونی یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ دقیق، و جمله یِ دوم مشتق ِ برونی یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل ِ همدقیق است. البته میشود جمله یِ سوم را به جمله یِ اول یا دوم افزود، یا کسر ِ ثابت ی از آن را به جمله یِ اول و باقیمانده را به جمله یِ دوم افزود:

$$\sigma = \sigma_{\rm cc} + \sigma_{\rm c}, \tag{2600}$$

که

$$\sigma_{\rm cc} = \mathbf{d}^{\rm t}\,\sigma_{\rm e} + \mathfrak{a}\,\sigma_0, \tag{2601}$$

$$\sigma_{\rm c} = \mathbf{d}\,\sigma_{\rm ce} + \mathfrak{b}\,\sigma_0, \tag{2602}$$

و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ثابتها یی یَند که مجموع ِشان یک است. رُشن است که

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma_{\mathrm{cc}} = 0. \tag{2603}$$

$$\mathbf{d}\,\sigma_{\mathrm{c}} = 0. \tag{2604}$$

به این ترتیب، (2600) تجزیه یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل به دُ جمله است، که اولی همبسته و دومی بسته است.

66 سیلَپلَسی

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. $(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T)$ را برا یِ میدان ِ تانسری یِ T چنین تعریف میکنم.

$$\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T = \mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\boldsymbol{\nabla}(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T. \tag{2605}$$

$(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T)$ را سیلَپلَسی یِ T مینامم. اگر تانسر ِ T از نُع ِ (r,s) باشد، $(\boldsymbol{\nabla}\,T)$ از نُع ِ $(r,s+1)$ است، $[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]$ از نُع ِ $(r+1,s)$ است، و $[\boldsymbol{\nabla}(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]$ از نُع ِ $(r+1,s+1)$ است. به این ترتیب $(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T)$ از نُع ِ (r,s) است. پس $\boldsymbol{\nabla\nabla}$ یک میدان ِ تانسری از نُع ِ (r,s) را به یک میدان ِ تانسری از نُع ِ (r,s) تبدیل میکند.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است. اگر T یک میدان ِ تانسری از نُع ِ (r,s) باشد،

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s},\\
&= [\boldsymbol{\nabla}_k(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{k\,i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s},\\
&= \mathbf{D}_k\,[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{k\,i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad + \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,l}\,[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{l\,i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad + \sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{\Gamma}^{i_m}{}_{k\,l}\,[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{k\,i_1\cdots i_{m-1}\,l\,i_{m+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad - \sum_{m=1}^{s}\boldsymbol{\Gamma}^{l}{}_{k\,j_m}\,[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{k\,i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{m-1}\,l\,j_{m+1}\cdots j_s}.
\end{aligned} \tag{2606}$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
&[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\boldsymbol{\nabla}\,T]^{k\,i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s},\\
&= g^{p\,k}\,(\boldsymbol{\nabla}_p\,T)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s},\\
&= g^{p\,k}\Big[\mathbf{D}_p\,T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad+\sum_{n=1}^{r}\boldsymbol{\Gamma}^{i_m}{}_{p\,q}\,T^{i_1\cdots i_{n-1}\,q\,i_{n+1}\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\\
&\quad-\sum_{n=1}^{s}\boldsymbol{\Gamma}^{q}{}_{p\,j_n}\,T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_{n-1}\,q\,j_{n+1}\,j_s}\Big].
\end{aligned}
\tag{2607}
$$

از جمله اگر Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$
\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\Sigma = \mathbf{D}_k\,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)^k + \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,l}\,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)^l. \tag{2608}
$$

$$
(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)^k = g^{p\,k}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma. \tag{2609}
$$

به این ترتیب،

$$
\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\Sigma = \mathbf{D}_k(g^{p\,k}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma) + \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,l}\,g^{p\,l}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma. \tag{2610}
$$

به یک شکل ِ دیگر،

$$
\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\Sigma = (\boldsymbol{\nabla}_i\,\mathbf{grad}\,\Sigma)^i. \tag{2611}
$$

دیده میشود

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_i\,\mathbf{grad}\,\Sigma)^j &= \mathbf{D}_i\,(\mathbf{grad}\,\Sigma)^j + \boldsymbol{\Gamma}^j{}_{i\,l}\,(\mathbf{grad}\,\Sigma)^l,\\
&= \mathbf{D}_i(g^{k\,j}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma) + \boldsymbol{\Gamma}^j{}_{i\,l}\,g^{k\,l}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma,
\end{aligned}
\tag{2612}
$$

که هم ان (2610) را نتیجه میدهد.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار و T یک میدان ِ تانسری از نُع ِ (r,s) است. از (2606) و (2607) دیده میشود

$$
(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,T)^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} = g^{i\,j}\,\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_i\,T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} + \mathsf{rem}, \tag{2613}
$$

که rem شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ T است، و صفر است اگر مشتق ِ اول ِ مئلفِها یِ g صفر باشد و مئلفِها یِ $\mathbf{\Gamma}$ و مشتق ِ اول ِشان صفر باشند. رُشن است که (2610) یک حالت ِ خاص ِ (2613) است.

سیلَپلَسی یک عملگر ِ مشتق- ِ-دوم است. $(\mathbb{M}, g)$ را یک خمینه یِ دُ-فرمدار میگیرم که میدان ِ تانسری یِ T و میدان ِ اسکالر ِ Σ بر آن تعریف شده اند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{\nabla\nabla}\,(\Sigma\,T) &= \mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\mathbf{\nabla}(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\mathbf{\nabla}(\Sigma\,T),\\
&= \mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\mathbf{\nabla}(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)[(\mathbf{\nabla}\,\Sigma)\otimes T+\Sigma\,\mathbf{\nabla}\,T],\\
&= \mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\mathbf{\nabla}[(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{\nabla}\,\Sigma)\otimes T+\Sigma(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\mathbf{\nabla}\,T],\\
&= [\mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,(\mathbf{\nabla}\,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{\nabla}\,\Sigma)]\otimes T+\mathrm{C}^{(1)}{}_{(2)}[(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{\nabla}\,\Sigma)\otimes(\mathbf{\nabla}\,T)]\\
&\quad+\mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\{(\mathbf{\nabla}\,\Sigma)\otimes[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\mathbf{\nabla}\,T]\}\\
&\quad+\Sigma\,\mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\mathbf{\nabla}(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\mathbf{\nabla}\,T.
\end{aligned}\tag{2614}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{\nabla\nabla}(\Sigma\,T)=\Sigma(\mathbf{\nabla\nabla}\,T)+(\mathbf{\nabla\nabla}\,\Sigma)T+\mathbf{\nabla\nabla}_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,T),\tag{2615}$$

که

$$\begin{aligned}
\mathbf{\nabla\nabla}_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,T) &= \mathrm{C}^{(1)}{}_{(2)}[(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\otimes(\mathbf{\nabla}\,T)]\\
&\quad+\mathrm{C}_{(1)}{}^{(2)}\,\{(\mathbf{d}\,\Sigma)\otimes[(\underset{\sim}{g}^{-1}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\mathbf{\nabla}\,T]\},\\
&= \mathrm{C}^{(1)}{}_{(2)}[(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{d}\,\Sigma)\otimes(\mathbf{\nabla}\,T)]\\
&\quad+\mathrm{C}^{(1)}{}_{(2)}\,\{[(\underset{\sim}{g}^{-1})^{*}\,\mathbf{d}\,\Sigma]\otimes(\mathbf{\nabla}\,T)\},
\end{aligned}\tag{2616}$$

یا،

$$\mathbf{\nabla\nabla}_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma,T)=\mathbf{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,T+\mathbf{\nabla}_{(\underset{\sim}{g}^{-1})^{*}\,\mathbf{d}\,\Sigma}\,T.\tag{2617}$$

رُشن است که $\boldsymbol{\nabla}_{1,1}(\mathbf{d}\,\Sigma, T)$ نسبت به مشتق ِ اول ِ Σ نقطِئی ست و شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ T است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار است، که ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. اگر Σ یک میدان ِ اسکالر و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی باشد،

$$\triangle\,\Sigma = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma\}. \tag{2549}$$

پس،

$$\triangle\,\Sigma = \mathbf{D}_j(g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma) + \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\{\mathbf{D}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\}g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma. \tag{2618}$$

از این و (2610) دیده میشود در حالت ِ کلی $(\triangle\,\Sigma)$ و $(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)$ یکسان نیستند:

$$\triangle\,\Sigma - \boldsymbol{\nabla}\,\Sigma = \left\{\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,j}\right\}g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma. \tag{2619}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,j} &= \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j\,[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\,k} + \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,j},\\ &= \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j\,[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \grave{\boldsymbol{\Gamma}}_j + \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\,k} - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,j}, \qquad (2620)\\ \dot{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]}\,\mathbf{d}[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \grave{\boldsymbol{\Gamma}}, \qquad (1811)\end{aligned}$$

دیده میشود

$$\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{k\,j} = \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_j(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{T}^k{}_{j\,k}. \tag{2621}$$

پس،

$$\triangle\,\Sigma - \boldsymbol{\nabla}\,\Sigma = [\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_j(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{T}^k{}_{j\,k}]g^{i\,j}\,\mathbf{D}_i\,\Sigma. \tag{2622}$$

نتیجه این که یک شرط ِ کافی که که سیلَپلسی و لَپلَسی برا یِ میدانها یِ اسکالر یکسان باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma = \triangle\,\Sigma, \tag{2623}$$

این است که هموستار با عنصر- ِ-حجم سازگار باشد، و پیچش صفر باشد. پس اگر هموستار با عنصر- ِ-حجم سازگار باشد، و پیچش صفر باشد،

$$\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\Sigma = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\Sigma. \tag{2624}$$

لَپلَسی برا یِ فرم- ِ-دیفرانسیلها تعریف شده، و سیلَپلَسی برا یِ همه یِ میدانها یِ تانسری. پس اگر σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل باشد، $(\triangle\,\sigma)$ و $(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\sigma)$ هر-دُ تعریف شده اند. $(\triangle\,\sigma)$ و $(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\sigma)$ هر-دُ s فرم- ِ-دیفرانسیل َند، و هر-دُ شامل ِ مشتق ِ دوم ِ σ یَند، اما در حالت ِ کلی با هم برابر نیستند. دیده شد حتا اگر $s = 0$ باشد هم در حالت ِ کلی $(\triangle\,\sigma)$ و $(\boldsymbol{\nabla\nabla}\,\sigma)$ با هم برابر نیستند.

7

خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی

67 شبه- ِ-متریک

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ هموار است. میگوییم g یک شبه- ِ-متریک (یا شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی) بر $\mathbb{M}$ است، اگر g یک میدان ِدُ-فرم ِ ناتکین ِ متقارن ِ هموار بر $\mathbb{M}$ باشد. میگوییم g یک متریک (یا ضرب- ِ-درونی) بر $\mathbb{M}$ است، اگر g یک شبه- ِ-متریک بر $\mathbb{M}$ باشد و g معین-مثبت باشد، یعنی به ازا یِ هر x در $\mathbb{M}$، دُ-فرم ِ $g(x)$ معین-مثبت باشد. رُشن است که اگر g یک شبه- ِ-متریک (متریک) بر $\mathbb{M}$ باشد، آنگاه به ازا یِ هر x در $\mathbb{M}$ تانسر ِ $g(x)$ یک شبه- ِ-ضرب- ِدرونی (ضرب- ِ-درونی) بر $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است. اما لزومَن چنین نیست که اگر به ازا یِ هر x در $\mathbb{M}$ یک شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی (ضرب- ِ-درونی) یِ $g(x)$ بر $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد، یک شبه- ِ-متریک (متریک) بر $\mathbb{M}$ هست. برا یِ این که چنین باشد باید g هموار باشد. البته اگر ϕ_a یک نقشه یِ $\mathbb{M}$ باشد، همیشه میشود یک شبه- ِ-متریک (متریک) بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$ تعریف کرد. برا یِ این کار $\mathfrak{g}$ را یک شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی (ضرب- ِ-درونی) بر $\mathbb{R}^m$ میگیرم، که m بُعد ِ $\mathbb{M}$ است. میدان ِ تانسری یِ g_a بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$ را چنین تعریف میکنم که به ازا یِ هر دُ-میدان ِ

بردار یِ دلبخاه ِ u و v بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$، و هر x در $[\mathsf{dom}(\phi_a)]$،

$$[g_a(x)][u(x),v(x)] = \mathfrak{g}\{[(\mathbf{D}\,\phi_a)(x)][u(x)],[(\mathbf{D}\,\phi_a)(x)][v(x)]\}. \tag{2625}$$

این یعنی اگر $\{(i,e_i)\mid i\}$ میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ_a باشد، و u^i ها و v^i ها مئلفِها یِ (به ترتیب) u و v در این پایه باشند،

$$[g_a(x)][u(x),v(x)] = \mathfrak{g}_{i\,j}[u^i(x)][v^j(x)], \tag{2626}$$

یا

$$g_a = \mathfrak{g}_{i\,j}\,e^i\otimes e^j, \tag{2627}$$

که $\{(i,e^i)\mid i\}$ دُگان ِ $\{(i,e_i)\mid i\}$ است. رُشن است که g_a یک شبه- ِ-متریک (و اگر $\mathfrak{g}$ معین-مثبت باشد یک متریک) بر $\mathsf{dom}(\phi_a)$ است.

اما گسترش-دادن ِ این ساختار بر کل ِ خمینه بدیهی نیست. نشان میدهم اگر خمینه یک پارش- ِ- یک ِ باپایان ِ هموار داشته باشد، میشود یک متریک بر آن تعریف کرد. گیرم $\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی با اتلس ِ $\{\phi_a\mid a\}$ و پارش- ِ-یک ِ باپایان ِ هموار ِ $\{p_a\mid a\}$ است. $\mathfrak{g}$ را یک ضرب- ِ-درونی بر $\mathbb{R}^m$ میگیرم. g_a را با (2625)، و g را به شکل ِ زیر تعریف میکنم.

$$g = \sum_a p_a\,g_a. \tag{2628}$$

به سادِگی دیده میشود g هموار و متقارن است. اگر u یک میدان ِ برداری بر $\mathbb{M}$، و x نقطه ای در $\mathbb{M}$ باشد،

$$[g(x)][u(x),u(x)] = \sum_a [p_a(x)]\mathfrak{g}_{i\,j}[u_a^i(x)]\,[u_a^j(x)], \tag{2629}$$

که u_a^i ها مئلفِها یِ u در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ_a اند. از این که $\mathfrak{g}$ معین-مثبت است و $p_a(x)$ نامنفی ست، دیده میشود اگر $u(x)$ صفر نباشد طرف ِ راست ِ (2629) نامنفی ست، و فقط وقت ی صفر است که همه یِ $p_a(x)$ ها صفر باشند. اما مجموع ِ $p_a(x)$ ها یک است. پس همه یِ $p_a(x)$ ها صفر نیستند. نتیجه این که اگر $u(x)$ صفر نباشد، $[g(u,u)](x)$ مثبت است. پس g معین-مثبت است. از اینجا نتیجه میشود g ناتکین هم هست. پس g یک متریک بر $\mathbb{M}$ است.

به این ترتیب معلوم میشود بر هر خمینه یِ دارا یِ یک پارش- ِ-یک ِ باپایان ِ هموار میشود یک متریک گذاشت.

در استدلال ِ بالا، برا یِ نشان-دادن ِ این که g ناتکین است این نشان داده شد که g معین-مثبت است. و برا یِ نشان-دادن ِ این که g معین-مثبت است از این استفاده شد که ترکیب ِ خطی یِ چند دُ-فرم ِ معین-مثبت با ضرایب ی نامنفی که همه صفر نیستند، معین-مثبت است. ترکیب ِ خطی یِ چند دُ-فرم ِ ناتکین با ضرایب ی نامنفی که همه صفر نیستند، لزومَن ناتکین نیست. به هم ین خاطر اگر g شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی باشد، ولی معین-مثبت نباشد، به روش ِ بالا نمیشود نشان داد g ناتکین است. به این ترتیب قضیه یِ بالا نمیگوید رو یِ هر خمینه یِ دارا یِ یک پارش- ِ-یک ِ باپایان ِ هموار میشود یک شبه- ِ-متریک (ِ نَ لزومَن معین-مثبت) گذاشت.

خمینه ای که بر آن یک شبه- ِ-متریک (متریک) تعریف شده باشد را یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی (ریمانی) مینامند. دقیقتر، اگر $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ دُ-فرمدار و g متقارن باشد، میگویم $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. اگر علاوه بر این g همه جا معین-مثبت باشد، میگویم $(\mathbb{M}, g)$ ریمانی ست. اگر $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ (شبه- ِ-)ریمانی باشد، g را (شبه- ِ-)متریک ِ آن مینامم. قضیه یِ بالا میگوید هر خمینه یِ دارا یِ یک پارش- ِ-یک ِ باپایان ِ هموار را میشود یک خمینه یِ ریمانی کرد.

در ادامه یِ این بخش، همه چیز برا یِ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g)$ بررسی میشود. برا ی شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی این نماد ِ سادِتر را هم به کار میبرم.

$$u \cdot v = g(u, v), \tag{2630}$$

میگویم بردارها یِ u و v متعامد َند (بر هم عمود َند) اگر

$$u \cdot v = 0. \tag{2631}$$

مجذور ِ بردار ِ u را با $\|u\|^2$ نشان میدهم، و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\|u\|^2 = u \cdot u. \tag{2632}$$

مجذور ِ u یک عدد ِ حقیقی ست، اما لزومَن مجذور ِ یک عدد ِ حقیقی نیست، چون $(u \cdot u)$ لزومَن نامنفی نیست. اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، $(u \cdot u)$ حتمَن نامنفی ست. دیده میشود اگر α یک اسکالر باشد،

$$\|(\alpha\, u)\|^2 = \alpha^2\, \|u\|^2. \tag{2633}$$

طول ِ بردار ِ u را با $|u|$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$|u| = \sqrt{|u \cdot u|}. \tag{2634}$$

رُشن است که

$$|u| = \sqrt{|(\|u\|^2)|}, \tag{2635}$$

یا

$$|u|^2 = |(\|u\|^2)|. \tag{2636}$$

همچنین، اگر α یک اسکالر باشد،

$$|(\alpha\, u)| = (|\alpha|)(|u|). \tag{2637}$$

میگویم u پوچ است، اگر

$$u \cdot u = 0. \tag{2638}$$

رُشن است که بردار ِ صفر پوچ است، و اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، u پوچ است اگر و تنها اگر صفر باشد.

علامت ِ u را با $\mathsf{sgn}(u)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}(u) = \begin{cases} \mathsf{sgn}(u \cdot u), & u \cdot u \neq 0 \\ 0, & u \cdot u = 0 \end{cases}. \tag{2639}$$

طرف ِ راست مقدار ِ تابع- ِ-علامت برا یِ یک متغیر ِ حقیقی ست. رُشن است که

$$u \cdot u = |u|^2 \,\mathsf{sgn}(u), \tag{2640}$$

و اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، علامت برا یِ همه یِ بردارها یِ ناصفر یک است. در این صورت،

$$\mathsf{sgn}(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 0 \\ 0, & u = 0 \end{cases}. \tag{2641}$$

میگویم u یکه است، اگر

$$|u \cdot u| = 1. \tag{2642}$$

دیده میشود اگر u پوچ نباشد،

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u}{|u|} \right\|^2 &= \frac{u}{|u|} \cdot \frac{u}{|u|}, \\ &= \mathsf{sgn}(u \cdot u). \end{aligned} \tag{2643}$$

$$\left| \frac{u}{|u|} \right| = 1. \tag{2644}$$

یعنی اگر u پوچ نباشد $(|u|^{-1}\, u)$ یکه است. همچنین، دیده میشود اگر u پوچ نباشد،

$$\mathsf{sgn}\left(\frac{u}{|u|}\right) = \mathsf{sgn}(u). \tag{2645}$$

γ یک خم است. در حالت ِ کلی علامت ِ $(\mathbf{D}\,\gamma)$ ثابت نیست. میگویم γ تک-علامت است، اگر علامت ِ $(\mathbf{D}\,\gamma)$ ثابت باشد. در این صورت علامت ِ γ را با $\mathsf{sgn}(\gamma)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}(\gamma) = \mathsf{sgn}[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)], \tag{2646}$$

که t یک نقطه یِ دلبخاه از دامنه یِ γ است. میگویم γ پوچ است اگر γ تک-علامت باشد و $\mathsf{sgn}(\gamma)$ برابر ِ 0 باشد. به سادِگی دیده میشود اگر γ تک-علامت باشد، هر بازپارامتریده یِ γ هم تک-علامت است و علامت ِ هر بازپارامتریده یِ γ با علامت ِ γ برابر است. در این حالت میگویم خم- ِ-مستقل-از-پارامتر ِ $\mathsf{pc}(\gamma)$ تک-علامت است. علامت ِ $\mathsf{pc}(\gamma)$ را با $\mathsf{sgn}[\mathsf{pc}(\gamma)]$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{sgn}[\mathsf{pc}(\gamma)] = \mathsf{sgn}(\gamma). \tag{2647}$$

همچنین، رُشن است که اگر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت باشد (ضرب- ِ-درونی باشد)، هر خم ی که مشتق َش صفر نشود علامت دارد و علامت َش 1 است، هر خم ی که مقدار َش ثابت باشد علامت َش 0 است.

میگویم $\{(i, v_i) \mid i\}$ متعامد است، اگر

$$v_i \cdot v_j \propto \delta_{i\,j}. \tag{2648}$$

میگویم $\{(i, v_i) \mid i\}$ یکه-متعامد است، اگر

$$|v_i \cdot v_j| = \delta_{i\,j}. \tag{2649}$$

به سادِگی دیده میشود:

- اگر $\{(i, v_i) \mid i\}$ متعامد باشد و هیچ یک از v_i ها پوچ نباشند، $\{(i, v_i) \mid i\}$ خطی-مستقل است.
- اگر $\{(i, v_i) \mid i\}$ یک پایه یِ متعامد باشد، هیچ یک از v_i ها پوچ نیستند.
- وقت ی شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی معین-مثبت است (ضرب- ِ-درونی ست) اگر $\{(i, v_i) \mid i\}$ خطی-مستقل باشد میشود با فرایند ِ گْرام-شْمیت $\{(i, v'_i) \mid i\}$ را چنان ساخت که متعامد و خطی-مستقل باشد، تعداد ِ اعضا یَش با تعداد ِ اعضا یِ $\{(i, v_i) \mid i\}$ برابر باشد، و پهنه یِ $\{(i, v'_i) \mid i\}$ هم پهنه یِ $\{(i, v_i) \mid i\}$ باشد.

- اگر $\{(1,v_1),\dots,(m-1,v_{m-1})\}$ که m بُعد ِ خمینه است متعامد باشد، و هیچ یک از v_i ها پوچ نباشد، یک بردار ِ v_0 هست که $\{(0,v_0),(1,v_1),\dots,(m-1,v_{m-1})\}$ یک پایه یِ متعامد است.

- اگر e و e' دُ پایه یِ متعامد باشند، تعداد ِ e_i ها یِ با علامت ِ مثبت (منفی) با تعداد ِ e'_i ها یِ با علامت ِ مثبت (منفی) یکسان است. به این ترتیب، تعداد ِ e_i ها یِ با علامت ِ مثبت یا منفی مستقل از پایه (یِ متعامد) است.

دیده میشود اگر e یک پایه یِ متعامد ِ فضا یِ مماس، و v یک بردار باشد،

$$v^i=\frac{e_i\cdot v}{e_i\cdot e_i}, \tag{2650}$$

که v^i ها ضریبها یِ بسط ِ v در پایه یِ e اند.

متناظر با هر شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی یک پایه یِ یکه-متعامد هست. پس در هر نقطه یِ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی میشود یک پایه یِ متعامد (یا یکه-متعامد) ساخت. متناظر با x در خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی، پایه یِ متعامد ِ e را میگیرم. تعداد ِ e_i ها یِ با علامت ِ مثبت را، که معلوم شد با تغییردادن ِ e عوض نمیشود، با $[\mathsf{snt}_+(g)](x)$ نشان میدهم. تعداد ِ e_i ها یِ با علامت ِ منفی را هم با $[\mathsf{snt}_-(g)](x)$ نشان میدهم. $\mathsf{snt}_+(g)$ و $\mathsf{snt}_-(g)$ تابعها یی پیوسته بر خمینه اند که مقدار ِشان عدد ِ صحیح است. پس اگر خمینه همبند باشد ثابت َند. نشانگان ِ g را با $\mathsf{snt}(g)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{snt}(g)=[\mathsf{snt}_+(g),\mathsf{snt}_-(g)]. \tag{2651}$$

دیده میشود اگر $\mathsf{snt}_+(g)$ و $\mathsf{snt}_-(g)$ ثابت باشند، $\mathsf{snt}(g)$ هم ثابت است. از جمله اگر $\mathbb{M}$ همبند باشد، $\mathsf{snt}(g)$ ثابت است. برا یِ $\mathsf{snt}(g)$ این نمادگذاری هم به کار میرود.

$$\mathsf{snt}(g)=(\overbrace{+,\dots,+}^{\mathsf{snt}_+(g)},\overbrace{-,\dots,-}^{\mathsf{snt}_-(g)}). \tag{2652}$$

همچنین، میشود هر یک از علامتها یِ $+$ و $-$ را هم جابِجا کرد. چنان که قبلَن دیده شد، بر هر خمینه یِ دارا یِ یک پارش- ِ-یک ِ باپایان ِ هموار میشود یک متریک گذاشت، اما لزومَن نمیشود یک شبه- ِ-متریک با نشانگان ِ دلبخاه گذاشت.

با $\mathsf{sgn}(g)$

$$\mathsf{sgn}(g) = \mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})] \tag{2259}$$

تعریف شده، و مستقل از پایه است. از جمله برا یِ محاسبه یِ آن میشود یک پایه یِ متعامد به کار برد. در چنین پایه ای،

$$\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g}) = \prod_i (e_i \cdot e_i), \tag{2653}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{sgn}[\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})] = \prod_i \mathsf{sgn}(e_i), \tag{2654}$$

یا

$$\mathsf{sgn}(g) = (-1)^{\mathsf{snt}_-(g)}. \tag{2655}$$

در یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی پایین- یا بالا-بردن ِ شاخص با شبه- ِ-متریک ِ خمینه انجام میشود. ترانهاده هم با شبه- ِ-متریک تعریف میشود. از اینجا معلوم میشود مجذور ِ ترانهاده همانی ست، و ترانهاده-کردن با پایین- یا بالا-بردن ِ شاخص جابِجا میشود. همچنین، دیده میشود دُ-فرم ِ القاییده از شبه- ِ-متریک بر فضا یِ هممماس متقارن است، پس یک شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی ست. در یک خمینه یِ ریمانی این دُ-فرم ضمنَن معین-مثبت هم هست، پس یک ضرب- ِ-درونی است. این شبه- ِ-ضرب- ِ-درونی را با یک نماد ِ سادِتر نشان میدهم. اگر σ و ω همبردار باشند، تعریف میکنم

$$\sigma \cdot \omega = g[(\underset{\sim}{g}^{-1}\, \sigma), (\underset{\sim}{g}^{-1}\, \omega)]. \tag{2656}$$

سرانجام، رُشن است که اگر u و v دُ بردار باشند،

$$\begin{aligned} u \cdot v &= u^i\, v_i, \\ &= u_i\, v^i. \end{aligned} \tag{2657}$$

میگویم خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g)$ سمتدار است، اگر $\mathbb{M}$ سمتدار باشد. $(\mathbb{M}, g)$ خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار است. به عنصر- ِ-حجم ِ سازگار باشبه- ِ-متریک بر این خمینه تانسر ِ لِوی-چیویتا میگویم. اگر e یک پایه یِ یکه-متعامد باشد،

$$|g_{i\,j}| = \delta_{i\,j}, \tag{2658}$$

که مئلفِها یِ g در پایه یِ e نوشته شده اند. در این صورت

$$|(\delta_e\, g)_{i\,j}| = \delta_{i\,j}. \tag{2659}$$

به این ترتیب، اگر خمینه m بُعدی و ε تانسر ِ لِوی-چیویتا باشد، از

$$\varepsilon(e_1, \ldots, e_m) = \sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}, \tag{2660}$$

دیده میشود اگر e یک پایه یِ راستدست ِ یکه-متعامد باشد،

$$\varepsilon(e_1, \ldots, e_m) = 1. \tag{2661}$$

همچنین، به سادِگی دیده میشود اگر e یک پایه یِ چپدست ِ یکه-متعامد باشد،

$$\varepsilon(e_1, \ldots, e_m) = -1. \tag{2662}$$

این که عنصر- ِ-حجم با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، یعنی اثر ِ عنصر- ِ-حجم بر یک کنج ِ یکه-متعامد ِ راستدست یک است: حجم ِ یک مکعب ِ واحد ِ راستدست، یک است. همچنین، حجم ِ یک مکعب ِ واحد ِ چپدست، منفی یِ یک است. رُشن است که عنصر- ِ-حجم ِ سازگار با شبه- ِ-متریک هموار است، چون شبه- ِ-متریک هموار است. این یعنی تانسر ِ لِوی-چیویتا هموار است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که ε تانسر ِ لِوی-چیویتا یِ آن است. v و v_1 تا v_{m-1} بردار َند. دیده میشود

$$v \cdot [\mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1})] = \varepsilon(v, v_1, \ldots, v_{m-1}). \tag{2663}$$

از جمله رُشن است که

$$v_i \cdot [\mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1})] = 0, \quad 1 \leq i \leq (m-1). \tag{2664}$$

همچنین، اگر e یک پایه یِ فضا یِ مماس باشد،

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1}) &= e_i\, \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}, \\ &= e_i\, g^{j\,i}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{j\,j_1 \cdots j_{m-1}}\, v_1^{j_1} \cdots v_{m-1}^{j_{m-1}}. \end{aligned} \tag{2665}$$

اگر $\{(1, v_1), \ldots, (m-1, v_{m-1})\}$ متعامد باشد و هیچ یک از v_i ها پوچ نباشد، یک v_0 هست که $\{(0, v_0), \ldots, (m-1, v_{m-1})\}$ یک پایه یِ متعامد است. به این ترتیب،

$$\mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1}) = a^i\, v_i, \tag{2666}$$

که a^i ها اسکالر َند. دیده میشود

$$a^i = \frac{1}{v_0 \cdot v_0} [\boldsymbol{\varepsilon}(v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})] \delta_0^i, \tag{2667}$$

و از آنجا،

$$\mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1}) = \frac{1}{v_0 \cdot v_0} [\boldsymbol{\varepsilon}(v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})] v_0. \tag{2668}$$

اگر $\{(1, v_1), \ldots, (m-1, v_{m-1})\}$ یکه-متعامد باشد، یک و فقط یک v_0 هست چنان که کنج ِ $\{(0, v_0), \ldots, (m-1, v_{m-1})\}$ یکه-متعامد و راستگرد باشد. از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(v_1, \ldots, v_{m-1}) &= \frac{1}{v_0 \cdot v_0}\, v_0, \\ &= \frac{1}{\mathsf{sgn}(v_0)}\, v_0. \end{aligned} \tag{2669}$$

به این ترتیب، بردارِ مساحت ِ یک مکعب ِ $(m-1)$ بُعدی یِ یکه، یک بردار ِ یکه یِ عمود بر آن مکعب است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 3 بُعدی ست، که $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسر ِ لِوی-چیویتا یِ آن است. v و w بردار َند. $\mathbf{a}(v, w)$ را با $(v \times w)$ نشان میدهیم و به آن حاصل- ِ-ضرب ِ خارجی یِ v

در w میگویم.

$$v \times w = \mathbf{a}(v, w). \tag{2670}$$

دیده میشود متناظر با پایه یِ e،

$$(v \times w)^i = \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j\,k}\, v^j\, w^k. \tag{2671}$$

$$v \times w = e_i\, \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j\,k}\, v^j\, w^k. \tag{2672}$$

رُشن است که

$$w \times v = -v \times w. \tag{2673}$$

$$v \cdot (v \times w) = 0. \tag{2674}$$

$$w \cdot (v \times w) = 0. \tag{2675}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}(v \times w) \cdot (v \times w) &= (v \times w)_i\, (v \times w)^i,\\ &= (\boldsymbol{\varepsilon}_{i\,j\,k}\, v^j\, w^k)(\boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{l\,m}\, v^l\, w^m),\\ &= [\mathsf{sgn}(g)](g_{j\,l}\, g_{k\,m} - g_{j\,m}\, g_{k\,l}) v^j\, w^k\, v^l\, w^m.\end{aligned} \tag{2676}$$

به این ترتیب،

$$(v \times w) \cdot (v \times w) = [\mathsf{sgn}(g)][(v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2]. \tag{2677}$$

$$(v \cdot v)(w \cdot w) = (v \cdot w)^2 + [\mathsf{sgn}(g)](v \times w) \cdot (v \times w). \tag{2678}$$

از جمله اگر u یکه و بر v عمود باشد،

$$(u \times v) \cdot (u \times v) = [\mathsf{sgn}(g)][\mathsf{sgn}(u)] v \cdot v. \tag{2679}$$

همچنین دیده میشود اگر u و v و w سه بردار باشند،

$$\begin{aligned}[u\times(v\times w)]^i &= \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_{j\,k}\,u^j(\boldsymbol{\varepsilon}^k{}_{l\,m}\,v^l\,w^m),\\ &= [\mathsf{sgn}(g)](\delta^i_l\,g_{j\,m}-\delta^i_m\,g_{j\,l})u^j\,v^l\,w^m,\\ &= [\mathsf{sgn}(g)][(u\cdot w)v^i-(u\cdot v)w^i],\end{aligned}\tag{2680}$$

که نشان میدهد

$$u\times(v\times w)=[\mathsf{sgn}(g)][(u\cdot w)v-(u\cdot v)w].\tag{2681}$$

از جمله اگر u بر v عمود باشد،

$$\begin{aligned}u\times(u\times v) &= -[\mathsf{sgn}(g)]\|u\|^2\,v,\\ &= -[\mathsf{sgn}(g)][\mathsf{sgn}(u)]|u|^2\,v,\end{aligned}\tag{2682}$$

که نتیجه میدهد

$$|u\times(u\times v)|=|u|^2\,|v|.\tag{2683}$$

اگر u یکه و بر v عمود باشد،

$$u\times(u\times v)=-[\mathsf{sgn}(g)][\mathsf{sgn}(u)]v.\tag{2684}$$

$$|u\times(u\times v)|=|v|.\tag{2685}$$

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 2 بُعدی ست، که ε تانسر ِ لِوی-چیویتا یِ آن است. اگر v یک بردار باشد، $\mathbf{a}(v)$ هم یک بردار است. متناظر با پایه یِ e،

$$[\mathbf{a}(v)]^i=\boldsymbol{\varepsilon}^i{}_j\,v^j.\tag{2686}$$

$$\mathbf{a}(v)=e_i\,\boldsymbol{\varepsilon}^i{}_j\,v^j.\tag{2687}$$

رُشن است که

$$v \cdot [\mathbf{a}(v)] = 0. \tag{2688}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\mathbf{a}(v)] \cdot [\mathbf{a}(v)] &= [\mathbf{a}(v)]_i \, [\mathbf{a}(v)]^i, \\
&= (\boldsymbol{\varepsilon}_{i\,j} \, v^j)(\boldsymbol{\varepsilon}^i{}_k \, v^k), \\
&= [\mathsf{sgn}(g)] g_{j\,k} \, v^j \, v^k.
\end{aligned} \tag{2689}$$

به این ترتیب،

$$[\mathbf{a}(v)] \cdot [\mathbf{a}(v)] = [\mathsf{sgn}(g)] v \cdot v. \tag{2690}$$

از اینجا،

$$|\mathbf{a}(v)| = |v|. \tag{2691}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{a}[\mathbf{a}(v)]\}^i &= \boldsymbol{\varepsilon}^i{}_j \, \boldsymbol{\varepsilon}^j{}_k \, v^k, \\
&= -[\mathsf{sgn}(g)] \delta^i_k \, v^k, \\
&= -[\mathsf{sgn}(g)] v^i,
\end{aligned} \tag{2692}$$

که نشان میدهد

$$\mathbf{a}[\mathbf{a}(v)] = -[\mathsf{sgn}(g)] v. \tag{2693}$$

از جمله،

$$|\mathbf{a}[\mathbf{a}(v)]| = |v|. \tag{2694}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 2 بُعدی ست، که ε تانسر ِ لِوی-چیویتا یِ آن است. اگر u در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ باشد و یکه باشد، ویژِگیها یِ تحدید ِ $(u \times \cdot)$ به $u^\perp$ (زیرفضا یِ بردارها یِ عمود بر u) شبیه ِ ویژِگیها یِ $\mathbf{a}$ در یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 2بُعدی با عنصر- ِ-حجم ِ سازگار با شبه- ِ-متریک است. از اینجا شروع میکنم که اگر v در $\mathrm{T}_x\mathbb{M} \in$ باشد، آنگاه

$$u \cdot (u \times v) = 0, \tag{2695}$$

که نتیجه میدهد

$$(u \times v) \in u^\perp. \tag{2696}$$

این نشان میدهد اثر ِ $(u \times \cdot)$ بر $u^\perp$ بسته است. به علاوه

$$v \cdot (u \times v) = 0, \tag{2697}$$

که مانسته یِ (2688) است. همچنین، دیده میشود (2679) مانسته یِ (2690) است، و (2684) مانسته یِ (2693) است. البته برا یِ این دُ-مانستِگی یِ اخیر باید شبه- ِ-متریک ِ $\mathbb{M}$ (در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$) را با شبه- ِ-متریک ِ $u^\perp$ مقایسه کرد. اولی را با g و دومی را با g' نشان میدهم. شباهت ِ $(u \times \cdot)$ با $\mathbf{a}$ کامل میشود اگر

$$[\mathsf{sgn}(g)][\mathsf{sgn}(u)] = \mathsf{sgn}(g'). \tag{2698}$$

این رابطه برقرار است. برا یِ دیدن ِ این، در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ یک پایه یِ متعامد ِ e میگیرم که

$$e_0 = u. \tag{2699}$$

دیده میشود $e' = \{(i, e_i) \mid i \neq 0\}$ یک پایه یِ متعامد برا یِ $u^\perp$ است. از اینجا،

$$\begin{aligned} \mathsf{sgn}(g) &= [\mathsf{sgn}(u)] \prod_{i \neq 0} [\mathsf{sgn}(e_i)], \\ &= [\mathsf{sgn}(u)][\mathsf{sgn}(g')], \end{aligned} \tag{2700}$$

که هم ان (2698) است.

68 هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. میگویند $\mathbf{\Gamma}$ یک هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک است، اگر مشتق ِ هموردا یِ شبه- ِ-متریک صفر باشد:

$$\boldsymbol{\nabla}\, g = 0, \tag{2701}$$

که $\boldsymbol{\nabla}$ مشتق- ِ-هموردا یی ست که با $\mathbf{\Gamma}$ تعریف شده. (2701) را میشود چنین نوشت که اگر u در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ و T یک میدان ِ تانسری بر $\mathbb{M}$ باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_u(g \otimes T) = g \otimes \boldsymbol{\nabla}_u\, T, \tag{2702}$$

یا بستِتر،

$$\boldsymbol{\nabla}_u[\mathbf{m}(g)] = [\mathbf{m}(g)]\boldsymbol{\nabla}_u. \tag{2703}$$

از این که برا یِ هر میدان- ِ-دُ-فرم از جمله g، و برا یِ بردار ِ دلبخاه ِ u و میدان- ِ-برداریها یِ دلبخاه ِ v و w

$$\boldsymbol{\nabla}_u[g(v,w)] = (\boldsymbol{\nabla}_u\, g)(v,w) + g(\boldsymbol{\nabla}_u\, v, w) + g(v, \boldsymbol{\nabla}_u\, w), \tag{2704}$$

دیده میشود هموستار (مشتق ِ هموردا) با شبه- ِ-متریک سازگار است، اگر و تنها اگر برا یِ بردار ِ دلبخاه ِ u و میدان- ِ-برداریها یِ دلبخاه ِ v و w،

$$\boldsymbol{\nabla}_u[g(v,w)] = g(\boldsymbol{\nabla}_u\, v, w) + g(v, \boldsymbol{\nabla}_u\, w), \tag{2705}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_u(v \cdot w) = (\boldsymbol{\nabla}_u\, v) \cdot w + v \cdot (\boldsymbol{\nabla}_u\, w). \tag{2706}$$

از جمله دیده میشود اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_u(v \cdot v) = 2\, v \cdot (\boldsymbol{\nabla}_u\, v). \tag{2707}$$

همچنین، اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد و میدان ِ برداری یِ v چنان باشد که $(v\cdot v)$ ثابت باشد،

$$v\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v)=0. \tag{2708}$$

مشتق ِ هموردا برا یِ میدانها یِ تانسری چنان تعریف شد که نسبت به ضرب ِ تانسری لَیبنیتسی باشد و با ادغام جابِجا شود. مشتق ِ هموردا با شبه- ِ-متریک سازگار است، اگر نسبت به ضرب ِ درونی هم لَیبنیتسی باشد.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست و $\mathbb{L}$ یک خمینه است. v و w تابعها یی در $\mathsf{F}(\mathrm{T}\mathbb{M};\mathbb{L})$ اند، با این شرط که مبنا یِشان یکسان است:

$$\boldsymbol{\pi}\circ w=\boldsymbol{\pi}\circ v. \tag{2709}$$

این مبنا یِ یکسان را با f نشان میدهم. f در $\mathsf{F}(\mathbb{M};\mathbb{L})$ است. به این ترتیب $(g\circ f)$ هم تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{L}$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned}(v\cdot w)(r)&=[(g\circ f)(v,w)](r),\\&=[(g\circ f)(r)][v(r),w(r)].\end{aligned} \tag{2710}$$

θ را در $\mathrm{T}_r\mathbb{L}$ میگیرم و تعریف میکنم

$$u=[(\mathbf{D}\,f)(r)]\,\theta. \tag{2711}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\theta(v\cdot w)&=\mathbf{D}_\theta[(g\circ f)(v,w)],\\&=\boldsymbol{\nabla}_\theta[(g\circ f)(v,w)],\\&=[\boldsymbol{\nabla}_\theta(g\circ f)](v,w)+(g\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v,w)+(g\circ f)(v,\boldsymbol{\nabla}_\theta\, w),\\&=\Big(\{(\boldsymbol{\nabla}\, g)[f(r)]\}(\mathbf{D}_\theta\, f)\Big)(u,v)+(g\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v,w)+(g\circ f)(v,\boldsymbol{\nabla}_\theta\, w),\\&=[(\boldsymbol{\nabla}_u\, g)\circ f](v,w)+(g\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v,w)+(g\circ f)(v,\boldsymbol{\nabla}_\theta\, w).\end{aligned} \tag{2712}$$

پس اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\mathbf{D}_\theta(v\cdot w) = (\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v)\cdot w + v\cdot(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, w). \tag{2713}$$

از جمله رُشن است که اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\mathbf{D}_\theta(v\cdot v) = 2\, v\cdot(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v). \tag{2714}$$

یک حالت ِ خاص این است که $\mathbb{L}$ یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت v و w خمها یی در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ اند، که مبنا یِشان یکسان است. این مبنا یِ یکسان را با γ، و مشتق ِ γ را با u نشان میدهم. رُشن است که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\pi}\circ u &= \gamma,\\ &= \boldsymbol{\pi}\circ v,\\ &= \boldsymbol{\pi}\circ w.\end{aligned} \tag{2715}$$

نتیجه میشود

$$\mathbf{D}(v\cdot w) = [(\boldsymbol{\nabla}_u\, g)\circ\gamma](v,w) + (\boldsymbol{\nabla}\, v)\cdot w + v\cdot(\boldsymbol{\nabla}\, w). \tag{2716}$$

پس اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\mathbf{D}(v\cdot w) = (\boldsymbol{\nabla}\, v)\cdot w + v\cdot(\boldsymbol{\nabla}\, w). \tag{2717}$$

از جمله رُشن است که اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\mathbf{D}(v\cdot v) = 2\, v\cdot(\boldsymbol{\nabla}\, v). \tag{2718}$$

به این ترتیب، از جمله معلوم میشود اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، و مشتق ِ هموردا یِ v و مشتق ِ هموردا یِ w صفر باشند،

$$\mathbf{D}(v\cdot w) = 0. \tag{2719}$$

از جمله دیده میشود اگر مشتق ِ هموردا یِ v صفر باشد،

$$\mathbf{D}(v \cdot v) = 0. \tag{2720}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{D}|v| = 0, \tag{2721}$$

یعنی طول ِ v ثابت است.

γ یک خم است و بردارها یِ v و w در فضا یِ مماس در $[\gamma(t_1)]$ اند. مشتق ِ هموردا یِ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ v و مشتق ِ هموردا یِ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ w صفر َند. از اینجا معلوم میشود اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد

$$\mathbf{D}\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]v\} \cdot \{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]w\}\Big) = 0, \tag{2722}$$

یعنی شبه- ِ-ضرب ِ درونی یِ v و w، در انتقال ِ موازی ثابت میمانَد. از جمله دیده میشود

$$\mathbf{D}\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]v\} \cdot \{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]v\}\Big) = 0, \tag{2723}$$

و از آنجا،

$$\mathbf{D}|[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]v| = 0, \tag{2724}$$

یعنی طول ِ v در انتقال ِ موازی ثابت میمانَد. اگر γ یک ژئُدزیک با پارامترش ِ آفین باشد، مشتق ِ هموردا یِ مماس بر آن صفر است:

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma = 0, \tag{2725}$$

که از آن نتیجه میشود اگر γ یک ژئُدزیک با پارامترش ِ آفین باشد

$$\mathbf{D}[(\mathbf{D}\,\gamma) \cdot (\mathbf{D}\,\gamma)] = 0. \tag{2726}$$

این را که مشتق ِ هموردا یِ شبه- ِ-متریک صفر است، میشود چنین گفت که پایین- ُ-بالا-بردن ِ شاخص با مشتق ِ هموردا جابِجا میشود. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. T یک میدان ِ تانسری ست و u یک بردار است. دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}(g \otimes T) = \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}[(\boldsymbol{\nabla}_u \, g) \otimes T + g \otimes (\boldsymbol{\nabla}_u \, T)]. \tag{2727}$$

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}(g \otimes T) = \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}(g \otimes \boldsymbol{\nabla}_u \, T), \tag{2728}$$

یا بستِتر

$$\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}[\mathbf{m}(g)] = \mathfrak{G}_{(2)}{}^{(3)}[\mathbf{m}(g)] \boldsymbol{\nabla}_u. \tag{2729}$$

شکل ِ مئلفِئی یِ (2728) میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathrm{T})_i{}^{j \cdots}{}_{\cdots k} = g_{i\,n} (\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathrm{T})^{n\,j \cdots}{}_{\cdots k}, \tag{2730}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_l \, \mathrm{T})_i{}^{j \cdots}{}_{\cdots k} = g_{i\,n} (\boldsymbol{\nabla}_l \, \mathrm{T})^{n\,j \cdots}{}_{\cdots k}, \tag{2731}$$

و البته مشابه با آن

$$(\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathrm{T})^{i\,j \cdots}{}_{\cdots k} = g^{n\,i} (\boldsymbol{\nabla}_u \, \mathrm{T})_n{}^{j \cdots}{}_{\cdots k}, \tag{2732}$$

$$(\boldsymbol{\nabla}_l \, \mathrm{T})^{i\,j \cdots}{}_{\cdots k} = g^{n\,i} (\boldsymbol{\nabla}_l \, \mathrm{T})_n{}^{j \cdots}{}_{\cdots k}. \tag{2733}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. ε تانسر ِ لِوی-چیویتا ست، $e(0)$ یک پایه یِ یکه-متعامد در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است، و u بردار ی در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است که مماس بر خم ِ γ در $x = \gamma(0)$ است. $e(t)$ را پایه ای در $\mathrm{T}_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ میگیرم که $e_i(t)$ انتقال- ِ-موازی-یافته یِ $e_i(0)$ با γ از 0 تا t است:

$$e_i(t) = [\boldsymbol{P}_\gamma(t, 0)][e_i(0)]. \tag{2734}$$

تعریف میکنم

$$\varepsilon(t) = \boldsymbol{\varepsilon}[e_1(t), \ldots, e_m(t)]. \tag{2735}$$

رُشن است که ε هموار است. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}\,\varepsilon)(0) &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\varepsilon})[e_1(0), \ldots, e_m(0)] + \boldsymbol{\varepsilon}[(\boldsymbol{\nabla}_u\,e_1)(0), \ldots, e_m(0)] \\ &\quad + \cdots + \boldsymbol{\varepsilon}[e_1(0), \ldots, (\boldsymbol{\nabla}_u\,e_m)(0)], \\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\varepsilon})[e_1(0), \ldots, e_m(0)], \end{aligned} \tag{2736}$$

که در برابری یِ دوم این به کار رفته که e_i انتقال- ِ-موازی-یافته یِ $e_i(0)$ است، پس مشتق ِ هموردا یَش صفر است. از این که e_i انتقال- ِ-موازی-یافته یِ $e_i(0)$ است، ضمنَن نتیجه میشود

$$\mathbf{D}(e_i \cdot e_j) = 0, \tag{2737}$$

یعنی $e(t)$ یک پایه یِ یکه-متعامد است. پس

$$\varepsilon(t) = \pm 1. \tag{2738}$$

از این، و این که ε هموار است، نتیجه میشود ε ثابت است. به این ترتیب

$$(\mathbf{D}\,\varepsilon)(0) = 0. \tag{2739}$$

از این و (2736) هم نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\varepsilon})[e_1(0), \ldots, e_m(0)] = 0, \tag{2740}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\varepsilon} = 0. \tag{2741}$$

این رابطه برا یِ هر بردار ِ u که در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است درست است، چون متناظر با هر u که در $\mathrm{T}_x\mathbb{M}$ است یک خم هست که u مماس بر آن است. از اینجا نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\,\varepsilon = 0. \tag{2742}$$

یا

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = 0. \tag{2743}$$

رابطه یِ (2742) یعنی بر یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار، مشتق ِ هموردا یِ تانسر ِ لِوی-چیویتا با یک هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک صفر است. این یعنی هموستار ی که با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، با عنصر- ِ-حجم ِ سازگار با شبه- ِ-متریک (و البته فقط با هم ان عنصر- ِ-حجم و مضربها یِ ثابت ِ آن) هم سازگار است. به این ترتیب اگر v_1 تا v_m میدانها یی برداری باشند، و u یک بردار باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_u[\varepsilon(v_1,\ldots,v_m)] = \varepsilon(\boldsymbol{\nabla}_u\,v_1,\ldots,v_m) + \cdots + \varepsilon(v_1,\ldots,\boldsymbol{\nabla}_u\,v_m). \tag{2744}$$

رُشن است که اگر v_1 تا v_m در $\mathsf{F}(\mathrm{T}\mathbb{M};\mathbb{L})$ باشند و هممبنا باشند هم رابطه ای مشابه برقرار است. این مبنا را با f نشان میدهم. اگر θ در $\mathrm{T}\mathbb{L}$ باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_\theta[(\varepsilon\circ f)(v_1,\ldots,v_m)] &= (\varepsilon\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\,v_1,\ldots,v_m)\\ &\quad+\cdots+(\varepsilon\circ f)(v_1,\ldots,\boldsymbol{\nabla}_\theta\,v_m).\end{aligned} \tag{2745}$$

از جمله دیده میشود اگر γ یک خم باشد و v_1 تا v_m بردارها یی در فضا یِ مماس در $[\gamma(t_1)]$ باشند،

$$\mathbf{D}\Big[(\varepsilon\circ\gamma)\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1)]v_1\},\ldots,\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{\cdot},t_1)]v_m\}\Big)\Big] = 0. \tag{2746}$$

یعنی حجم در انتقال ِ موازی ثابت میمانَد.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. پس هموستار با تانسر ِ لِوی-چیویتا هم سازگار است. عنصر- ِ-حجم را تانسر ِ لِوی-چیویتا میگیرم. نتیجه میشود هموستار با بردار- ِ-مساحت هم سازگار است:

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{a} = 0. \tag{2747}$$

به این ترتیب اگر v_1 تا v_{m-1} میدانها یی برداری باشند، و u یک بردار باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_u[\mathbf{a}(v_1,\ldots,v_{m-1})] = \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}_u\, v_1,\ldots,v_{m-1}) + \cdots + \mathbf{a}(v_1,\ldots,\boldsymbol{\nabla}_u\, v_{m-1}). \tag{2748}$$

رُشن است که اگر v_1 تا v_{m-1} در $\mathsf{F}(\mathrm{T}\mathbb{M};\mathbb{L})$ باشند و هممبنا باشند هم رابطه ای مشابه برقرار است. این مبنا را با f نشان میدهم. اگر θ در $\mathrm{T}\mathbb{L}$ باشد،

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta[(\mathbf{a}\circ f)(v_1,\ldots,v_{m-1})] = (\mathbf{a}\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v_1,\ldots,v_{m-1}) + \cdots + (\mathbf{a}\circ f)(v_1,\ldots,\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v_{m-1}). \tag{2749}$$

از جمله دیده میشود اگر γ یک خم باشد و v_1 تا v_{m-1} بردارها یی در فضا یِ مماس در $[\gamma(t_1)]$ باشند،

$$\boldsymbol{\nabla}\Big[(\mathbf{a}\circ\gamma)\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v_1\},\ldots,\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v_{m-1}\}\Big)\Big] = 0, \tag{2750}$$

یا

$$(\mathbf{a}\circ\gamma)\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v_1\},\ldots,\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v_{m-1}\}\Big) = [\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)][\mathbf{a}(v_1,\ldots v_{m-1})], \tag{2751}$$

یعنی بردار-ِ-مساحت در اثرِ انتقال-ِ-موازی یِ بردارها انتقال-ِ-موازی میابد.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی یِ سمتدارِ 3 بُعدی ست، که هموستارَش با شبه-ِ-متریک سازگار است. عنصر-ِ-حجم را تانسرِ لِوی-چیویتا میگیرم. با v و w به جا یِ v_1 تا v_{m-1}، مانستِها یِ (2748) تا (2751) میشوند

$$\boldsymbol{\nabla}_u(v\times w) = (\boldsymbol{\nabla}_u\, v)\times w + v\times(\boldsymbol{\nabla}_u\, w). \tag{2752}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta(v\times w) = (\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v)\times w + v\times(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, w). \tag{2753}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\Big(\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v\}\times\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]w]\}\Big) = 0. \tag{2754}$$

$$\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]v\}\times\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)]w\} = [\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.},t_1)](v\times w). \tag{2755}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 2 بُعدی ست، که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. عنصر- ِ-حجم را تانسر ِ لِوی-چیویتا میگیرم. با v به جا یِ v_1 تا v_{m-1}، مانستِها یِ (2748) تا (2751) میشوند

$$\boldsymbol{\nabla}_u[\mathbf{a}(v)] = \mathbf{a}(\boldsymbol{\nabla}_u\, v). \tag{2756}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_\theta[(\mathbf{a}\circ f)(v)] = (\mathbf{a}\circ f)(\boldsymbol{\nabla}_\theta\, v). \tag{2757}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\Big((\mathbf{a}\circ\gamma)\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]\, v\}\Big) = 0. \tag{2758}$$

$$(\mathbf{a}\circ\gamma)\{[\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)]v\} = [\boldsymbol{P}_\gamma(\boldsymbol{.}, t_1)][\mathbf{a}(v)]. \tag{2759}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست، که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. u و v و w میدانها یی برداری یَند. دیده میشود

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_u(v\cdot w) + \boldsymbol{\nabla}_v(u\cdot w) - \boldsymbol{\nabla}_w(u\cdot v),\\
&= w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v + \boldsymbol{\nabla}_v\, u) - u\cdot(\boldsymbol{\nabla}_w\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, w) - v\cdot(\boldsymbol{\nabla}_w\, u - \boldsymbol{\nabla}_u\, w),\\
&= 2\, w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v) - w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, u)\\
&\quad - u\cdot(\boldsymbol{\nabla}_w\, v - \boldsymbol{\nabla}_v\, w) - v\cdot(\boldsymbol{\nabla}_w\, u - \boldsymbol{\nabla}_u\, w),\\
&= 2\, w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v) - w\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v) + u\diamond v]\\
&\quad - u\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,v) + w\diamond v] - v\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u) + w\diamond u],
\end{aligned} \tag{2760}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}
w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\, v) = \frac{1}{2}\{&\boldsymbol{\nabla}_u(v\cdot w) + \boldsymbol{\nabla}_v(u\cdot w) - \boldsymbol{\nabla}_w(u\cdot v)\\
&+ u\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,v) + w\diamond v] + v\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u) + w\diamond u]\\
&+ w\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v) + u\diamond v]\},
\end{aligned} \tag{2761}$$

یا

$$w\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\,v)=\frac{1}{2}\{\mathbf{D}_u(v\cdot w)+\mathbf{D}_v(u\cdot w)-\mathbf{D}_w(u\cdot v)$$
$$+u\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,v)+w\diamond v]+v\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)+w\diamond u]$$
$$+w\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)+u\diamond v]\},\tag{2762}$$

دیده میشود اگر هموستار با شبه-ِ-متریک سازگار باشد، مشتقِ هموردا یِ یک میدانِ برداری، به طُرِ یکتا با پیچش تعیین میشود. به این ترتیب، یک هموستارِ سازگار با شبه-ِ-متریک، به طُرِ یکتا با پیچش (و البته خُدِ شبه-ِ-متریک) تعیین میشود.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی ست و $\boldsymbol{\Gamma}$ یک هموستار بر آن است. $\boldsymbol{K}$ (تانسرِ همپیچش) را با اثرَش بر میدانها یِ برداری یِ u و v و w تعریف میکنم:

$$\boldsymbol{K}(w,u,v)=\frac{1}{2}\Big(u\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,v)]+v\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(w,u)]+w\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]\Big).\tag{2763}$$

دیده میشود K نقطِئی ست. همچنین،

$$\boldsymbol{K}(v,u,w)=-\boldsymbol{K}(w,u,v),\tag{2764}$$

$$\boldsymbol{K}(w,u,v)-\boldsymbol{K}(w,v,u)=w\cdot[\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)].\tag{2765}$$

مئلفِئی هم

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_{j\,i\,k}+\boldsymbol{T}_{k\,i\,j}+\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}).\tag{2766}$$

رُشن است که

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}=\boldsymbol{K}_{i\,j\,k}-\boldsymbol{K}_{i\,k\,j}.\tag{2767}$$

تعریف میکنم

$$(\boldsymbol{K}_j)^i{}_k=\boldsymbol{K}^i{}_{j\,k}.\tag{2768}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{K}^i{}_k = \boldsymbol{K}^i{}_{j\,k}\, e^j, \tag{2769}$$

یا بستِتر

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_j\, e^j, \tag{2770}$$

که $\boldsymbol{K}$ یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل است که مئلفِها یَش عملگرها ِ خطی یَند (ماتریس َند). از (2766) ضمنَن دیده میشود $\boldsymbol{K}$ نسبت به شاخصها یِ اول و سوم پادمتقارن است:

$$\boldsymbol{K}_{k\,j\,i} = -\boldsymbol{K}_{i\,j\,k}. \tag{2771}$$

از این، از جمله نتیجه میشود

$$\boldsymbol{K}^i{}_{j\,i} = 0, \tag{2772}$$

یا

$$\boldsymbol{K}^i{}_i = 0. \tag{2773}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. $\boldsymbol{IC}$ (عملگر ِ لِوی-چیویتا) را چنین تعریف میکنم

$$\boldsymbol{IC}(w,u,v) = \frac{1}{2}[\mathbf{D}_u(v\cdot w) + \mathbf{D}_v(u\cdot w) - \mathbf{D}_w(u\cdot v) + u\cdot(w\diamond v) + v\cdot(w\diamond u) + w\cdot(u\diamond v)]. \tag{2774}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{IC}(w,u,v) - \boldsymbol{IC}(w,v,u) = w\cdot(u\diamond v). \tag{2775}$$

عملگر ِ لِوی-چیویتا (بر خلاف ِ همپیچش) نقطِئی نیست. متناظر با پایه یِ e، تانسر ِ $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]_{i\,j\,k} = \boldsymbol{IC}(e_i, e_j, e_k), \tag{2776}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e) = [\boldsymbol{IC}(e)]^i{}_{j\,k}\, e_i\otimes e^j\otimes e^k. \tag{2777}$$

دیده میشود

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]_{i\,j\,k} = \frac{1}{2}[\mathbf{D}_j\, g_{k\,i} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,i} - \mathbf{D}_i\, g_{j\,k} + e_j \cdot (e_i \diamond e_k) + e_k \cdot (e_i \diamond e_j) - e_i \cdot (e_j \diamond e_k)], \tag{2778}$$

$$\begin{aligned}[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} &= g^{m\,i}[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]_{i\,j\,k},\\ &= \frac{1}{2}\, g^{m\,i}[\mathbf{D}_j\, g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\, g_{j\,k}\\ &\quad + e_j \cdot (e_m \diamond e_k) + e_k \cdot (e_m \diamond e_j) - e_m \cdot (e_j \diamond e_k)].\end{aligned} \tag{2779}$$

به این ترتیب، اگر هموستار با شبه-ِ-متریک سازگار باشد،

$$w \cdot (\boldsymbol{\nabla}_u\, v) = \boldsymbol{\mathcal{C}}(w, u, v) + \boldsymbol{K}(w, u, v), \tag{2780}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_u\, v = \underset{\sim}{g}^{-1}[\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\{2,3\}}(u, v) + \boldsymbol{K}_{\{2,3\}}(u, v)]. \tag{2781}$$

مئلفِها یِ هموستار هم چنین میشوند.

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} &= [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} + \boldsymbol{K}^i{}_{j\,k},\\ &= \frac{1}{2}\, g^{m\,i}[\mathbf{D}_j\, g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\, g_{j\,k}\\ &\quad + e_j \cdot (e_m \diamond e_k) + e_k \cdot (e_m \diamond e_j) - e_m \cdot (e_j \diamond e_k)]\\ &\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_j{}^i{}_k + \boldsymbol{T}_k{}^i{}_j + \boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}).\end{aligned} \tag{2782}$$

و البته

$$[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_k = [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_k + \boldsymbol{K}^i{}_k. \tag{2783}$$

اگر میدان-پایه یِ e مختصاتی باشد،

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]_{i\,j\,k} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\, g_{k\,i} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,i} - \mathbf{D}_i\, g_{j\,k}). \tag{2784}$$

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} = \frac{1}{2}\, g^{m\,i}(\mathbf{D}_j\, g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\, g_{j\,k}). \tag{2785}$$

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} &= \frac{1}{2}\, g^{m\,i}(\mathbf{D}_j\, g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\, g_{j\,k}) + \boldsymbol{K}^i{}_{j\,k},\\ &= \frac{1}{2}\, g^{m\,i}(\mathbf{D}_j\, g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\, g_{j\,k})\\ &\quad + \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_j{}^i{}_k + \boldsymbol{T}_k{}^i{}_j + \boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}).\end{aligned} \tag{2786}$$

عملگر ِ لِوی-چیویتا با فقط شبه- ِ-متریک تعیین میشود. تانسر ِ همپیچش نسبت به تانسر ِ پیچش خطی ست. همپیچش صفر است، اگر و تنها اگر پیچش صفر باشد. به این ترتیب یک و فقط یک هموستار هست که با شبه- ِ-متریک سازگار است و پیچش ِ متناظر با آن هم صفر است. به این هموستار، هموستار ِ لِوی-چیویتا میگویند. مشتق- ِ-هموردا یِ متناظر با این هموستار را با $\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}$ نشان میدهم.

رُشن است که اگر خمینه عنصر- ِ-حجم داشته باشد، و عنصر- ِ-حجم با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، مشتق ِ هموردا یِ عنصر- ِ-حجم با هموستار ِ لِوی-چیویتا صفر است، چون هموستار ِ لِوی-چیویتا با شبه- ِ-متریک سازگار است: اگر ε با شبه- ِ-متریک سازگار باشد،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \varepsilon = 0. \tag{2787}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. اگر v یک میدان ِ برداری باشد و u و w بردار باشند،

$$w \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\, v) = \boldsymbol{\mathit{IC}}(w, u, v), \tag{2788}$$

یا

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\, v = \underset{\circ}{g}^{-1}[\boldsymbol{\mathit{IC}}_{\{2,3\}}(u, v)]. \tag{2789}$$

به این ترتیب (2780) و (2781) برا یِ یک هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک میشوند

$$w \cdot (\boldsymbol{\nabla}_u\, v) = w \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\, v) + \boldsymbol{K}(w, u, v). \tag{2790}$$

$$\boldsymbol{\nabla}_u\, v = \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\, v + \underset{\circ}{g}^{-1}[\boldsymbol{K}_{\{2,3\}}(u, v)]. \tag{2791}$$

همچنین، رُشن است که اگر e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس بر خمینه باشد

$$e_i \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_j\, e_k) = [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]_{i\,j\,k}. \tag{2792}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_j\, e_k = [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k}\, e_i. \tag{2793}$$

پس تانسرِ $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)$ در واقع هم ان هموستارِ لِوی-چیویتا ست. به این ترتیب، سازگاری یِ هموستارِ لِوی-چیویتا با تانسرِ لِوی-چیویتا را میشود به این شکل نوشت.

$$\dot{\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}} = 0. \tag{2794}$$

هموستارِ لِوی-چیویتا، با شبه-ِ-متریک به طُرِ یکتا تعیین میشود. همچنین، رُشن است که رابطه یِ $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e')$ با $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)$ مثلِ رابطه یِ $\boldsymbol{\Gamma}(e')$ با $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ است، در واقع $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)$ یک حالتِ خاصِ $\boldsymbol{\Gamma}(e)$ است. به این ترتیب اگر e و e' میدان-پایِها یی باشند که

$$e'_i = \Lambda\, e_i, \tag{1744}$$

آنگاه

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e')]^n{}_{l\,m} = [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^n{}_{l\,m} + (\mathbf{D}_l\, \Lambda^n{}_s)(\Lambda^{-1})^s{}_m, \tag{2795}$$

یا

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e') &= \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e) + (\Lambda^{-1})^s{}_m\, e_n \otimes (\mathbf{d}\,\Lambda^n{}_s) \otimes e^m,\\ \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e') &= \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e) + e_n \otimes (\mathbf{d}\,\Lambda^n{}_s) \otimes e'^s.\end{aligned} \tag{2796}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی ست، که هموستارَش با شبه-ِ-متریک سازگار است. u یک بردار است، v یک میدانِ برداری ست، و σ یک میدانِ همبرداری ست. دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u[g(v, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)] &= \boldsymbol{\nabla}_u[\sigma(v)],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma)(v) + \sigma(\boldsymbol{\nabla}_u\, v),\\ &= g(v, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma) + g(\boldsymbol{\nabla}_u\, v, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma).\end{aligned} \tag{2797}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u[g(v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)] &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,g)(v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)+g(\boldsymbol{\nabla}_u\,v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)+g[v,\boldsymbol{\nabla}_u\,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)],\\ &= g(\boldsymbol{\nabla}_u\,v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)+g[v,\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)]. \qquad (2798)\end{aligned}$$

از مقایسه یِ این دُ رابطه معلوم میشود

$$g[v,\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)] = g(v,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma), \qquad (2799)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma) = \underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma, \qquad (2800)$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}\,v) = \underset{\sim}{g}\,\boldsymbol{\nabla}_u\,v. \qquad (2801)$$

اگر τ هم یک میدان ِ همبرداری، و h دُ-فرم ِ القاییده از g باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}_u[h(\sigma,\tau)] &= \boldsymbol{\nabla}_u[g(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)],\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_u\,g)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)\\ &\quad + g[\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma),\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau]+g[\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\boldsymbol{\nabla}_u(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)],\\ &= g[\underset{\sim}{g}^{-1}(\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma),\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau]+g(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau),\\ &= h(\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma,\tau)+h(\sigma,\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau), \qquad (2802)\end{aligned}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}_u\,h = 0. \qquad (2803)$$

این همئرز است با

$$\boldsymbol{\nabla}_u(\sigma\cdot\tau) = (\boldsymbol{\nabla}_u\,\sigma)\cdot\tau+\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_u\,\tau), \qquad (2804)$$

یعنی اگر هموستار با شبه- ِ -متریک سازگار باشد، مشتق ِ هموردا نسبت به دُ-فرم ِ القاییده از شبه- ِ -متریک لَیبنیتسی است. به سادگی میشود دید عکس ِ این هم درست است: اگر مشتق ِ هموردا نسبت به دُ-فرم ِ القاییده از شبه- ِ -متریک لَیبنیتسی باشد، هموستار با شبه- ِ -متریک سازگار است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ -ریمانی ست، که هموستار َش با شبه- ِ -متریک سازگار است. σ و τ و ω میدانها یی همبرداری یَند. دیده میشود

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}(\tau\cdot\omega)+\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}(\sigma\cdot\omega)-\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}(\sigma\cdot\tau),\\
&=\tau\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}\omega)+\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\omega)\\
&\quad+[\omega\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}\tau)-\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}\tau)]+[\omega\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\sigma)-\tau\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}\sigma)],\\
&=2\,\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau})\,\omega+[\tau\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}\omega)-\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\omega)]\\
&\quad+[\omega\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}\tau)-\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}\tau)]+[\omega\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\sigma)-\tau\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}\sigma)],\\
&=2\,\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\omega)+(\boldsymbol{\delta}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau)\\
&\quad+(\boldsymbol{\delta}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)+(\boldsymbol{\delta}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega),\\
&=2\,\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\omega)+(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau)-\boldsymbol{T}(\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau)\\
&\quad+(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)-\boldsymbol{T}(\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)\\
&\quad+(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)-\boldsymbol{T}(\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega),
\end{aligned}
\tag{2805}
$$

که نتیجه میدهد

$$
\begin{aligned}
\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}\omega)=\frac{1}{2}[&\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma}(\tau\cdot\omega)+\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\tau}(\sigma\cdot\omega)-\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\omega}(\sigma\cdot\tau)\\
&-(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau)+\boldsymbol{T}(\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau)\\
&-(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)+\boldsymbol{T}(\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)\\
&-(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)+\boldsymbol{T}(\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\omega)].
\end{aligned}
\tag{2806}
$$

از تعریف ِ همپیچش دیده میشود

$$\boldsymbol{K}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{T}(\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$$
$$+\boldsymbol{T}(\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)+\boldsymbol{T}(\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)]. \quad (2807)$$

به این ترتیب،

$$\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,\omega)=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma}\,(\tau\cdot\omega)+\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\sigma\cdot\omega)-\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega}\,(\sigma\cdot\tau)$$
$$-(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)-(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$$
$$-(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)]+\boldsymbol{K}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega), \quad (2808)$$

یا

$$\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,\omega)=\frac{1}{2}[\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma}\,(\tau\cdot\omega)+\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\sigma\cdot\omega)-\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega}\,(\sigma\cdot\tau)$$
$$-(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)-(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$$
$$-(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)]+\boldsymbol{K}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega), \quad (2809)$$

همچنین،

$$\sigma\cdot(\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,\omega)=g(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,\omega),$$
$$=g[\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)],$$
$$=(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma)\cdot[\boldsymbol{\nabla}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)]. \quad (2810)$$

به این ترتیب از (2780) و (2809) و (2810) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{K}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)=\frac{1}{2}[\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma}\,(\tau\cdot\omega)+\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\sigma\cdot\omega)-\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega}\,(\sigma\cdot\tau)$$
$$-(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)-(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$$
$$-(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)]. \quad (2811)$$

$\{(i,e_i)\mid i\}$ را یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس، و $\{(i,e^i)\mid i\}$ را دُگانِ آن میگیریم. از (2788) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{IC}(\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^k)=(\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^i)\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^j}(\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^k)]. \tag{2812}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{IC}(\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^k)&=e^i\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^j}\,e^k),\\&=e^i\cdot(g^{j\,l}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,e^k),\\&=-e^i\cdot(g^{j\,l}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^k{}_{l\,m}\,e^m),\end{aligned} \tag{2813}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{IC}(\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\circ}{g}^{-1}\,e^k)=-[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^{k\,j\,i}. \tag{2814}$$

رابطِها یِ (2774) و (2811) برا یِ محاسبه یِ عملگرِ لِوی-چیویتا، در حالتها یِ خاص ی سادِتر میشوند. در (2774)، اگر جابِجاگرِ هر دُ-تا از u و v و w با هم صفر باشد،

$$\boldsymbol{IC}(w,u,v)=\frac{1}{2}[\mathbf{D}_u(v\cdot w)+\mathbf{D}_v(u\cdot w)-\mathbf{D}_w(u\cdot v)], \tag{2815}$$

و البته

$$\mathbf{D}_u\,(v\cdot w)=\boldsymbol{IC}(w,u,v)+\boldsymbol{IC}(v,u,w). \tag{2816}$$

دیده میشود در این حالت $\boldsymbol{IC}(w,u,v)$ نسبت به u و v متقارن است. اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ فضا یِ مماس باشد،

$$\boldsymbol{IC}(e_i,e_j,e_k)=\frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,i}+\mathbf{D}_k\,g_{j\,i}-\mathbf{D}_i\,g_{j\,k}), \tag{2817}$$

و البته

$$\mathbf{D}_j\,g_{k\,i}=\boldsymbol{IC}(e_i,e_j,e_k)+\boldsymbol{IC}(e_k,e_j,e_i). \tag{2818}$$

از جمله در این حالت،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{i\,j\,k} = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_j\, g_{k\,i} + \mathbf{D}_k\, g_{j\,i} - \mathbf{D}_i\, g_{j\,k}). \tag{2819}$$

$$\mathbf{D}_j\, g_{k\,i} = \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{i\,j\,k} + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{k\,j\,i}. \tag{2820}$$

همچنین، اگر حاصل- ِ-ضرب- ِ-درونی یِ هر دُ-تا از u و v و w ثابت باشد،

$$\boldsymbol{IC}(w,u,v) = \frac{1}{2}[u\cdot(w\diamond v) + v\cdot(w\diamond u) + w\cdot(u\diamond v)], \tag{2821}$$

و البته

$$w\cdot(u\diamond v) = \boldsymbol{IC}(w,u,v) - \boldsymbol{IC}(w,v,u). \tag{2822}$$

دیده میشود در این حالت $\boldsymbol{IC}(w,u,v)$ نسبت به w و v پادمتقارن است. اگر e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس باشد، که حاصل ِضرب ِ درونی یِ هر دُ-تا از مقدارها یَش ثابت است،

$$\boldsymbol{IC}(e_i,e_j,e_k) = \frac{1}{2}[e_j\cdot(e_i\diamond e_k) + e_k\cdot(e_i\diamond e_j) + e_i\cdot(e_j\diamond e_k)], \tag{2823}$$

و البته

$$e_i\cdot(e_j\diamond e_k) = \boldsymbol{IC}(e_i,e_j,e_k) - \boldsymbol{IC}(e_i,e_k,e_j). \tag{2824}$$

از جمله در این حالت،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{i\,j\,k} = [e_j\cdot(e_i\diamond e_k) + e_k\cdot(e_i\diamond e_j) + e_i\cdot(e_j\diamond e_k)]. \tag{2825}$$

$$e_i\cdot(e_j\diamond e_k) = \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{i\,j\,k} - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}_{i\,k\,j}. \tag{2826}$$

در (2811) هم، اگر مشتق ِ برونی یِ σ و τ و ω صفر باشد،

$$\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega) = \frac{1}{2}[\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma}\,(\tau\cdot\omega) + \mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau}\,(\sigma\cdot\omega) - \mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega}\,(\sigma\cdot\tau)], \tag{2827}$$

و البته

$$\mathbf{D}_{\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma}\,(\tau\cdot\omega)=\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)+\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau).\qquad(2828)$$

دیده میشود در این حالت $\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$ نسبت به σ و τ متقارن است. اگر e یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ فضا یِ هممماس باشد،

$$\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)=\frac{1}{2}(\mathbf{D}^i\,g^{j\,k}+\mathbf{D}^j\,g^{i\,k}-\mathbf{D}^k\,g^{i\,j}),\qquad(2829)$$

و البته

$$\mathbf{D}^i\,g^{j\,k}=\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)+\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j).\qquad(2830)$$

از جمله در این حالت،

$$-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{k\,j\,i}=\frac{1}{2}\,(\mathbf{D}^i\,g^{j\,k}+\mathbf{D}^j\,g^{i\,k}-\mathbf{D}^k\,g^{i\,j}).\qquad(2831)$$

$$\mathbf{D}^i\,g^{j\,k}=-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{k\,j\,i}-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{j\,k\,i}.\qquad(2832)$$

همچنین، اگر حاصلِ‌ضرب ِ درونی یِ هر دُ-تا از σ و τ و ω ثابت باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)=-\frac{1}{2}[&(\mathbf{d}\,\omega)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)+(\mathbf{d}\,\tau)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)\\&+(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)],\end{aligned}\qquad(2833)$$

و البته

$$(\mathbf{d}\,\sigma)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)=\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)-\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau).\qquad(2834)$$

دیده میشود در این حالت $\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\sigma,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\omega)$ نسبت به σ و ω پادمتقارن است. اگر e یک میدان-پایه یِ فضا یِ هممماس باشد، که حاصلِ‌ضرب ِ درونی یِ هر دُ-تا از مقدارها یَش ثابت است،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)=-\frac{1}{2}\,[&(\mathbf{d}\,e^k)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j)+(\mathbf{d}\,e^j)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)\\&+(\mathbf{d}\,e^i)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)],\end{aligned}\qquad(2835)$$

و البته

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,e^i)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j)=&\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)\\&-\boldsymbol{IC}(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k,\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j).\end{aligned}\qquad(2836)$$

از جمله در این حالت،

$$-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{k\,j\,i} = -\frac{1}{2}[(\mathbf{d}\,e^k)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i, \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j) + (\mathbf{d}\,e^j)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i, \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k) + (\mathbf{d}\,e^i)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j, \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k)]. \tag{2837}$$

$$(\mathbf{d}\,e^i)(\underset{\sim}{g}^{-1}\,e^k, \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^j) = -\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{k\,j\,i} + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{j\,k\,i}. \tag{2838}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی، و u یک میدان ِ برداری ست. رابطه یِ

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_u\,T &= \boldsymbol{\nabla}_u\,T + [(\boldsymbol{\nabla}_j\,u)^i + \boldsymbol{T}^i{}_{k\,j}\,u^k]\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}{}_i{}^j\,T,\\ &= \boldsymbol{\nabla}_u\,T + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}[(\boldsymbol{\nabla}_j\,u)\otimes e^j; T] + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\,u; T),\end{aligned} \tag{2009}$$

برا یِ مشتق ِ لی یِ g با u چنین میشود.

$$\mathbf{L}_u\,g = \boldsymbol{\nabla}_u\,g + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}[(\boldsymbol{\nabla}_j\,u)\otimes e^j; g] + \boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\,u; g), \tag{2839}$$

که $\{(i, e^i) \mid i\}$ یک میدان-پایه یِ فضا یِ هممماس است. برا یِ $\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}(\cdot, g)$ هم، مانسته یِ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(r,s)}(v,\omega,T) &= \sum_{i=1}^{s} T[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{s-i}]\\ &\quad - \sum_{i=1}^{r}[\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{i-1}\otimes(v\otimes\omega)\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{1}}_{r+s-i}]T\end{aligned} \tag{564}$$

میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}(\mathcal{M}; g) = g\,(\mathcal{M}\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathcal{M}), \tag{2840}$$

که $\mathcal{M}$ یک تانسر ِ نُع ِ $(1,1)$ است. متناظر با بردارها یِ v و w،

$$\begin{aligned}[g\,(\mathcal{M}\otimes\mathbf{1})](v,w) &= (\underset{\sim}{g}\,\mathcal{M}\,v)\,w,\\ &= (\mathcal{M}\,v)\cdot w,\end{aligned} \tag{2841}$$

$$\begin{aligned}[g\,(\mathbf{1}\otimes\mathcal{M})](v,w) &= (\underset{\sim}{g}\,\mathcal{M}\,w)\,v,\\ &= v\cdot(\mathcal{M}\,w),\end{aligned} \tag{2842}$$

که در برابری یِ اول تقارن ِ g به کار رفته. پس،

$$\{\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}[(\boldsymbol{\nabla}_j\, u)\otimes e^j; g]\}(v,w) = (v^j\, \boldsymbol{\nabla}_j\, u)\cdot w + v\cdot (w^j\, \boldsymbol{\nabla}_j\, u),$$
$$= (\boldsymbol{\nabla}_v\, u)\cdot w + v\cdot (\boldsymbol{\nabla}_w\, u). \tag{2843}$$

$$[\boldsymbol{\mathcal{L}}^{(0,2)}(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u; g)](v,w) = [(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u)\, v]\cdot w + v\cdot [(\boldsymbol{T}_{\{2\}}\, u)\, w],$$
$$= [\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]\cdot w + v\cdot [\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,w)]. \tag{2844}$$

به این ترتیب،

$$(\mathbf{L}_u\, g)(v,w) = \boldsymbol{\nabla}_u\, g + (\boldsymbol{\nabla}_v\, u)\cdot w + v\cdot (\boldsymbol{\nabla}_w\, u)$$
$$+ [\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,v)]\cdot w + v\cdot [\boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(u,w)]. \tag{2845}$$

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، جمله یِ اول ِ طرف ِ راست صفر است. اگر پیچش صفر باشد، دُ-جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست صفر َند. به این ترتیب، برا یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا جمله یِ اول و دُ-جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست صفر َند:

$$(\mathbf{L}_u\, g)(v,w) = (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, u)\cdot w + v\cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w\, u). \tag{2846}$$

از جمله دیده میشود

$$(\mathbf{L}_u\, g)_{i\,j} = (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, u)_j + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_j\, u)_i. \tag{2847}$$

69 عملگرها یِ برداری یِ مشتق

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. v یک بردار و Σ یک میدان ِ اسکالر است، از

$$\boldsymbol{\nabla}_v\, \Sigma = g(v, \mathbf{grad}\, \Sigma), \tag{2236}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma = v\cdot(\mathbf{grad}\,\Sigma), \tag{2848}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma = v\cdot(\underset{\smile}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma). \tag{2849}$$

این را سادِتر

$$\boldsymbol{\nabla}_v\,\Sigma = v\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma) \tag{2850}$$

هم مینویسم، که در آن $(\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)$ به جا یِ $(\underset{\smile}{g}^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\Sigma)$ یا $(\mathbf{grad}\,\Sigma)$ به کار رفته.

دیده شد اگر هموستار متقارن باشد، در محاسبه یِ مشتق ِ برونی یِ یک فرم- ِ-دیفرانسیل میشود مشتق ِ هموردا به کار برد. $(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل است و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. در این صورت،

$$\mathbf{d}\,\sigma = \frac{1}{s!}\,(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)_{i_1\cdots i_s}\,e^{i_1}\wedge\cdots\wedge e^{i_s}. \tag{1972}$$

برا یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا، از

$$[\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} = \frac{1}{2}\,g^{m\,i}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,m}+\mathbf{D}_k\,g_{j\,m}-\mathbf{D}_m\,g_{j\,k}) \tag{2785}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^i{}_{i\,k} &= \frac{1}{2}\,g^{m\,i}(\mathbf{D}_i\,g_{k\,m}+\mathbf{D}_k\,g_{i\,m}-\mathbf{D}_m\,g_{i\,k}),\\ &= \frac{1}{2}\,g^{m\,i}(\mathbf{D}_k\,g_{i\,m}).\end{aligned} \tag{2851}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^i{}_{i\,k} = \frac{1}{2\,\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\smile}{g})}\,\mathbf{D}_k\,[\mathsf{det}(\delta_e\,\underset{\smile}{g})], \tag{2852}$$

یا

$$\underset{\circ}{\Gamma}^{i}{}_{i\,k} = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\, \mathbf{D}_k\, [\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}]. \tag{2853}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار است، که عنصر- ِ-حجم ِ آن با شبه- ِ-متریک سازگار است. σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل است و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. اثر ِ هممشتق- ِ-برونی بر σ چنین میشود.

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\, \mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}\, \sigma^{i\, i_1\cdots i_{s-1}}]. \tag{2499}$$

البته میشود فرض ِ سمتدار-بودن ِ خمینه را کنار گذاشت، و هممشتق ِ برونی را با شبه- ِ-متریک (به جا یِ حجم) تعریف کرد. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, \sigma)^{i\, i_1\cdots i_{s-1}} &= \mathbf{D}_i\, \sigma^{i\, i_1\cdots i_{s-1}} + \underset{\circ}{\Gamma}^{i}{}_{i\,k}\, \sigma^{k\, i_1\cdots i_{s-1}} + \sum_{j=1}^{s-1} \underset{\circ}{\Gamma}^{i_j}{}_{i\,k}\, \sigma^{i\, i_1\cdot i_{j-1}\, k\, i_{j+1}\cdots i_{s-1}},\\ &= \mathbf{D}_i\, \sigma^{i\, i_1\cdots i_{s-1}}\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\{\mathbf{D}_k\, [\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}]\}\sigma^{k\, i_1\cdots i_{s-1}},\end{aligned} \tag{2854}$$

که در برابری یِ دوم (2853) به کار رفته، و این که به خاطر ِ تقارن ِ هموستار جمله یِ سوم ِ طرف ِ راست ِ برابری یِ اول صفر است. به این ترتیب،

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, \sigma)^{i\, i_1\cdots i_{s-1}} = \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}}\, \mathbf{D}_i\, [\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})|}\, \sigma^{i\, i_1\cdots i_{s-1}}]. \tag{2855}$$

از مقایسه یِ این با (2499) دیده میشود

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, \sigma)^{i\, i_1\cdots i_{s-1}}. \tag{2856}$$

از جمله، اگر v یک میدان ِ برداری باشد، از

$$\mathbf{div}\, v = -\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\, \underset{\sim}{g}\, v \tag{2475}$$

دیده میشود

$$\mathbf{div}\, v = (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, v)^i. \tag{2857}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned}\mathbf{div}\, v &= e^i(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, v),\\ &= (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\, v)\cdot(\underset{\smile}{g}^{-1}\, e^i),\\ &= [(\underset{\smile}{g}^{-1}\, e^i)\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i]\cdot v,\end{aligned} \tag{2858}$$

یا سادِتر، با کاربرد ِ $\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}$ به جا یِ $(\underset{\smile}{g}^{-1}\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}})$،

$$\mathbf{div}\, v = \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\cdot v. \tag{2859}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که هموستار ِ آن متقارن است. ε عنصر- ِ-حجم ِ $\mathbb{M}$ است. σ یک s فرم- ِ-دیفرانسیل است و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. در این صورت همچنان جمله یِ سوم در طرف ِ راست ِ برابری ی اول ِ (2854) صفر است. پس،

$$(\boldsymbol{\nabla}_i\, \sigma)^{i\, i_1\cdots i_{s-1}} = \mathbf{D}_i\, \sigma^{i\, i_1\cdots i_{s-1}} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{i\, k}\, \sigma^{k\, i_1\cdots i_{s-1}}, \tag{2860}$$

برا یِ این که این رابطه شبیه ِ (2855) شود، چیز ی مشابه با (2853) لازم است. دیده میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_j\, \varepsilon)_{i_1\cdots i_m} = \mathbf{D}_j\, \varepsilon_{i_1\cdots i_m} - \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\, i_l}\, \varepsilon_{i_1\cdots i_{l-1}\, k\, i_{l+1}\cdots i_m}. \tag{2861}$$

$$\sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\, i_l}\, \varepsilon_{i_1\cdots i_{l-1}\, k\, i_{l+1}\cdots i_m} = \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\, k}\, \varepsilon_{i_1\cdots i_m}. \tag{2862}$$

برا یِ به-دست-آوردن ِ رابطه یِ اخیر، کافی ست توجه شود طرف ِ چپ نسبت به شاخصها یِ آزاد َش کاملَن پادمتقارن است، پس متناسب با $\varepsilon_{i_1\cdots i_m}$ است. از اینجا مثلَن با ضرب-کردن ِ دُ-طرف در $[i_1\cdots i_m]$ و جمع رو یِ شاخصها رابطه یِ بالا نتیجه میشود. به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}_j\, \varepsilon)_{i_1\cdots i_m} = \left\{\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\, \mathbf{D}_j\, [\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)] - \boldsymbol{\Gamma}^k{}_{j\, k}\right\} \varepsilon_{i_1\cdots i_m}. \tag{2863}$$

دیده میشود اگر مشتق ِ هموردا یِ عنصر- ِ-حجم صفر باشد،

$$\mathbf{\Gamma}^k{}_{j\,k} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_j\,[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]. \tag{2864}$$

پس اگر هموستار متقارن و با عنصر- ِ-حجم سازگار باشد،

$$(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)^{i\,i_1\cdots i_{s-1}} = \frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\,\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\,\sigma^{i\,i_1\cdots i_{s-1}}\}. \tag{2865}$$

از مقایسه یِ این با

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} &= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]\sigma^{i\,i_1\cdots i_{s-1}}\},\\ &= -\frac{1}{\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)}\,\mathbf{D}_i\{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]g^{l\,i}g^{l_1\,i_1}\cdots g^{l_{s-1}\,i_{s-1}}\,\sigma_{l\,l_1\cdots l_{s-1}}\},\end{aligned} \tag{2492}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)^{i_1\cdots i_{s-1}} = -(\boldsymbol{\nabla}_i\,\sigma)^{i\,i_1\cdots i_{s-1}}. \tag{2866}$$

از جمله، اگر v یک میدان ِ برداری باشد،

$$\mathbf{div}\,v = (\boldsymbol{\nabla}_i\,v)^i. \tag{2867}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\mathbf{div}\,v = [(g^{-1}\,e^i)\boldsymbol{\nabla}_i]\cdot v, \tag{2868}$$

یا سادِتر،

$$\mathbf{div}\,v = \boldsymbol{\nabla}\cdot v. \tag{2869}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ m بُعدی ست، که ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. T یک میدان ِ تانسری یِ پادمتقارن ِ نُع ِ $(r,0)$ است و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. دیده شد

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\,T = \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}\,\frac{\mathsf{det}(\delta_e\,g)}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\,\varepsilon^{i_1\cdots i_{m-r-1}\,j\,k_1\cdots k_r}\\ (\mathbf{D}_j\,T_{k_1\cdots k_r})e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_{m-r-1}}.\end{aligned} \tag{2410}$$

دیده میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_j\, T)_{k_1\cdots k_r} = \mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r} - \sum_{l=1}^{r} \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k_l}\, T_{k_1\cdots k_{l-1}\,i\,k_{l+1}\cdots k_r}. \tag{2870}$$

اگر هموستار متقارن باشد،

$$\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{j\,k_l}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{n-r-1}\,j\,k_1\cdots k_r} = 0, \tag{2871}$$

چون عامل ِ اول نسبت به j و k_l متقارن، و عامل ِ دوم نسبت به j و k_l پادمتقارن است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, T = {} & \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}\, \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}\,j\,k_1\cdots k_r} \\ & (\boldsymbol{\nabla}_j\, T)_{k_1\cdots k_r}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{m-r-1}}.\end{aligned} \tag{2872}$$

g متقارن است. به این ترتیب، از

$$\mathbf{tcurl}_r = (-1)^{(r+1)\mathsf{sy}(g)}\, \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}\, \mathbf{curl}_r \tag{2418}$$

دیده میشود

$$\mathbf{tcurl}_r = \frac{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}\, \mathbf{curl}_r. \tag{2873}$$

پس،

$$\begin{aligned}\mathbf{tcurl}\, T = {} & \frac{1}{(r!)[(n-r-1)!]}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{n-r-1}\,j\,k_1\cdots k_r} \\ & (\boldsymbol{\nabla}_j\, T)_{k_1\cdots k_r}\, e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-r-1}}.\end{aligned} \tag{2874}$$

اگر ε با g سازگار باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{curl}\, T = {} & \frac{1}{(r!)[(m-r-1)!]}[\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{i_1\cdots i_{m-r-1}\,j\,k_1\cdots k_r} \\ & (\mathbf{D}_j\, T_{k_1\cdots k_r})e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_{m-r-1}}.\end{aligned} \tag{2409}$$

در این حالت (2874) همچنان برقرار است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ سمتدار ِ 3 بُعدی ست، که ε عنصر- ِ-حجم ِ آن است. هموستار ِ خمینه متقارن است. v یک میدان ِ برداری ست و e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. نتیجه میشود

$$\mathbf{curl}\, v = \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{i\,j\,k}\, (\boldsymbol{\nabla}_j\, v)_k\, e_i, \tag{2875}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\mathbf{curl}\, v = \frac{\mathsf{det}(\delta_e\, \underset{\sim}{g})}{[\mathbf{v}_{\boldsymbol{\varepsilon}}(e)]^2}\, \boldsymbol{\nabla} \times v. \tag{2876}$$

همچنین،

$$\mathbf{tcurl}\, v = \boldsymbol{\varepsilon}^{i\,j\,k}\, (\boldsymbol{\nabla}_j\, v)_k\, e_i, \tag{2877}$$

یا

$$\mathbf{tcurl}\, v = \boldsymbol{\nabla} \times v. \tag{2878}$$

در رسیدن به (2875) تا (2878) تقارن ِ هموستار به کار رفته، اما سازگاری یِ حجم و هموستار با شبه- ِ-متریک به کار نرفته. اگر علاوه بر تقارن ِ هموستار، ε هم با g سازگار باشد،

$$\mathbf{curl}\, v = [\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}^{i\,j\,k}\, (\boldsymbol{\nabla}_j\, v)_k\, e_i, \tag{2879}$$

که میشود آن را چنین نوشت.

$$\mathbf{curl}\, v = [\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\nabla} \times v. \tag{2880}$$

در رسیدن به (2879) و (2880) تقارن ِ هموستار و سازگاری یِ حجم با شبه- ِ-متریک به کار رفته، اما سازگاری یِ هموستار با شبه- ِ-متریک به کار نرفته.

70 خمش ِ سازگار با شبه- ِ-متریک

خمش ِ متناظر با یک هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک را یک خمش ِ سازگار با شبه- ِ-متریک، و خمش ِ متناظر با هموستار ِ لِوی-چیویتا را خمش ِ لِوی-چیویتا مینامم. خمش ِ لِوی-چیویتا را با $\overset{\circ}{\boldsymbol{R}}$ نشان میدهم. از این که هموستار ِ لِوی-چیویتا (با شبه- ِ-متریک ِ معین) یکتا ست، نتیجه میشود خمش ِ لِوی-چیویتا هم یکتا ست. یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی را لِوی-چیویتا-تخت مینامم، اگر خمش- ِ-لِوی-چیویتا یِ آن خمینه صفر باشد.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. وقت ی هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است، اگر u و v و w میدانها یی برداری باشند و τ یک میدان ِ همبرداری باشد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v) &= [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\tau)](w),\\ &= [(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\underset{\sim}{g}\,\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)](w),\\ &= \{\underset{\sim}{g}[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)]\}(w),\\ &= (\underset{\sim}{g}\,w)[(\boldsymbol{\nabla}_u\,\boldsymbol{\nabla}_v - \boldsymbol{\nabla}_v\,\boldsymbol{\nabla}_u - \boldsymbol{\nabla}_{u\diamond v})(\underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau)],\end{aligned} \tag{2881}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{S}(w,\tau,u,v) = \boldsymbol{R}(\underset{\sim}{g}\,w, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau, u, v). \tag{2882}$$

به این ترتیب رابطه یِ

$$\boldsymbol{R}(\tau,w,u,v) + \boldsymbol{S}(w,\tau,u,b) = 0, \tag{2086}$$

میشود

$$\boldsymbol{R}(\tau,w,u,v) + \boldsymbol{R}(\underset{\sim}{g}\,w, \underset{\sim}{g}^{-1}\,\tau, u, v) = 0. \tag{2883}$$

البته چون خمش نقطِئی ست، این رابطه اگر u و v و w بردار باشند و τ همبردار باشد هم درست است. $\{(i,e_i)\mid i\}$ را یک پایه یِ فضا یِ مماس، و $\{(i,e^i)\mid i\}$ را دُگان ِ آن میگیرم. رابطه یِ بالا میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}(\underset{\sim}{g}\,e_j, \underset{\sim}{g}^{-1}\,e^i, e_k, e_l) = 0, \tag{2884}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{R}_j{}^i{}_{k\,l} = -\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}, \tag{2885}$$

یا

$$\boldsymbol{R}_{j\,i\,k\,l} = -\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l}. \tag{2886}$$

خمش ِ سازگار با شبه- ِ-متریک، نسبت به شاخصها یِ اول و دوم هم پادمتقارن است.

شکل ِ (2103) برا یِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی چنین است.

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = \mathfrak{U}^i{}_{j\,k\,l}, \tag{2887}$$

که

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}^i{}_{j\,k\,l} = {} & (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{j\,k} \\ & + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}.\end{aligned} \tag{2888}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست، که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. (2887) میشود

$$\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + \boldsymbol{R}_{i\,k\,l\,j} + \boldsymbol{R}_{i\,l\,j\,k} = \mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l}. \tag{2889}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}& \mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l} + \mathfrak{U}_{j\,k\,i\,l} - \mathfrak{U}_{k\,i\,j\,l}, \\ = {} & \boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + \boldsymbol{R}_{i\,k\,l\,j} + \boldsymbol{R}_{i\,l\,j\,k} \\ & + \boldsymbol{R}_{j\,k\,i\,l} + \boldsymbol{R}_{j\,i\,l\,k} + \boldsymbol{R}_{j\,l\,k\,i} \\ & - \boldsymbol{R}_{k\,i\,j\,l} - \boldsymbol{R}_{k\,j\,l\,i} - \boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j}, \\ = {} & (\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + \boldsymbol{R}_{j\,i\,l\,k}) + (\boldsymbol{R}_{i\,k\,l\,j} - \boldsymbol{R}_{k\,i\,j\,l}) + (\boldsymbol{R}_{j\,k\,i\,l} - \boldsymbol{R}_{k\,j\,l\,i}) \\ & + (\boldsymbol{R}_{i\,l\,j\,k} + \boldsymbol{R}_{j\,l\,k\,i} - \boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j}), \\ = {} & 2\,\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + (-\boldsymbol{R}_{l\,i\,j\,k} - \boldsymbol{R}_{l\,j\,k\,i} + \boldsymbol{R}_{l\,k\,i\,j}),\end{aligned} \tag{2890}$$

که در برابری یِ آخر پادتقارنها یِ $\boldsymbol{R}$ به کار رفته. از (2889) دیده میشود

$$-\boldsymbol{R}_{l\,i\,j\,k}-\boldsymbol{R}_{l\,j\,k\,i}=\boldsymbol{R}_{l\,k\,i\,j}-\mathfrak{U}_{l\,k\,i\,j}. \tag{2891}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l}+\mathfrak{U}_{j\,k\,i\,l}-\mathfrak{U}_{k\,i\,j\,l}=2\left(\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l}+\boldsymbol{R}_{l\,k\,i\,j}\right)-\mathfrak{U}_{l\,k\,i\,j}, \tag{2892}$$

که با استفاده از پادتقارن ِ $\boldsymbol{R}$ میشود

$$2\left(\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l}-\boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j}\right)=\mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l}+\mathfrak{U}_{j\,k\,i\,l}+\mathfrak{U}_{l\,k\,i\,j}-\mathfrak{U}_{k\,i\,j\,l}. \tag{2893}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l}&=(\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{T})_{i\,k\,l}+(\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{T})_{i\,l\,j}+(\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{T})_{i\,j\,k}\\&\quad+\boldsymbol{T}_{i\,n\,l}\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k}+\boldsymbol{T}_{i\,n\,j}\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l}+\boldsymbol{T}_{i\,n\,k}\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}.\end{aligned} \tag{2894}$$

در نتیجه

$$2\left(\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l}-\boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j}\right)=\mathfrak{U}^{(1)}_{i\,j\,k\,l}+\mathfrak{U}^{(2)}_{i\,j\,k\,l}, \tag{2895}$$

که

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}^{(1)}_{i\,j\,k\,l}&=(\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{T})_{i\,k\,l}+(\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{T})_{i\,l\,j}+(\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{T})_{i\,j\,k}\\&\quad+(\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{T})_{j\,i\,l}+(\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{T})_{j\,l\,k}+(\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{T})_{j\,k\,i}\\&\quad-(\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{T})_{k\,j\,l}-(\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{T})_{k\,l\,i}-(\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{T})_{k\,i\,j}\\&\quad+(\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{T})_{l\,i\,j}+(\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{T})_{l\,j\,k}+(\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{T})_{l\,k\,i},\end{aligned} \tag{2896}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}^{(2)}_{i\,j\,k\,l}&=\boldsymbol{T}_{i\,n\,l}\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k}+\boldsymbol{T}_{i\,n\,j}\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l}+\boldsymbol{T}_{i\,n\,k}\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}\\&\quad+\boldsymbol{T}_{j\,n\,l}\boldsymbol{T}^n{}_{k\,i}+\boldsymbol{T}_{j\,n\,k}\boldsymbol{T}^n{}_{i\,l}+\boldsymbol{T}_{j\,n\,i}\boldsymbol{T}^n{}_{l\,k}\\&\quad-\boldsymbol{T}_{k\,n\,l}\boldsymbol{T}^n{}_{i\,j}-\boldsymbol{T}_{k\,n\,i}\boldsymbol{T}^n{}_{j\,l}-\boldsymbol{T}_{k\,n\,j}\boldsymbol{T}^n{}_{l\,i}\\&\quad+\boldsymbol{T}_{l\,n\,j}\boldsymbol{T}^n{}_{k\,i}+\boldsymbol{T}_{l\,n\,k}\boldsymbol{T}^n{}_{i\,j}+\boldsymbol{T}_{l\,n\,i}\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k}.\end{aligned} \tag{2897}$$

با استفاده از

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_{j\,i\,k} + \boldsymbol{T}_{k\,i\,j} + \boldsymbol{T}_{i\,j\,k}), \tag{2766}$$

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k} = \boldsymbol{K}_{i\,j\,k} - \boldsymbol{K}_{i\,k\,j}, \tag{2767}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}^{(1)}_{i\,j\,k\,l} &= (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})_{j\,l\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})_{l\,j\,k} - (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})_{k\,j\,l} \\
&\quad + (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})_{i\,k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})_{l\,k\,i} - (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})_{k\,l\,i} \\
&\quad + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})_{i\,l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})_{j\,i\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})_{l\,i\,j} \\
&\quad + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})_{i\,j\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})_{j\,k\,i} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})_{k\,i\,j}, \\
&= 2\,[(\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{K})_{l\,j\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{K})_{k\,i\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{K})_{i\,l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{K})_{j\,k\,i}],
\end{aligned} \tag{2898}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}^{(2)}_{i\,j\,k\,l} &= (\boldsymbol{T}_{i\,n\,l} + \boldsymbol{T}_{l\,n\,i})\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + (\boldsymbol{T}_{i\,n\,j} - \boldsymbol{T}_{j\,n\,i})\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} \\
&\quad + (\boldsymbol{T}_{i\,n\,k} + \boldsymbol{T}_{k\,n\,i})\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j} + (\boldsymbol{T}_{j\,n\,l} + \boldsymbol{T}_{l\,n\,j})\boldsymbol{T}^n{}_{k\,i} \\
&\quad + (\boldsymbol{T}_{j\,n\,k} + \boldsymbol{T}_{k\,n\,j})\boldsymbol{T}^n{}_{i\,l} + (\boldsymbol{T}_{k\,n\,l} - \boldsymbol{T}_{l\,n\,k})\boldsymbol{T}^n{}_{j\,i}, \\
&= (2\,\boldsymbol{K}_{n\,i\,l} - \boldsymbol{T}_{n\,i\,l})\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + (2\,\boldsymbol{K}_{i\,n\,j} - \boldsymbol{T}_{n\,i\,j})\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} \\
&\quad + (2\,\boldsymbol{K}_{n\,i\,k} - \boldsymbol{T}_{n\,i\,k})\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j} + (2\,\boldsymbol{K}_{n\,l\,j} - \boldsymbol{T}_{n\,l\,j})\boldsymbol{T}^n{}_{k\,i} \\
&\quad + (2\,\boldsymbol{K}_{n\,k\,j} - \boldsymbol{T}_{n\,k\,j})\boldsymbol{T}^n{}_{i\,l} + (2\,\boldsymbol{K}_{k\,n\,l} - \boldsymbol{T}_{n\,k\,l})\boldsymbol{T}^n{}_{j\,i}, \\
&= 2\,(\boldsymbol{K}_{n\,i\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,k} + \boldsymbol{K}_{i\,n\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,l} \\
&\quad + \boldsymbol{K}_{n\,i\,k}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j} + \boldsymbol{K}_{n\,l\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{k\,i} \\
&\quad + \boldsymbol{K}_{n\,k\,j}\,\boldsymbol{T}^n{}_{i\,l} + \boldsymbol{K}_{k\,n\,l}\,\boldsymbol{T}^n{}_{j\,i}), \\
&= 2\,[\boldsymbol{K}_{n\,i\,l}(\boldsymbol{K}^n{}_{j\,k} - \boldsymbol{K}^n{}_{k\,j}) + \boldsymbol{K}_{i\,n\,j}(\boldsymbol{K}^n{}_{k\,l} - \boldsymbol{K}^n{}_{l\,k}) \\
&\quad + \boldsymbol{K}_{n\,i\,k}(\boldsymbol{K}^n{}_{l\,j} - \boldsymbol{K}^n{}_{j\,l}) + \boldsymbol{K}_{n\,l\,j}(\boldsymbol{K}^n{}_{k\,i} - \boldsymbol{K}^n{}_{i\,k}) \\
&\quad + \boldsymbol{K}_{n\,k\,j}(\boldsymbol{K}^n{}_{i\,l} - \boldsymbol{K}^n{}_{l\,i}) + \boldsymbol{K}_{k\,n\,l}(\boldsymbol{K}^n{}_{j\,i} - \boldsymbol{K}^n{}_{i\,j})],
\end{aligned}$$

$$= 2\,[(\boldsymbol{K}_{n\,i\,l}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,k} - \boldsymbol{K}_{n\,i\,k}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,l}) + (\boldsymbol{K}_{n\,l\,j}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{k\,i} - \boldsymbol{K}_{n\,k\,j}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{l\,i})$$
$$+ \boldsymbol{K}_{i\,n\,j}(\boldsymbol{K}^{n}{}_{k\,l} - \boldsymbol{K}^{n}{}_{l\,k}) - \boldsymbol{K}_{k\,n\,l}(\boldsymbol{K}^{n}{}_{i\,j} - \boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,i})]. \tag{2899}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} - \boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j} = {}& (\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{K})_{l\,j\,k} + (\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{K})_{k\,i\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\boldsymbol{K})_{i\,l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\boldsymbol{K})_{j\,k\,i}\\ &+ (\boldsymbol{K}_{n\,i\,l}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,k} - \boldsymbol{K}_{n\,i\,k}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,l})\\ &+ (\boldsymbol{K}_{n\,l\,j}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{k\,i} - \boldsymbol{K}_{n\,k\,j}\,\boldsymbol{K}^{n}{}_{l\,i})\\ &+ \boldsymbol{K}_{i\,n\,j}(\boldsymbol{K}^{n}{}_{k\,l} - \boldsymbol{K}^{n}{}_{l\,k})\\ &- \boldsymbol{K}_{k\,n\,l}(\boldsymbol{K}^{n}{}_{i\,j} - \boldsymbol{K}^{n}{}_{j\,i}).\end{aligned} \tag{2900}$$

از جمله دیده میشود اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد،

$$\boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j} = \boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l}. \tag{2901}$$

به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد خمش این رابطِها یِ جبری را بر میئاورَد.

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,l\,k} = -\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l}. \tag{2028}$$

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} = 0. \tag{2106}$$

$$\boldsymbol{R}_{j}{}^{i}{}_{k\,l} = -\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l}. \tag{2885}$$

$$\boldsymbol{R}_{k\,l}{}^{i}{}_{j} = \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l}. \tag{2902}$$

از اینها، (2028) به هیچ شرط ی بر هموستار نیاز ندارد. مانسته یِ این رابطه حتا برا یِ هموستارها یِ کلی یی که بر یک کلاف ِ دلبخاه تعریف میشوند هم برقرار است. (2106) برقرار است اگر پیچش صفر باشد. (2885) برقرار است اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد. (2902) برقرار است اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد. در واقع (2902) نتیجه یِ (2028) و (2106) و (2885) است.

از تقارنها یِ تانسر ِ ریمان (رابطِها یِ جبری یی که بین ِ مئلفِها یِ تانسر ِ ریمان برقرار است) رابطِها یی جبری برا یِ تارَد ِ خمش و تانسر ِ ریچی به دست میئاید. اگر هموستار با شبه- ِ-متریک

سازگار باشد، (2885) برقرار است. در نتیجه تارَد ِ خمش صفر میشود.

$$\grave{\boldsymbol{R}} = 0. \tag{2903}$$

از این که تارَد ِ خمش وقت ی هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد صفر است، نتیجه میشود وقت ی هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد مُضعَن یک عنصر- ِ-حجم هست که هموستار با آن سازگار است: شرط ِ وجود ِ چنین عنصر- ِ-حجم ی این بود که رد ِ هموستار بسته باشد، یعنی رد ِ مشتق ِ برونی یِ هموستار صفر باشد، یا تارَد ِ خمش صفر باشد. قبلَن دیده شد هموستار ی که با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، با عنصر- ِ-حجم ِ سازگار با شبه- ِ-متریک هم سازگار است.

با استفاده از (2903)، رابطه یِ

$$\mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j} + \grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j} \tag{2123}$$

میشود

$$\mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^i{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^i{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^i{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^n{}_{l\,j}. \tag{2904}$$

اگر علاوه بر این که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است، پیچش هم صفر باشد، یعنی اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا صفر میشود. به این ترتیب، برا یِ یک هموستار ِ لِوی-چیویتا،

$$\mathsf{R}_{j\,i} = \mathsf{R}_{i\,j}, \tag{2905}$$

یعنی تانسر ِ ریچی متقارن میشود.

وقت یِ خمینه دُ-فرمدار باشد، با استفاده از دُ-فرم میشود دُ تا از شاخصها یِ دوم و سوم و چهارم را هم با هم ادغام کرد. تانسر ِ ریمان نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم پادمتقارن است. پس اگر دُ-فرم متقارن باشد (از جمله اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی باشد)، نتیجه یِ ادغام ِ شاخصها یِ سوم و چهارم صفر است:

$$g^{k\,l}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = 0. \tag{2906}$$

اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی و هموستار سازگار با متریک باشد، ادغام ِ شاخص ِ دوم ِ تانسر ِ ریمان با شاخص ِ سوم یا چهارم ِ تانسر ِ ریمان چیز ی مستقل از تانسر ِ ریچی نمیدهد:

$$g^{j\,k}\,\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = -\mathsf{R}^{i}{}_{l},$$
$$g^{j\,l}\,\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = \mathsf{R}^{i}{}_{k}. \tag{2907}$$

به این ترتیب وقت ی هموستار سازگار با شبه- ِ-متریک است، فقط یک ادغام-شده یِ مستقل ِ تانسر ِ ریمان هست، که آن هم تانسر ِ ریچی ست. این تانسر هم، اگر پیچش صفر باشد متقارن است. یعنی تانسر ِ ریچی، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد متقارن است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. یک خمش ِ سازگار با شبه- ِ-متریک را میشود بر حسب ِ خمش ِ لِوی-چیویتا و تانسر ِ پیچش یا همپیچش نوشت:

$$[\boldsymbol{\Gamma}(e)]^{i}{}_{j\,k} = [\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e)]^{i}{}_{j\,k} + \boldsymbol{K}^{i}{}_{j\,k}. \tag{2782}$$

به این ترتیب رابطه یِ

$$(\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)^{i}{}_{j} = \mathbf{d}\,\boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{j} + \boldsymbol{\Gamma}_1{}^{i}{}_{k} \wedge \boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{k} \wedge \boldsymbol{\Gamma}_1{}^{k}{}_{j} + \boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{k} \wedge \boldsymbol{\Theta}^{k}{}_{j} \tag{2058}$$

میشود

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j} + \mathbf{d}\,\boldsymbol{K}^{i}{}_{j} + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{i}{}_{k} \wedge \boldsymbol{K}^{j}{}_{k} + \boldsymbol{K}^{i}{}_{k} \wedge \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{k}{}_{j} + \boldsymbol{K}^{i}{}_{k} \wedge \boldsymbol{K}^{k}{}_{j}. \tag{2908}$$

$\{(i, e_i) \mid i\}$ را یک میدان-پایه یِ مختصاتی، و $\{(i, e^i) \mid i\}$ را دُگان َش میگیرم. بر حسب ِ اینها، رابطه یِ بالا میشود

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j} + [(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{1\,m}\boldsymbol{K}_n)^{i}{}_{j} + \boldsymbol{K}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{K}^{k}{}_{n\,j}]e^m \wedge e^n, \tag{2909}$$

یا

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,m\,n} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j\,m\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{m}\,\boldsymbol{K}_n)^{i}{}_{j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{n}\,\boldsymbol{K}_m)^{i}{}_{j}$$
$$+ \boldsymbol{K}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{K}^{k}{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^{i}{}_{n\,k}\,\boldsymbol{K}^{k}{}_{m\,j}. \tag{2910}$$

$$\boldsymbol{R}_{m\,n} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{m\,n} + \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K}_n - \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n \boldsymbol{K}_m + \boldsymbol{K}_m \boldsymbol{K}_n - \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{K}_m. \tag{2911}$$

همچنین، از

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} = (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K}_n)^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^k{}_{m\,n} \boldsymbol{K}^i{}_{k\,j} \tag{2912}$$

و این که $\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}$ نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم َش متقارن است (هموستار ِ لِوی-چیویتا پیچش َش صفر است)، دیده میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_j = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^i{}_j + [(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} + \boldsymbol{K}^i{}_{m\,k} \boldsymbol{K}^k{}_{n\,j}] e^m \wedge e^n. \tag{2913}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R}^i{}_{j\,m\,n} &= \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,m\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n \boldsymbol{K})^i{}_{m\,j} \\ &\quad + \boldsymbol{K}^i{}_{m\,k} \boldsymbol{K}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k} \boldsymbol{K}^k{}_{m\,j}. \end{aligned} \tag{2914}$$

$$\boldsymbol{R}_{m\,n} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{m\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})_n - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n \boldsymbol{K})_m + \boldsymbol{K}_m \boldsymbol{K}_n - \boldsymbol{K}_n \boldsymbol{K}_m. \tag{2915}$$

$$\boldsymbol{R} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})_n e^m \wedge e^n + \boldsymbol{K} \wedge \boldsymbol{K}, \tag{2916}$$

رابطِها یِ (2913) تا (2916)، هر چند برا یِ یک میدان-پایه یِ مختصاتی به دست آمدند مستقل از میدان-پایه درست َند، چون دُ-طرف ِ هر یک بر حسب ِ تانسرها یِ مستقل از میدان-پایه نوشته شده.

تارَد- ِ-خمش و تانسر- ِ-ریچی یِ حاصل از هموستار ِ لِوی-چیویتا را، به ترتیب، تارَد- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا و تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا مینامم، و آنها را با، به ترتیب، $\grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}}$ و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$ نشان میدهم. از (2914) دیده میشود

$$\begin{aligned} \grave{\boldsymbol{R}}_{m\,n} &= \grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}}_{m\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_m \boldsymbol{K})^i{}_{n\,i} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n \boldsymbol{K})^i{}_{m\,i} \\ &\quad + \boldsymbol{K}^i{}_{m\,k} \boldsymbol{K}^k{}_{n\,i} - \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k} \boldsymbol{K}^k{}_{m\,i}, \end{aligned} \tag{2917}$$

که نتیجه میدهد

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{m\,n} = \grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}}_{m\,n}. \tag{2918}$$

در واقع دُ-طرف صفر ند، که این هم ان (2903) است:

$$\grave{\boldsymbol{R}} = \grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}},$$
$$= 0. \tag{2919}$$

برا یِ تانسر ِ ریچی هم، با ادغام ِ شاخصها یِ i و m در (2914)،

$$\mathsf{R}_{j\,n} = \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n\,\boldsymbol{K})^i{}_{i\,j}$$
$$+ \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j}. \tag{2920}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathsf{R}_{j\,n} - \mathsf{R}_{n\,j} = (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^i{}_{j\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_j\,\boldsymbol{K})^i{}_{i\,n} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n\,\boldsymbol{K})^i{}_{i\,j}$$
$$+ \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{j\,n}$$
$$- \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j} + \boldsymbol{K}^i{}_{j\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,n}, \tag{2921}$$

که در آن این به کار رفته که تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا متقارن است:

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}_{n\,j} = \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,n}. \tag{2922}$$

تقارن ِ تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا هم ان (2905) است. رابطه یِ

$$\mathsf{R}_{j\,n} - \mathsf{R}_{n\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^i{}_{i\,n} - (\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{T})^i{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{T})^i{}_{n\,j} + \boldsymbol{T}^i{}_{m\,i}\,\boldsymbol{T}^m{}_{n\,j} \tag{2904}$$

را میشود بر حسب ِ همپیچش نوشت:

$$\mathsf{R}_{j\,n} - \mathsf{R}_{n\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_j\boldsymbol{K})^i{}_{i\,n} - (\boldsymbol{\nabla}_n\boldsymbol{K})^i{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\boldsymbol{\nabla}_i\boldsymbol{K})^i{}_{j\,n}$$
$$- \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}(\boldsymbol{K}^m{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^m{}_{j\,n}),$$

$$
\begin{aligned}
&= (\underset{\circ}{\nabla}_j \boldsymbol{K})^i{}_{i\,n} - (\underset{\circ}{\nabla}_n \boldsymbol{K})^i{}_{i\,j} + (\underset{\circ}{\nabla}_i \boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\nabla}_i \boldsymbol{K})^i{}_{j\,n} \\
&\quad - \boldsymbol{K}^m{}_{j\,n}\,\boldsymbol{K}^i{}_{i\,m} + \boldsymbol{K}^m{}_{n\,j}\,\boldsymbol{K}^i{}_{i\,m} \\
&\quad + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}\,\boldsymbol{K}^m{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^m{}_{i\,n}\,\boldsymbol{K}^i{}_{m\,j} - \boldsymbol{K}^m{}_{i\,j}\,\boldsymbol{K}^i{}_{n\,m} \\
&\quad - \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}\,\boldsymbol{K}^m{}_{j\,n} + \boldsymbol{K}^m{}_{i\,j}\,\boldsymbol{K}^i{}_{m\,n} + \boldsymbol{K}^m{}_{i\,n}\,\boldsymbol{K}^i{}_{j\,m} \\
&\quad - \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}(\boldsymbol{K}^m{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^m{}_{j\,n}), \\
&= (\underset{\circ}{\nabla}_j \boldsymbol{K})^i{}_{i\,n} - (\underset{\circ}{\nabla}_n \boldsymbol{K})^i{}_{i\,j} + (\underset{\circ}{\nabla}_i \boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\nabla}_i \boldsymbol{K})^i{}_{j\,n} \\
&\quad - \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}\,\boldsymbol{K}^m{}_{j\,n} + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,m}\,\boldsymbol{K}^m{}_{n\,j} \\
&\quad - \boldsymbol{K}^m{}_{i\,j}\,\boldsymbol{K}^i{}_{n\,m} + \boldsymbol{K}^m{}_{i\,n}\,\boldsymbol{K}^i{}_{j\,m},
\end{aligned}
\tag{2923}
$$

که هم ان (2921) است.

پیچش ِ متناظر با هموستار ِ لِوی-چیوتا صفر است. پس این گزارِها همئرز َند:

- خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g)$ لِوی-چیویتا-تخت است.

- خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g)$ مُضعَن یک میدان-پایه یِ مختصاتی دارد که هموستار- ِ-لِوی-چیویتا یِ متناظر با آن صفر است.

البته اگر تخت-بودن در یک همسایگی یِ باز از نقطه یِ x_0 برقرار باشد هم یک نقشه یِ ϕ با دامنه ای شامل ِ x_0 هست که هموستار- ِ-لِوی-چیویتا یِ متناظر با e (میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ) صفر است. صفر-بودن ِ این هموستار ِ لِوی-چیویتا همئرز است با

$$
\mathbf{D}(e_i \cdot e_j) = 0, \tag{2737}
$$

که یعنی

$$
\mathbf{D}\, g_{i\,j} = 0. \tag{2924}
$$

پس وقت ی خمش ِ لِوی-چیویتا صفر است، یک نقشه یِ ϕ هست که مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نقشه صفر َند. البته میشود نقشه را چنان گرفت که مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک قطری هم باشند. در واقع اگر Λ یک تابع ِ تغییر- ِ-پایه در $\mathrm{T}_{x_0}\mathbb{M}$ باشد،

$$g_{i'\,j'}(x_0) = \Lambda^k{}_i\,\Lambda^l{}_j\,[g_{k\,l}(x_0)]. \tag{2925}$$

نقشه یِ ϕ' را چنین تعریف میکنم.

$$(\phi')^i(x) = (\Lambda^{-1})^i{}_j\,[\phi^j(x)], \tag{2926}$$

که Λ به x بستِگی ندارد. دیده میشود که (2925) از (2926) نتیجه میشود.

71 اسکالر ِ خمش و تانسر ِ اَینشتَین

اتحاد ِ دوم ِ بیانکی این است.

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,m\,n} + (\boldsymbol{\nabla}_m\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,n\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,l\,m}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,m}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{m\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{T}^k{}_{n\,l}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,m}.\end{aligned} \tag{2927}$$

با ادغام ِ شاخصها یِ i و m نتیجه میشود

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,i\,n} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,n\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})^i{}_{j\,l\,i}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,i}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{i\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{T}^k{}_{n\,l}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,i}.\end{aligned} \tag{2928}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. رابطه یِ بالا را با $g^{j\,l}$ ادغام میکنم:

$$\begin{aligned}0 &= (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{R})^{i\,l}{}_{i\,n} + (\boldsymbol{\nabla}_i\,\boldsymbol{R})^{i\,l}{}_{n\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_n\,\boldsymbol{R})^{i\,l}{}_{l\,i}\\ &\quad + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,i}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_{k\,n} + \boldsymbol{T}^k{}_{i\,n}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^k{}_{n\,l}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_{k\,i}.\end{aligned} \tag{2929}$$

از این که هموستار با شبه-ِ-متریک سازگار است، نتیجه میشود در طرفِ راست، جمله یِ دوم با جمله یِ اول برابر است. در واقع هر-دُ را میشود بر حسبِ مشتقِ تانسرِ ریچی نوشت. به هم ین ترتیب، جملِها یِ پنجم و ششم هم برابرِ هم َند و میشود آنها را بر حسبِ تانسرِ ریچی نوشت. نتیجه میشود

$$2\,(\boldsymbol{\nabla}_l\,\mathsf{R})^l{}_n - (\boldsymbol{\nabla}_n\,\mathsf{R})^i{}_i + 2\,\boldsymbol{T}^k{}_{l\,n}\,\mathsf{R}^l{}_k + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,i}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_{k\,n} = 0. \tag{2930}$$

اسکالرِ خمش را با $\mathcal{R}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \mathsf{R}^j{}_j,\\ &= g^{i\,j}\,\mathsf{R}_{i\,j}.\end{aligned} \tag{2931}$$

به این ترتیب، (2930) میشود

$$2\,(\boldsymbol{\nabla}_l\,\mathsf{R})^l{}_n - (\boldsymbol{\nabla}_n\,\mathcal{R}) + 2\,\boldsymbol{T}^k{}_{l\,n}\,\mathsf{R}^l{}_k + \boldsymbol{T}^k{}_{l\,i}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_{k\,n} = 0, \tag{2932}$$

تانسرِ اَینشتَین را با G نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{G}^{i\,j} = \mathsf{R}^{i\,j} - \frac{1}{2}\,g^{i\,j}\,\mathcal{R}. \tag{2933}$$

به این ترتیب،

$$(\boldsymbol{\nabla}_l\,\mathsf{G})^{l\,n} = -2\,\boldsymbol{T}^k{}_l{}^n\,\mathsf{R}^l{}_k - \boldsymbol{T}^k{}_{l\,i}\,\boldsymbol{R}^{i\,l}{}_k{}^n. \tag{2934}$$

اسکالرِ خمش و تانسرِ اَینشتَین را میشود برا یِ هر هموستار ی در یک خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی تعریف کرد، لازم نیست هموستار با شبه-ِ-متریک سازگار باشد. اما (2934) وقت ی برقرار است که هموستار با شبه-ِ-متریک سازگار باشد. اگر هموستار علاوه بر این که با شبه-ِ-متریک سازگار است بدونِ پیچش هم باشد، طرفِ راستِ (2934) صفر میشود. اسکالر-ِ-خمش و تانسر-ِ-اَینشتَین متناظر با یک هموستارِ لِوی-چیویتا را به ترتیب اسکالر-ِ-خمشِ لِوی-چیویتا و تانسر-ِ-اَینشتَینِ لِوی-چیویتا مینامم و آنها را با، به ترتیب، $\underset{\circ}{\mathcal{R}}$ و $\underset{\circ}{\mathsf{G}}$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\underset{\circ}{\mathsf{G}})^{l\,n} = 0. \tag{2935}$$

اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، تانسر ِ ریچی متقارن است، که نتیجه میدهد تانسر ِ اَینشتَین هم متقارن است. پس،

$$\underset{\circ}{\mathsf{G}}^{j\,i} = \underset{\circ}{\mathsf{G}}^{i\,j}. \tag{2936}$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست که هموستار َش با شبه- ِ-متریک سازگار است. از رابطه یِ تانسر ِ ریچی با تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_{j\,n} &= \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n\,\boldsymbol{K})^i{}_{i\,j}\\ &\quad + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j},\end{aligned} \tag{2920}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \underset{\circ}{\mathcal{R}} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^{i\,j}{}_j - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_j\,\boldsymbol{K})^i{}_i{}^j + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^{k\,j}{}_j - \boldsymbol{K}^{i\,j}{}_k\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j},\\ &= \underset{\circ}{\mathcal{R}} + 2\,(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^{i\,j}{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^{k\,j}{}_j - \boldsymbol{K}^{i\,j}{}_k\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j}.\end{aligned} \tag{2937}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathsf{G}_{j\,n} &= \underset{\circ}{\mathsf{G}}_{j\,n} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i\,\boldsymbol{K})^i{}_{n\,j} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_n\,\boldsymbol{K})^i{}_{i\,j}\\ &\quad + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{n\,j} - \boldsymbol{K}^i{}_{n\,k}\,\boldsymbol{K}^k{}_{i\,j}\\ &\quad - \frac{1}{2}\,g_{i\,j}[2\,(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\boldsymbol{K})^{l\,n}{}_n + \boldsymbol{K}^l{}_{l\,k}\,\boldsymbol{K}^{k\,n}{}_n - \boldsymbol{K}^{l\,n}{}_k\,\boldsymbol{K}^k{}_{l\,n}].\end{aligned} \tag{2938}$$

رابطه یِ تعریف-کننده یِ تانسر ِ اَینشتَین، رابطه یِ (2933)، را با $g_{i\,j}$ ادغام میکنم. با تعریف ِ $\mathcal{G}$ (رد ِ تانسر ِ اَینشتَین) با

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \mathsf{G}^i{}_i,\\ &= g_{i\,j}\,\mathsf{G}^{i\,j}.\end{aligned} \tag{2939}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \mathcal{R} - \frac{1}{2}\,g_{i\,j}\,g^{i\,j}\,\mathcal{R},\\ &= \left(1 - \frac{m}{2}\right)\,\mathcal{R},\end{aligned} \tag{2940}$$

که m بُعدِ خمینه است. اگر m برابر با 2 نباشد، از این رابطه میشود اسکالرِ خمش را بر حسبِ $\mathcal{G}$ حساب کرد:

$$\mathcal{R} = \frac{2}{2-m}\,\mathcal{G}. \tag{2941}$$

به این ترتیب، میشود تانسرِ ریچی را بر حسبِ تانسرِ اَینشتَین حساب کرد:

$$\mathsf{R}^{i\,j} = \mathsf{G}^{i\,j} - \frac{1}{m-2}\,g^{i\,j}\,\mathcal{G}. \tag{2942}$$

از رابطه یِ تعریف-کننده یِ تانسرِ اَینشتَین ضمنَن دیده میشود

$$\mathsf{G}^{j\,i} - \mathsf{G}^{i\,j} = \mathsf{R}^{j\,i} - \mathsf{R}^{i\,j}. \tag{2943}$$

یعنی بخشِ پادمتقارنِ تانسرِ اَینشتَین با بخشِ پادمتقارنِ تانسرِ ریچی برابر است. از جمله اگر تانسرِ ریچی متقارن باشد تانسرِ اَینشتَین هم متقارن است.

میگویم خمینه (در یک نقطه یا ناحیه) اسکالر-تخت است، اگر اسکالرِ خمش (در آن نقطه یا ناحیه) صفر شود. رُشن است که ریچی-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) اسکالر-تخت-بودن (در آن نقطه یا ناحیه) را نتیجه میدهد. همچنین ریمان-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) اسکالر-تخت-بودن (در آن نقطه یا ناحیه) را نتیجه میدهد. و باز رُشن است که از ریچی-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) نتیجه میشود تانسرِ اَینشتَین (در آن نقطه یا ناحیه) صفر است. و البته از ریمان-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) هم نتیجه میشود تانسرِ اَینشتَین (در آن نقطه یا ناحیه) صفر است.

72 تغییرِ همدیسِ شبه-ِ-متریک

$\mathbb{M}$ یک خمینه و g یک شبه-ِ-متریک بر آن است. میگویم شبه-ِ-متریکِ g' نسبت به شبه-ِ-متریکِ g همدیس است، اگر g' حاصل-ِ-ضربِ یک میدانِ اسکالرِ مثبت در g باشد: g' نسبت به g همدیس است اگر یک میدانِ اسکالرِ Σ باشد که

$$g' = [\exp(2\,\Sigma)]g, \tag{2944}$$

یعنی

$$g'_{i\,j} = [\exp(2\,\Sigma)]g_{i\,j}, \tag{2945}$$

تبدیل-کردن ِ شبه- ِ-متریک ِ g به یک شبه- ِ-متریک ِ همدیس نسبت به g را یک تغییر ِ همدیس ِ شبه‌متریک ِ g مینامم. به $[\exp(\Sigma)]$ ضریب ِ تغییر- ِ-مقیاس (از g به g') میگویم. رُشن است که همدیس-بودن یک رابطه یِ همئرزی ست. همچنین، رُشن است که

$$g'^{i\,j} = [\exp(-2\,\Sigma)]g^{i\,j}, \tag{2946}$$

که

$$g'^{i\,j}\,g'_{k\,j} = \delta^i_j. \tag{2947}$$

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست و g یک شبه- ِ-متریک بر $\mathbb{M}$ است. g' نسبت به g همدیس است و ضریب ِ تغییر- ِ-مقیاس (از g به g') برابر ِ $[\exp(\Sigma)]$ است. کمیتها یی که بر اساس ِ g' ساخته میشوند را با پریم نشان میدهم. e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست. هموستار ِ لِوی-چیویتا متناظر با g چنین میشود.

$$[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} = \frac{1}{2}\,g^{m\,i}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,m} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,m} - \mathbf{D}_m\,g_{j\,k}). \tag{2785}$$

از اینجا،

$$[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}'(e)]^i{}_{j\,k} = [\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k} + \delta^i{}_k\,\mathbf{D}_j\,\Sigma + \delta^i{}_j\,\mathbf{D}_k\,\Sigma - g^{n\,i}\,g_{j\,k}\,\mathbf{D}_n\Sigma. \tag{2948}$$

تانسر ِ همپیچش ($\boldsymbol{K}$) به تانسر ِ پیچش ($\boldsymbol{T}$) و شبه- ِ-متریک بستِگی دارد. اما خُد ِ پیچش (با مئلفِها یِ $\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}$) مستقل از شبه- ِ-متریک است:

$$\boldsymbol{T}'^i{}_{j\,k} = \boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}. \tag{2949}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}'^{i}_{j\,k} &= g'_{j\,l}\, g'^{n\,i}\, \boldsymbol{T}'^{l}{}_{n\,k},\\ &= g'_{j\,l}\, g'^{n\,i}\, \boldsymbol{T}^{l}{}_{n\,k},\\ &= \{[\exp(2\,\Sigma)]\, g_{j\,l}\}\,\{[\exp(-2\,\Sigma)]\, g^{n\,i}\}\, \boldsymbol{T}^{l}{}_{n\,k},\end{aligned} \tag{2950}$$

که نشان میدهد

$$\boldsymbol{T}'^{i}_{j\,k} = \boldsymbol{T}_{j}{}^{i}{}_{k}. \tag{2951}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{K}'^{i}{}_{j\,k} = \boldsymbol{K}^{i}{}_{j\,k}. \tag{2952}$$

از (2948) و (2952) دیده میشود برا یِ هموستارها یِ سازگار با شبه-ِ-متریک

$$[\boldsymbol{\Gamma}'(e)]^{i}{}_{j\,k} = [\boldsymbol{\Gamma}(e)]^{i}{}_{j\,k} + \delta^{i}_{k}\,\mathbf{D}_{j}\,\Sigma + \delta^{i}_{j}\,\mathbf{D}_{k}\,\Sigma - g^{n\,i}\, g_{j\,k}\,\mathbf{D}_{n}\,\Sigma. \tag{2953}$$

تفاضلِ دُ هموستار به میدان-پایه بستِگی ندارد. پس یک تانسرِ $\boldsymbol{\Theta}$ (مستقل از میدان-پایه) هست که

$$\boldsymbol{\Gamma}'(e) = \boldsymbol{\Gamma}(e) + \boldsymbol{\Theta}. \tag{2954}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{j\,k} = \delta^{i}_{k}\,\mathbf{D}_{j}\,\Sigma + \delta^{i}_{j}\,\mathbf{D}_{k}\,\Sigma - g^{n\,i}\, g_{j\,k}\,\mathbf{D}_{n}\,\Sigma, \tag{2955}$$

و البته این رابطه مستقل از میدان-پایه برقرار است. به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\Theta}^{i}{}_{k} = \delta^{i}_{k}\,\mathbf{d}\,\Sigma + (\mathbf{D}_{k}\,\Sigma)e^{i} - g^{n\,i}\, g_{j\,k}(\mathbf{D}_{n}\,\Sigma)e^{j}. \tag{2956}$$

$\boldsymbol{\Theta}$ به شبه-ِ-متریک (g) و Σ بستِگی دارد، و به پیچش بستِگی ندارد. به این ترتیبِ تغییرِ هموستارِ لِوی-چیویتا تحتِ یک تغییرِ همدیسِ شبه-ِ-متریک هم مثلِ (2954) است: (2948) یعنی

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}'(e) = \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}(e) + \boldsymbol{\Theta}. \tag{2957}$$

برا یِ خمش، رابطه یِ

$$\boldsymbol{R}^i{}_j = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_j + \mathbf{d}\,\boldsymbol{K}^i{}_j + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^j{}_k + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^k{}_j \tag{2908}$$

را چنین مینویسم.

$$\boldsymbol{R}^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_j = \mathbf{d}\,\boldsymbol{K}^i{}_j + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^j{}_k + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^k{}_j. \tag{2958}$$

رابطه یِ مشابه برا یِ کمیتها یِ پریمدار هم میشود

$$\boldsymbol{R}'^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}'^i{}_j = \mathbf{d}\,\boldsymbol{K}^i{}_j + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}'^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^k{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}'^k{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge \boldsymbol{K}^k{}_j. \tag{2959}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{R}'^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}'^i{}_j = \boldsymbol{R}^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_j + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}'^i{}_k - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_k) \wedge \boldsymbol{K}^j{}_k + \boldsymbol{K}^i{}_k \wedge (\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}'^k{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_j), \tag{2960}$$

یا

$$\boldsymbol{R}'^i{}_j - \boldsymbol{R}^i{}_j = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}'^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_j + \boldsymbol{\Theta}^i{}_n \wedge \boldsymbol{K}^n{}_j + \boldsymbol{K}^i{}_n \wedge \boldsymbol{\Theta}^n{}_j. \tag{2961}$$

$$\boldsymbol{R}'^i{}_{j\,k\,l} - \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}'^i{}_{j\,k\,l} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{k\,n}\,\boldsymbol{K}^n{}_{l\,j} + \boldsymbol{K}^i{}_{k\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^n{}_{l\,j}. \tag{2962}$$

از جمله دیده میشود

$$\mathsf{R}'_{j\,l} - \mathsf{R}_{j\,l} = \underset{\circ}{\mathsf{R}}{}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}{}_{j\,l} + \boldsymbol{\Theta}^i{}_{i\,n}\,\boldsymbol{K}^n{}_{l\,j} + \boldsymbol{K}^i{}_{i\,n}\,\boldsymbol{\Theta}^n{}_{l\,j}. \tag{2963}$$

$$\grave{\boldsymbol{R}}' - \grave{\boldsymbol{R}} = \underset{\circ}{\grave{\boldsymbol{R}}}{}' - \underset{\circ}{\grave{\boldsymbol{R}}}. \tag{2964}$$

البته تارَد ِ خمش صفر است. با استفاده از (2956) دیده میشود

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}^i{}_n \wedge \boldsymbol{\Theta}^n{}_j + \boldsymbol{\Theta}^i{}_n \wedge \boldsymbol{K}^n{}_j,\\
&= \boldsymbol{K}^i{}_n \wedge [\delta^n_j\,\mathbf{d}\,\Sigma + (\mathbf{D}_j\,\Sigma)e^n - g^{l\,n}\,g_{p\,j}(\mathbf{D}_l\,\Sigma)e^p]\\
&\quad + [\delta^i_n\,\mathbf{d}\,\Sigma + (\mathbf{D}_n\,\Sigma)e^i - g^{l\,i}\,g_{p\,n}(\mathbf{D}_l\,\Sigma)e^p] \wedge \boldsymbol{K}^n{}_j,\\
&= (\mathbf{D}_j\,\Sigma)\boldsymbol{K}^i{}_n \wedge e^n - g^{l\,i}\,g_{p\,n}(\mathbf{D}_l\,\Sigma)e^p \wedge \boldsymbol{K}^n{}_j\\
&\quad + (\mathbf{D}_n\,\Sigma)e^i \wedge \boldsymbol{K}^n{}_j - g^{l\,n}\,g_{p\,j}(\mathbf{D}_l\,\Sigma)\boldsymbol{K}^i{}_n \wedge e^p.
\end{aligned} \tag{2965}$$

از (2956) ضمنَن نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathbf{\Theta}^i{}_i &= \delta^i_i\,\mathbf{d}\,\Sigma + (\mathbf{D}_i\,\Sigma)e^i - g^{n\,i}\,g_{j\,i}(\mathbf{D}_n\,\Sigma)e^j,\\ &= m\,\mathbf{d}\,\Sigma + \mathbf{d}\,\Sigma - \mathbf{d}\,\Sigma,\\ &= m\,\mathbf{d}\,\Sigma. \end{aligned}\tag{2966}$$

پس

$$\mathbf{d}\,\mathbf{\Theta}^i{}_i = 0,\tag{2967}$$

که نتیجه میدهد

$$\grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}}' = \grave{\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}}.\tag{2968}$$

$$\grave{\boldsymbol{R}}' = \grave{\boldsymbol{R}}.\tag{2969}$$

البته تارَدِ خمش صفر است. همچنین،

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^i{}_j &= \mathbf{d}\,\mathbf{\Theta}^i{}_j + \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j + \mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_j + \mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j,\\ &= (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\mathbf{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l \wedge e^n + \mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j, \end{aligned}\tag{2970}$$

که برابری یِ دوم هم ان (2068) است. دیده میشود

$$\begin{aligned}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\mathbf{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l \wedge e^n &= \delta^i_j(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_n\,\Sigma - \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_{l\,n}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma)e^l \wedge e^n\\ &\quad + \delta^i_n(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,\Sigma - \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_{l\,j}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma)e^l \wedge e^n\\ &\quad - g^{p\,i}\,g_{n\,j}(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_p\,\Sigma - \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_{l\,p}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma)e^l \wedge e^n, \end{aligned}\tag{2971}$$

که این به کار رفته که مشتقِ هموردا یِ شبه-ِ-متریک (با هموستارِ لِوی-چیویتا) صفر است. هموستارِ لِوی-چیویتا متقارن هم هست. به این ترتیب جمله یِ اولِ طرفِ راست صفر میشود:

$$\begin{aligned}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\mathbf{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l \wedge e^n &= (\mathbf{d}\,\mathbf{D}_j\,\Sigma - \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_j\,\mathbf{D}_k\,\Sigma) \wedge e^i\\ &\quad - g^{p\,i}\,g_{n\,j}(\mathbf{d}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma - \underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}^k{}_p\,\mathbf{D}_k\,\Sigma) \wedge e^n, \end{aligned}\tag{2972}$$

یا

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l\wedge e^n=(\delta^i_n\delta^p_j-g^{p\,i}\,g_{n\,j})(\mathbf{d}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_p\,\mathbf{D}_k\,\Sigma)\wedge e^n. \qquad (2973)$$

سرانجام، با استفاده از

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\,\mathbf{D}_p\,\Sigma-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_p\,\mathbf{D}_k\,\Sigma&=e^l(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_p\,\Sigma-\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^k{}_{l\,p}\,\mathbf{D}_k\,\Sigma),\\&=e^l\,(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{l\,p},\end{aligned} \qquad (2974)$$

نتیجه میشود

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\boldsymbol{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l\wedge e^n=(\delta^i_n\delta^p_j-g^{p\,i}\,g_{n\,j})(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{l\,p}\,e^l\wedge e^n. \qquad (2975)$$

البته مشتق- ِ-هموردا یِ دوم ِ یک میدان ِ اسکالر با یک هموستار ِ لِوی-چیویتا متقارن است:

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{l\,p}=(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{p\,l}. \qquad (2976)$$

همچنین

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}^i{}_k\wedge\boldsymbol{\Theta}^k{}_j&=(\delta^i_k\,\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\boldsymbol{\Theta}^k{}_j+\boldsymbol{\Theta}^i{}_k\wedge(\delta^k_j\,\mathbf{d}\,\Sigma)-(\delta^i_k\,\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\delta^k_j\,\mathbf{d}\,\Sigma)\\&\quad+(\boldsymbol{\Theta}^i{}_k-\delta^i_k\,\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\boldsymbol{\Theta}^k{}_j-\delta^k_j\,\mathbf{d}\,\Sigma),\\&=(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge\boldsymbol{\Theta}^i{}_j+\boldsymbol{\Theta}^i{}_j\wedge(\mathbf{d}\,\Sigma)-\delta^i_j(\mathbf{d}\,\Sigma)\wedge(\mathbf{d}\,\Sigma)\\&\quad+[(\mathbf{D}_k\,\Sigma)e^i-g^{q\,i}\,g_{l\,k}(\mathbf{D}_q\,\Sigma)e^l]\\&\quad\wedge[(\mathbf{D}_j\,\Sigma)e^k-g^{p\,k}\,g_{n\,j}(\mathbf{D}_p\,\Sigma)e^n].\end{aligned} \qquad (2977)$$

در طرف ِ راست ِ برابری یِ اخیر، مجموع ِ دُ-جمله یِ اول صفر است. جمله یِ سوم هم صفر است. از اینجا،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}^i{}_k\wedge\boldsymbol{\Theta}^k{}_j&=[(\mathbf{D}_k\,\Sigma)\,e^i-g^{q\,i}\,g_{l\,k}\,(\mathbf{D}_q\,\Sigma)\,e^l]\wedge[(\mathbf{D}_j\,\Sigma)\,e^k-g^{p\,k}\,g_{n\,j}\,(\mathbf{D}_p\,\Sigma)\,e^n],\\&=(\mathbf{D}_k\,\Sigma)(\mathbf{D}_j\,\Sigma)e^i\wedge e^k-g_{n\,j}\,g^{p\,k}(\mathbf{D}_k\,\Sigma)(\mathbf{D}_p\,\Sigma)e^i\wedge e^n\\&\quad-g^{q\,i}(\mathbf{D}_q\,\Sigma)(\mathbf{D}_j\,\Sigma)g_{l\,k}\,e^l\wedge e^k\\&\quad+g_{n\,j}\,g^{q\,i}(\mathbf{D}_q\,\Sigma)(\mathbf{D}_l\,\Sigma)e^l\wedge e^n.\end{aligned} \qquad (2978)$$

جمله یِ سوم ِ طرف ِ راست ِ برابری یِ اخیر صفر است، چون $g_{l\,k}$ نسبت به l و k متقارن، و $(e^l \wedge e^k)$ نسبت به l و k پادمتقارن است. نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j &= (\mathbf{D}_j\,\Sigma)e^i \wedge \mathbf{d}\,\Sigma \\
&\quad + g_{n\,j}\{g^{q\,i}(\mathbf{D}_q\,\Sigma)\,\mathbf{d}\,\Sigma - [(\mathbf{d}\,\Sigma)\cdot(\mathbf{d}\,\Sigma)]e^i\} \wedge e^n, \\
&= -\delta^i_n\,\delta^p_j(\mathbf{D}_p\,\Sigma)(\mathbf{D}_q\,\Sigma)e^q \wedge e^n \\
&\quad + g^{p\,i}\,g_{n\,j}(\mathbf{D}_p\,\Sigma)(\mathbf{D}_q\,\Sigma)e^q \wedge e^n \\
&\quad - \frac{1}{2}(\delta^i_q\,g_{n\,j} - \delta^i_n\,g_{q\,j})[(\mathbf{d}\,\Sigma)\cdot(\mathbf{d}\,\Sigma)]e^q \wedge e^n, \\
&= -(\delta^i_n\,\delta^p_j - g^{p\,i}\,g_{n\,j})(\mathbf{D}_p\,\Sigma)(\mathbf{D}_q\,\Sigma)e^q \wedge e^n \\
&\quad + \frac{1}{2}\,(\delta^i_n\,\delta^p_j - g^{p\,i}\,g_{n\,j})g_{p\,q}[(\mathbf{d}\,\Sigma)\cdot(\mathbf{d}\,\Sigma)]e^q \wedge e^n.
\end{aligned} \tag{2979}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j &= (\delta^i_n\,\delta^p_j - g^{p\,i}\,g_{n\,j}) \\
&\quad \left[-(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_p\,\Sigma)(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_q\,\Sigma) + \frac{1}{2}\,g_{p\,q}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)\right] e^q \wedge e^n.
\end{aligned} \tag{2980}$$

از ترکیب ِ این با (2975) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
&(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\mathbf{\Theta})^i{}_{n\,j}\,e^l \wedge e^n + \mathbf{\Theta}^i{}_k \wedge \mathbf{\Theta}^k{}_j, \\
&= (\delta^i_n\,\delta^p_j - g^{p\,i}\,g_{n\,j}) \\
&\quad \left[(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{l\,p} - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_p\,\Sigma)(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\Sigma) + \frac{1}{2}\,g_{p\,l}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)\right] e^l \wedge e^n.
\end{aligned} \tag{2981}$$

تعریف میکنم

$$\mathbf{\Sigma}_{l\,p} = -(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)_{p\,l} + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_l\,\Sigma)(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_p\,\Sigma) - \frac{1}{2}\,g_{l\,p}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\Sigma). \tag{2982}$$

دیده میشود $\mathbf{\Sigma}$ متقارن است:

$$\mathbf{\Sigma}_{p\,l} = \mathbf{\Sigma}_{l\,p}. \tag{2983}$$

همچنین،

$$\mathbf{\Sigma}^p{}_p = -\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma - \frac{m-2}{2}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma) \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma), \tag{2984}$$

و

$$\begin{aligned} \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma &= (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma)^p{}_p, \\ &= g^{l\,p}\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma)_{l\,p}, \\ &= \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}}\, \Sigma. \end{aligned} \tag{2985}$$

$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}}$ سیلَپلَسی یی ست که با هموستار ِ لِوی-چیویتا تعریف میشود. به این ترتیب تغییر ِ خمش ِ لوی-چیویتا در اثر ِ یک تغییر ِ همدیس ِ متریک چنین میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^i{}_j - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^i{}_j = (g^{p\,i}\, g_{l\,j} - \delta^i_l\, \delta^p_j)\mathbf{\Sigma}_{p\,k}\, e^k \wedge e^l. \tag{2986}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^i{}_{j\,k\,l} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l} = (g^{p\,i}\, g_{l\,j} - \delta^i_l\, \delta^p_j)\mathbf{\Sigma}_{p\,k} - (g^{p\,i}\, g_{k\,j} - \delta^i_k\, \delta^p_j)\mathbf{\Sigma}_{p\,l}. \tag{2987}$$

پس تغییر ِ تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا در اثر ِ یک تغییر ِ همدیس ِ شبه- ِ-متریک میشود

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l} = g_{j\,l}\, \mathbf{\Sigma}^p{}_p + (m-2)\mathbf{\Sigma}_{j\,l}. \tag{2988}$$

برا یِ اسکالر- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا هم نتیجه میشود

$$[\exp(2\,\Sigma)]\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - \underset{\circ}{\mathcal{R}} = (2\,m-2)\mathbf{\Sigma}^p{}_p. \tag{2989}$$

با ترکیب ِ دُ رابطه یِ اخیر، تغییر ِ تانسر- ِ-اَینشتَین ِ لِوی-چیویتا در اثر ِ یک تغییر ِ همدیس ِ شبه- ِ-متریک به دست میئاید.

$$\underset{\circ}{\mathsf{G}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{G}}_{j\,l} = (m-2)(\mathbf{\Sigma}_{j\,l} - g_{j\,l}\, \mathbf{\Sigma}^p{}_p). \tag{2990}$$

از (2984) و (2985) دیده میشود

$$\mathbf{\Sigma}^p{}_p = -\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma - \frac{m-2}{2}(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma). \tag{2991}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l} &= -(m-2)\underset{\circ}{\nabla}_j\,\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma - g_{j\,l}\,g^{n\,p}\,(\underset{\circ}{\nabla}\,\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)_{p\,n}\\ &\quad + (m-2)[(\underset{\circ}{\nabla}_j\,\Sigma)(\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma) - g_{j\,l}(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)],\\ &= -(m-2)\underset{\circ}{\nabla}_j\,\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma - g_{j\,l}\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma\\ &\quad + (m-2)[(\underset{\circ}{\nabla}_j\,\Sigma)(\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma) - g_{j\,l}(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)].\end{aligned} \tag{2992}$$

$$\begin{aligned}[\exp(2\,\Sigma)]\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - \underset{\circ}{\mathcal{R}} &= -(m-1)[2\,g^{n\,p}\,(\underset{\circ}{\nabla}\,\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)_{p\,n} + (m-2)(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)],\\ &= -(m-1)[2\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma + (m-2)(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)].\end{aligned} \tag{2993}$$

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\mathsf{G}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{G}}_{j\,l} &= (m-2)\Big[-\underset{\circ}{\nabla}_j\,\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma + g_{j\,l}\,g^{n\,p}\,(\underset{\circ}{\nabla}\,\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)_{p\,n}\\ &\quad + (\underset{\circ}{\nabla}_j\,\Sigma)(\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma) + \frac{m-3}{2}\,g_{j\,l}(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\Big],\\ &= (m-2)\Big[-\underset{\circ}{\nabla}_j\,\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma + g_{j\,l}\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma\\ &\quad + (\underset{\circ}{\nabla}_j\,\Sigma)(\underset{\circ}{\nabla}_l\,\Sigma) + \frac{m-3}{2}\,g_{j\,l}\,(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\Big].\end{aligned} \tag{2994}$$

از (2993)، از جمله دیده میشود خمینه یِ $\mathbb{M}$ با شبه-ِ-متریکِ g' اسکالر-تخت است، اگر

$$(m-1)[2\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma + (m-2)(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)] = \underset{\circ}{\mathcal{R}}. \tag{2995}$$

پس متناظر با هر خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g)$، خمینه یِ شبه-ِ-ریمانی یِ $\{\mathbb{M}, [\exp(2\,\Sigma)]\,g\}$ اسکالر-تخت است، به شرطِ آن که ضریبِ تغییر-ِ-مقیاسِ Σ رابطه یِ (2995) را براورَد. همچنین، اگر $(\mathbb{M}, g)$ اسکالر-تخت باشد $\{\mathbb{M}, [\exp(2\,\Sigma)]\,g\}$ هم اسکالر-تخت است، اگر

$$2\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma + (m-2)\,(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma) = 0. \tag{2996}$$

رابطه یِ (2995) در بُعدِ 2 به این شکلِ سادتر در میئاید:

$$\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma = \frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}. \tag{2997}$$

شرط ِ صفر-ماندن ِ اسکالر ِ خمش وقت ی $(\mathbb{M}, g)$ اسکالر-تخت است هم، در بُعد ِ 2 میشود

$$\underset{\circ}{\nabla} \cdot \underset{\circ}{\nabla}\, \Sigma = 0. \tag{2998}$$

73 تانسر ِ وَیل

$\mathbb{M}$ یک خمینه یِ m بُعدی ست و g یک شبه- ِ-متریک بر $\mathbb{M}$ است. g' هم یک شبه- ِ-متریک ِ همدیس نسبت به g است:

$$g' = [\exp(2\,\Sigma)]g. \tag{2944}$$

کمیتها یِ ساخته-شده با g و g' را با نمادها یِ، به ترتیب، بدون ِ پریم و پریمدار نشان میدهم. از

$$[\exp(2\,\Sigma)]\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - \underset{\circ}{\mathcal{R}} = (2\,m-2)\mathbf{\Sigma}^p{}_p, \tag{2989}$$

دیده میشود

$$\mathbf{\Sigma}^p{}_p = \frac{1}{2\,m-2}\{[\exp(2\,\Sigma)]\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - \underset{\circ}{\mathcal{R}}\}, \tag{2999}$$

البته این رابطه وقت ی درست است که بُعد ِ خمینه 1 نباشد. به این ترتیب از

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l} = g_{j\,l}\,\mathbf{\Sigma}^p{}_p + (m-2)\mathbf{\Sigma}_{j\,l}, \tag{2988}$$

نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l} = \frac{1}{2\,m-2}(g'_{j\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - g_{j\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}) + (m-2)\mathbf{\Sigma}_{j\,l}. \tag{3000}$$

از اینجا،

$$\mathbf{\Sigma}_{j\,l} = \frac{1}{m-2}\left[(\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{j\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l}) - \frac{1}{2\,m-2}(g'_{j\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - g_{j\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}})\right]. \tag{3001}$$

این هم وقت ی درست است که بُعد ِ خمینه 1 یا 2 نباشد. (3001) را در

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^{i}{}_{j\,k\,l} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j\,k\,l} = (g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\boldsymbol{\Sigma}_{p\,k} - (g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^i_k\,\delta^p_j)\boldsymbol{\Sigma}_{p\,l} \tag{2987}$$

میگذارم:

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^{i}{}_{j\,k\,l} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{m-2}\Big\{&(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\Big[(\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{p\,k} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{p\,k})\\ &- \frac{1}{2\,m-2}(g'_{p\,k}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - g_{p\,k}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}})\Big]\\ &- (g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^i_k\,\delta^p_j)\Big[(\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{p\,l} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{p\,l})\\ &- \frac{1}{2\,m-2}(g'_{p\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - g'_{p\,l}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}})\Big]\Big\}.\end{aligned} \tag{3002}$$

از

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^{i}{}_{j} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j} = (g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\boldsymbol{\Sigma}_{p\,k}\,e^k \wedge e^l \tag{2986}$$

هم، که شکل ِ بستِتر ِ (2987) است، دیده میشود

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}'^{i}{}_{j} - \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j} = &\frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\\ &\left[(\underset{\circ}{\mathsf{R}}'_{p\,k} - \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{p\,k}) - \frac{1}{2\,m-2}(g'_{p\,k}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}' - g_{p\,k}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}})\right]e^k \wedge e^l.\end{aligned} \tag{3003}$$

برا ی ِ یک هموستار ِ سازگار با شبه- ِ-متریک، تانسر ِ وَیل را با $\boldsymbol{C}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,k\,l} &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}\,(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\left(\mathsf{R}_{p\,k} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,k}\,\mathcal{R}\right)\\ &\quad + \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^i_k\,\delta^p_j)\left(\mathsf{R}_{p\,l} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,l}\,\mathcal{R}\right),\\ &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{k} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{l} + \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l})\\ &\quad + \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^i_k\,g_{j\,l} - \delta^i_l\,g_{j\,k})\mathcal{R}.\end{aligned} \tag{3004}$$

با تعریف ِ

$$\boldsymbol{C}^i{}_j = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{C}^i{}_{j\,k\,l}\,e^k \wedge e^l, \tag{3005}$$

تعریف ِ تانسر ِ وَیل را میشود به این شکل ِ بستِتر ِ نوشت.

$$\boldsymbol{C}^i{}_j = \boldsymbol{R}^i{}_j - \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\left(\mathsf{R}_{p\,k} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,k}\,\mathcal{R}\right)e^k \wedge e^l. \tag{3006}$$

تانسر ِ وَیل ِ متناظر با هموستار ِ لِوی-چیویتا را تانسر- ِ-وَیل ِ لِوی-چیویتا مینامم و آن را با $\underset{\circ}{\boldsymbol{C}}$ نشان میدهم. از (3002) و (3004) نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{C}}'^i{}_{j\,k\,l} = \underset{\circ}{\boldsymbol{C}}^i{}_{j\,k\,l}, \tag{3007}$$

یا بستِتر

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{C}}' = \underset{\circ}{\boldsymbol{C}}. \tag{3008}$$

یعنی تحت ِ یک تغییر ِ همدیس ِ شبه- ِ-متریک، تانسر- ِ-وَیل ِ لِوی-چیویتا تغییر نمیکند. از تعریف ِ تانسر ِ وَیل دیده میشود

$$\boldsymbol{C}^i{}_{j\,l\,k} = -\boldsymbol{C}^i{}_{j\,k\,l}. \tag{3009}$$

$$\boldsymbol{C}_j{}^i{}_{k\,l} = -\boldsymbol{C}^i{}_{j\,k\,l}. \tag{3010}$$

و نیز،

$$\boldsymbol{C}^i{}_{i\,k\,l} = \boldsymbol{R}^i{}_{i\,k\,l}, \tag{3011}$$

یا

$$\boldsymbol{C}^i{}_{i\,k\,l} = \grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l}. \tag{3012}$$

اما چون ِ هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است، تارَد ِ خمش صفر است. پس،

$$\boldsymbol{C}^i{}_{i\,k\,l} = 0. \tag{3013}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,i\,l} &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,i\,l} \\
&\quad - \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^{i}_{l}\,\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,i} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,i}\,\mathcal{R}\right) \\
&\quad + \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{i\,j} - \delta^{i}_{i}\,\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,l} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,l}\,\mathcal{R}\right), \\
&= \mathsf{R}_{j\,l} \\
&\quad - \frac{1}{m-2}\left(g_{j\,l}\,\mathcal{R} - \mathsf{R}_{j\,l} - \frac{m-1}{2\,m-2}\,g_{j\,l}\,\mathcal{R}\right) \\
&\quad + \frac{1}{m-2}\left(\mathsf{R}_{j\,l} - m\,\mathsf{R}_{j\,l} - \frac{1-m}{2\,m-2}\,g_{j\,l}\,\mathcal{R}\right),
\end{aligned} \tag{3014}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,i\,l} = 0. \tag{3015}$$

سرانجام، به ازا ی ِ هر $\mathcal{X}$،

$$(g_{j\,k}\,\mathcal{X}_{l} - g_{j\,l}\,\mathcal{X}_{k}) + (g_{k\,l}\,\mathcal{X}_{j} - g_{k\,j}\,\mathcal{X}_{l}) + (g_{l\,j}\,\mathcal{X}_{k} - g_{l\,k}\,\mathcal{X}_{j}) = 0, \tag{3016}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{C}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{C}^{i}{}_{l\,j\,k} \\
&= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} \\
&\quad + \frac{1}{m-2}[(\delta^{i}_{l}\,\mathsf{R}_{j\,k} - \delta^{i}_{k}\,\mathsf{R}_{j\,l}) + (\delta^{i}_{j}\,\mathsf{R}_{k\,l} - \delta^{i}_{l}\,\mathsf{R}_{k\,j}) + (\delta^{i}_{k}\,\mathsf{R}_{l\,j} - \delta^{i}_{j}\,\mathsf{R}_{l\,k})],
\end{aligned} \tag{3017}$$

یا

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{C}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{C}^{i}{}_{l\,j\,k} \\
&= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} \\
&\quad + \frac{1}{m-2}[\delta^{i}_{j}(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + \delta^{i}_{k}(\mathsf{R}_{l\,j} - \mathsf{R}_{j\,l}) + \delta^{i}_{l}(\mathsf{R}_{j\,k} - \mathsf{R}_{k\,j})].
\end{aligned} \tag{3018}$$

برا ی ِ درستی ی ِ رابطِها ی ِ (3009) تا (3015) و (3018)، لازم نیست هموستار لِوی-چیویتا باشد، سازگاری ی ِ هموستار با شبه- ِ-متریک کافی ست. البته اگر علاوه بر این که هموستار با شبه- ِ-متریک

سازگار است، پیچش هم صفر باشد، طرف ِ راست ِ (3018) صفر میشود. پس،

$$\underset{\circ}{C}^{i}{}_{jkl} + \underset{\circ}{C}^{i}{}_{klj} + \underset{\circ}{C}^{i}{}_{ljk} = 0. \tag{3019}$$

همچنین، به سادِگی دیده میشود

$$\underset{\circ}{C}_{kl}{}^{i}{}_{j} = \underset{\circ}{C}^{i}{}_{jkl}. \tag{3020}$$

تانسر ِ وَیل ویژِگیها یِ تقارن ِ خمش را دارد، اما با ادغام ِ هر دُ-تا از شاخصها یَش صفر میشود. در حال ی که برا یِ تانسر ِ خمش، نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و دوم صفر است (تارَد ِ خمش است، که وقت ی هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است صفر میشود) و نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم تانسر ِ ریچی ست.

میگویم خمینه (در یک نقطه یا ناحیه) وَیل-تخت است، اگر تانسر ِ وَیل (در آن نقطه یا ناحیه) صفر شود. رُشن است که ریمان-تخت-بودن (در یک نقطه یا ناحیه) وَیل-تخت-بودن (در آن نقطه یا ناحیه) را نتیجه میدهد. اما خمینه اگر (در یک نقطه یا ناحیه) وَیل-تخت باشد، (در آن نقطه یا ناحیه) لزومَن ریمان تخت نیست. از تعریف ِ تانسر ِ وَیل دیده میشود اگر تانسر ِ وَیل و تانسر ِ ریچی هر-دُ صفر باشند، آنگاه تانسر ِ ریمان هم صفر است. پس وَیل-تخت-بودن و ریچی-تخت-بودن با هم (در یک نقطه یا ناحیه) ریمان-تخت-بودن (در آن نقطه یا ناحیه) را نتیجه میدهند.

74 پیچش و خمش در بُعدها یِ کوچک

در یک فضا یِ m بُعدی، فضا یِ تانسرها یِ پادمتقارن ِ از نُع ِ r (یعنی با r شاخص، از نُع ِ $(r,0)$ یا $(0,r)$) با فضا یِ تانسرها یِ پادمتقارن ِ از نُع ِ $(m-r)$ یکریخت است. از جمله فضا یِ تانسرها یِ پادمتقارن ِ از نُع ِ m یک-بُعدی ست: همه یِ چنین تانسرها یی با یک تانسر متناسب َند. همچنین، تانسرها یِ پادمتقارن ِ با رتبه یِ بیش از m هم صفر َند. پیچش و خمش هر-دُ نسبت به دُ شاخص ِشان پادمتقارن َند. این تانسرها، در بُعدها یِ کوچک رابطِها یِ جبری یِ اضافی یی را بر میئاورند.

بُعد ِ 1

در این حالت تانسرها یِ پادمتقارن ِ نُع ِ 2 صفر َند. پس پیچش و خمش صفر َند:

$$\boldsymbol{T} = 0. \tag{3021}$$

$$\boldsymbol{R} = 0. \tag{3022}$$

برا یِ این که این رابطِها برقرار باشند، هیچ شرط ی برا یِ هموستار لازم نیست. خُد ِ هموستار هم با فقط یک عدد مشخص میشود: مشتق ِ هر میدان ِ برداری یِ ناصفر متناسب با خُد ِ آن میدان است، که ضریب ِ تناسب هموستار است، و البته میشود میدان ِ برداری را در یک میدان ِ اسکالر ضرب کرد، چنان که مشتق ِ حاصل- ِ-ضرب صفر شود. پس میشود یک میدان-پایه گرفت که مشتق َش صفر است، یعنی میشود هموستار را صفر کرد. در واقع صفر-شدن ِ خمش، حتا خاص ِ خمش ِ خمینه نیست: هر هموستار ی که بر هر کلاف ی با آن خمینه-یِ-پایه بنا شود، خمش َش صفر است، چون در یک خمینه یِ یک-بُعدی دُ-فرم- ِ-دیفرانسیلها صفر َند.

بُعد ِ 2

در این حالت سه-فرم- ِ-دیفرانسیلها صفر َند. پس اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی باشد،

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}\, e^i \wedge e^j \wedge e^k = 0, \tag{3023}$$

که e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس است. با استفاده از رابطه یِ بالا و این که $\boldsymbol{T}$ نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم َش پادمتقارن است، نتیجه میشود

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k} + \boldsymbol{T}_{j\,k\,i} + \boldsymbol{T}_{k\,i\,j} = 0. \tag{3024}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_{i\,j\,k} &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_{j\,i\,k} + \boldsymbol{T}_{k\,i\,j} + \boldsymbol{T}_{i\,j\,k}), \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{T}_{j\,i\,k} - \boldsymbol{T}_{j\,k\,i}), \end{aligned} \tag{3025}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = \boldsymbol{T}_{j\,i\,k}. \tag{3026}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{T}^{i}{}_{l\,n}\, e^{j} \wedge e^{k} + \boldsymbol{T}^{j}{}_{l\,n}\, e^{k} \wedge e^{i} + \boldsymbol{T}^{k}{}_{l\,n}\, e^{i} \wedge e^{j} = 0, \tag{3027}$$

که در آن از این استفاده شده که در دُ-بُعد هر چیز ی که نسبت به سه شاخص (اینجا i و j و k) پادمتقارن باشد صفر است. از رابطه یِ بالا نتیجه میشود

$$\boldsymbol{T}^{i}{}_{j\,k}\, e^{j} \wedge e^{k} + \boldsymbol{T}^{j}{}_{j\,k}\, e^{k} \wedge e^{i} + \boldsymbol{T}^{k}{}_{j\,k}\, e^{i} \wedge e^{j} = 0. \tag{3028}$$

به این ترتیب با تعریف ِ

$$\boldsymbol{T}^{n}{}_{n\,l} =: \mathbf{t}_{l}, \tag{3029}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{T}^{i}{}_{j\,k}\, e^{j} \wedge e^{k} = 2\, \mathbf{t}_{k}\, e^{i} \wedge e^{k}, \tag{3030}$$

و از اینجا،

$$\boldsymbol{T}^{i} = \mathbf{t}_{k}\, e^{i} \wedge e^{k}. \tag{3031}$$

به این ترتیب مئلفِها یِ تانسر ِ پیچش چنین میشوند

$$\boldsymbol{T}^{i}{}_{j\,k} = \delta^{i}_{j}\, \mathbf{t}_{k} - \delta^{i}_{k}\, \mathbf{t}_{j}. \tag{3032}$$

این رابطه برا یِ خمینه ای که لزُومَن شبه- ِ-ریمانی نیست (شبه- ِ-متریک بر آن تعریف نشده) هم درست است. اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی باشد،

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k} = g_{i\,j}\, \mathbf{t}_{k} - g_{i\,k}\, \mathbf{t}_{j}, \tag{3033}$$

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = g_{i\,j}\, \mathbf{t}_{k} - g_{j\,k}\, \mathbf{t}_{i}, \tag{3034}$$

که g شبه- ِ-متریک ِ خمینه است و برا یِ رسیدن به رابطه یِ دوم (3026) به کار رفته. رُشن است که

$$\mathbf{t}_k = g^{i\,j}\,\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}. \tag{3035}$$

اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی و سمتدار باشد، تانسرها یِ پیچش و همپیچش را میشود بر حسب ِ یک همبردار و ε (تانسر ِ لِوی-چیویتا) نوشت. از پادتقارن ِ $\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}$ نسبت به شاخصها یِ j و k، و بعد با استفاده از (3026)، نتیجه میشود یک همبردار ِ $\mathbf{u}$ هست که

$$\boldsymbol{T}_{i\,j\,k} = \varepsilon_{j\,k}\,\mathbf{u}_i. \tag{3036}$$

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = \varepsilon_{i\,k}\,\mathbf{u}_j. \tag{3037}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i &= \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{j\,k}\,\boldsymbol{T}_{i\,j\,k}.\\ &= \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{j\,k}\,\boldsymbol{K}_{j\,i\,k}.\end{aligned} \tag{3038}$$

اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی باشد ولی سمتدار نباشد، رابطِها یِ (3036) تا (3038) مُضعَن درست َند: مُضعَن یک میدان ِ همبرداری یِ $\mathbf{u}$ هست که این رابطِها را بر میئاورَد. سرانجام، به سادِگی دیده میشود

$$\mathbf{t}_i = \varepsilon^k{}_i\,\mathbf{u}_k. \tag{3039}$$

$$\mathbf{u}_i = [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon_i{}^k\,\mathbf{t}_k. \tag{3040}$$

یک راه ِ دیگر برا یِ رسیدن به رابطِها یِ (3032) تا (3040) این است. با استفاده از پادتقارن ِ $\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k}$ نسبت به j و k،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k} &= \delta^l_j\,\delta^n_k\,\boldsymbol{T}^i{}_{l\,n},\\ &= \frac{1}{2}(\delta^l_j\,\delta^n_k - \delta^l_k\,\delta^n_j)\boldsymbol{T}^i{}_{l\,n},\\ &= \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon_{j\,k}\,\varepsilon^{l\,n}\,\boldsymbol{T}^i{}_{l\,n},\\ &=: \varepsilon_{j\,k}\,\mathbf{u}^i.\end{aligned} \tag{3041}$$

این هم ان (3036) است. با (3040) به عنوان ِ تعریف هم نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}^i{}_{j\,k} &= [\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}_{j\,k}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{i\,l}\,\mathbf{t}_l,\\ &= (\delta^i_j\,\delta^l_k - \delta^i_k\,\delta^l_j)\,\mathbf{t}_l,\\ &= \delta^i_j\,\mathbf{t}_k - \delta^i_k\,\mathbf{t}_j,\end{aligned} \tag{3042}$$

که هم ان (3032) است. البته این نتیجه، هر چند برا یِ رسیدن به آن شبه- ِ-متریک و تانسر ِ لِوی-چیویتا به کار رفت، برا یِ خمینِها یی که شبه- ِ-متریک بر آنها تعریف نشده باشد هم برقرار است.

برا یِ تانسر ِ خمش هم، به روش ی مشابه،

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,e^k\wedge e^l + \boldsymbol{R}^k{}_{j\,k\,l}\,e^l\wedge e^i + \boldsymbol{R}^l{}_{j\,k\,l}\,e^i\wedge e^k = 0, \tag{3043}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,e^k\wedge e^l &= 2\,\boldsymbol{R}^k{}_{j\,k\,l}\,e^i\wedge e^l,\\ &= 2\,\mathsf{R}_{j\,l}\,e^i\wedge e^l.\end{aligned} \tag{3044}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k}. \tag{3045}$$

از جمله دیده میشود

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} = \mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}. \tag{3046}$$

در حالت ِ کلی، این نتیجه برقرار میبود اگر پیچش صفر میبود. در دُ-بُعد این نتیجه بدون ِ صفر-بودن ِ پیچش هم برقرار است. به این ترتیب، در دُ-بُعد تانسر ِ خمش و در نتیجه همه یِ چیزها یی که به طُر ِ نقطِئی از آن ساخته میشوند را میشود به طُر ِ نقطِئی از تانسر ِ ریچی ساخت.

اگر خمینه سمتدار باشد، $\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}$ با $\boldsymbol{\varepsilon}_{k\,l}$ متناسب است، که $\boldsymbol{\varepsilon}$ یک عنصر- ِ-حجم است. اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی هم باشد، و $\boldsymbol{\varepsilon}$ تانسر ِ لِوی-چیویتا باشد،

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\boldsymbol{\varepsilon}_{k\,l}\,\boldsymbol{\varepsilon}^{p\,n}\,\boldsymbol{R}^i{}_{j\,p\,n}. \tag{3047}$$

از (3045) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p\,n}\,\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,p\,n} &= \varepsilon^{p\,n}\,(\delta^{i}_{p}\,\mathsf{R}_{j\,n} - \delta^{i}_{n}\,\mathsf{R}_{j\,p}),\\ &= \varepsilon^{i\,n}\,\mathsf{R}_{j\,n} - \varepsilon^{p\,i}\,\mathsf{R}_{j\,p},\\ &= 2\,\varepsilon^{i\,n}\,\mathsf{R}_{j\,n}. \end{aligned} \tag{3048}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon_{k\,l}\,\varepsilon^{i\,n}\,\mathsf{R}_{j\,n}. \tag{3049}$$

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، تانسر ِ خمش نسبت به شاخصها یِ اول و دوم َش هم پادمتقارن است. در این حالت تارَد ِ خمش صفر است، و تانسر ِ ریچی هم متقارن میشود. در حالت ِ کلی، این که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد برا یِ تقارن ِ تانسر ِ ریچی کافی نیست. وقت ی هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است،

$$\mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j} = (\boldsymbol{\nabla}_{j}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_{l}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_{i}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j}. \tag{2904}$$

اما اگر خمینه دُ-بُعدی باشد طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا صفر است. برا یِ دیدن ِ مستقیم ِ این کافی ست توجه شود که در دُ-بُعد (3042) برقرار است. پس

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\nabla}_{j}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_{l}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_{i}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j},\\ &= (\boldsymbol{\nabla}_{j}\,\mathbf{t})_{l} - (\boldsymbol{\nabla}_{l}\,\mathbf{t})_{j} + (\boldsymbol{\nabla}_{l}\,\mathbf{t})_{j} - (\boldsymbol{\nabla}_{j}\,\mathbf{t})_{l} - \mathbf{t}_{n}(\delta^{n}_{l}\,\mathbf{t}_{j} - \delta^{n}_{j}\,\mathbf{t}_{l}),\\ &= -\mathbf{t}_{l}\,\mathbf{t}_{j} + \mathbf{t}_{j}\,\mathbf{t}_{l}, \end{aligned} \tag{3050}$$

که نتیجه میدهد

$$(\boldsymbol{\nabla}_{j}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,l} - (\boldsymbol{\nabla}_{l}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{i\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_{i}\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{n\,i}\,\boldsymbol{T}^{n}{}_{l\,j} = 0. \tag{3051}$$

پس در دُ-بُعد، اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد

$$\mathsf{R}_{j\,i} = \mathsf{R}_{i\,j}. \tag{3052}$$

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، خمش نسبت به شاخصها یِ اول و دوم َش پادمتقارن است. با استفاده از این و رابطه یِ (3045)، رابطه یِ تانسر ِ خمش بر حسب ِ تانسر ِ ریچی، دیده میشود

$$\boldsymbol{R}_{j\,i\,k\,l} = -\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l},$$

$$= -g_{i\,k}\,\mathsf{R}_{j\,l} + g_{i\,l}\,\mathsf{R}_{j\,k}. \tag{3053}$$

با ادغام بر شاخصها یِ j و k،

$$\mathsf{R}_{i\,l} = -\mathsf{R}_{i\,l} + g_{i\,l}\,\mathcal{R}, \tag{3054}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{R}_{i\,j} = \frac{1}{2}\,g_{i\,j}\,\mathcal{R}. \tag{3055}$$

این نتیجه وقت ی برقرار است که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد. در این حالت تانسر ِ خمش را هم میشود بر حسب ِ اسکالر ِ خمش نوشت:

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\,g_{j\,l} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k})\mathcal{R}. \tag{3056}$$

اگر خمینه سمتدار هم باشد این رابطه را میشود بر حسب ِ تانسر ِ لِوی-چیویتا نوشت:

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = [\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i}{}_{j}\,\varepsilon_{k\,l}\,\mathcal{R}. \tag{3057}$$

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، (3055) برقرار است. در این صورت از تعریف ِ تانسر ِ اَینشتَین دیده میشود

$$\mathsf{G}_{i\,j} = 0. \tag{3058}$$

خلاصه، در دُ-بُعد اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، تانسر ِ خمش (و در نتیجه تانسر ِ ریچی) تنها یک مئلفه یِ مستقل دارد و آن هم اسکالر ِ خمش است. همه یِ مئلفِها یِ تانسر ِ خمش بر حسب ِ اسکالر ِ خمش (و البته مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک) به دست میئایند. تارَد ِ خمش و تانسر ِ اَینشتَین هم صفر َند.

بُعد ِ 3

در این حالت همه یِ سه-فرم- ِ-دیفرانسیلها با هم متناسب َند. از جمله اگر خمینه سمتپذیر باشد، همه یِ سه-فرم- ِ-دیفرانسیلها با عنصر- ِ-حجم متناسب َند. همچنین، هر تانسر ِ پادمتقارن ِ نُع ِ 2 را میشود

با یک بردار مشخص کرد. پس اگر خمینه سمتدار و ε یک عنصر ِ حجم باشد، یک تانسر ِ $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ هست که تانسر ِ پیچش بر حسب ِ آن چنین میشود

$$\boldsymbol{T}^{i}{}_{j\,k} = \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,l}\,\varepsilon_{l\,j\,k}, \tag{3059}$$

که e یک میدان-پایه یِ فضا یِ مماس است. رُشن است که اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی و ε تانسر ِ لِوی-چیویتا باشد،

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,l} = \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{l\,j\,k}\,\boldsymbol{T}^{i}{}_{j\,k}. \tag{3060}$$

در چنین حالت ی همپیچش هم بر حسب ِ $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ و تانسر ِ لِوی-چیویتا به دست میئاید:

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,i\,k} + \boldsymbol{\mathcal{U}}_{k}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,i\,j} + \boldsymbol{\mathcal{U}}_{i}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,j\,k}). \tag{3061}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{m\,i\,k}\,\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{m\,i\,k}(\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,i\,k} + \boldsymbol{\mathcal{U}}_{k}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,i\,j} + \boldsymbol{\mathcal{U}}_{i}{}^{l}\,\varepsilon_{l\,j\,k}),\\
&= \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)][2\,\delta^{m}_{l}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{l} + (\delta^{m}_{l}\,\delta^{k}_{j} - \delta^{m}_{j}\,\delta^{k}_{l})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{k}{}^{l} + (\delta^{m}_{l}\,\delta^{i}_{j} - \delta^{m}_{j}\,\delta^{i}_{l})\boldsymbol{\mathcal{U}}_{i}{}^{l}],\\
&= [\mathsf{sgn}(g)](2\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{m} - \delta^{m}_{j}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_{i}{}^{i}).
\end{aligned} \tag{3062}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} &= \delta^{l}_{i}\,\delta^{m}_{k}\,\boldsymbol{K}_{l\,j\,m},\\
&= \frac{1}{2}(\delta^{l}_{i}\,\delta^{m}_{k} - \delta^{m}_{i}\,\delta^{l}_{k})\boldsymbol{K}_{l\,j\,m},\\
&= \frac{1}{2}[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{n\,l\,m}\,\varepsilon_{n\,i\,k}\,\boldsymbol{K}_{l\,j\,m},\\
&= \frac{1}{2}\,\varepsilon_{n\,i\,k}(2\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{n} - \delta^{n}_{j}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_{l}{}^{l}),
\end{aligned} \tag{3063}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{K}_{i\,j\,k} = \varepsilon_{n\,i\,k}\left(\boldsymbol{\mathcal{U}}_{j}{}^{n} - \frac{1}{2}\,\delta^{n}_{j}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_{l}{}^{l}\right). \tag{3064}$$

از این که در سه-بُعد بین ِ فضا یِ دُ-فرم- ِ-دیفرانسیلها و فضا یِ یک-فرم- ِ-دیفرانسیلها یک تناظر ِ یک-به-یک هست دیده میشود در خمینِها یِ سه-بُعدی یِ سمپذیر تانسر ِ ریمان را میشود بر حسب ِ یک تانسر ِ رتبه یِ 3 نوشت:

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^i{}_j{}^m\,\varepsilon_{m\,k\,l}, \tag{3065}$$

که ε یک عنصر ِ حجم است. به ازا یِ هر $\mathcal{X}$،

$$\mathcal{X}_j\,\varepsilon_{k\,l\,m} - \mathcal{X}_k\,\varepsilon_{j\,l\,m} - \mathcal{X}_l\,\varepsilon_{k\,j\,m} - \mathcal{X}_m\,\varepsilon_{k\,l\,j} = 0. \tag{3066}$$

اثبات این است که طرف ِ چپ نسبت به چهار شاخص کاملَن پادمتقارن است، و در سه-بُعد همه یِ چیزها یی که نسبت به چهار شاخص پادمتقارن باشند صفر َند. از این رابطه نتیجه میشود

$$\mathcal{X}_j\,\varepsilon_{k\,l\,m} + \mathcal{X}_k\,\varepsilon_{l\,j\,m} + \mathcal{X}_l\,\varepsilon_{j\,k\,m} = \mathcal{X}_m\,\varepsilon_{j\,k\,l}. \tag{3067}$$

به این ترتیب، از

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^i{}_j{}^m\,\varepsilon_{m\,k\,l} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^i{}_k{}^m\,\varepsilon_{m\,l\,j} + \boldsymbol{\mathcal{V}}^i{}_l{}^m\,\varepsilon_{m\,j\,k}, \tag{3068}$$

این شکل برا یِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی در خمینِها یِ سه-بُعدی یِ سمتپذیر نتیجه میشود

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = \boldsymbol{\mathcal{V}}^i{}_m{}^m\,\varepsilon_{j\,k\,l}, \tag{3069}$$

از مقایسه یِ این با

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = \mathfrak{U}^i{}_{j\,k\,l}, \tag{2887}$$

و

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{U}_{i\,j\,k\,l} + \mathfrak{U}_{j\,k\,i\,l} - \mathfrak{U}_{k\,i\,j\,l},\\
&= \boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + \boldsymbol{R}_{i\,k\,l\,j} + \boldsymbol{R}_{i\,l\,j\,k}\\
&\quad + \boldsymbol{R}_{j\,k\,i\,l} + \boldsymbol{R}_{j\,i\,l\,k} + \boldsymbol{R}_{j\,l\,k\,i}\\
&\quad - \boldsymbol{R}_{k\,i\,j\,l} - \boldsymbol{R}_{k\,j\,l\,i} - \boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j},
\end{aligned}$$

$$= (\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + \boldsymbol{R}_{j\,i\,l\,k}) + (\boldsymbol{R}_{i\,k\,l\,j} - \boldsymbol{R}_{k\,i\,j\,l}) + (\boldsymbol{R}_{j\,k\,i\,l} - \boldsymbol{R}_{k\,j\,l\,i})$$
$$+ (\boldsymbol{R}_{i\,l\,j\,k} + \boldsymbol{R}_{j\,l\,k\,i} - \boldsymbol{R}_{k\,l\,i\,j}),$$
$$= 2\,\boldsymbol{R}_{i\,j\,k\,l} + (-\boldsymbol{R}_{l\,i\,j\,k} - \boldsymbol{R}_{l\,j\,k\,i} + \boldsymbol{R}_{l\,k\,i\,j}), \tag{2890}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{i}{}_{m}{}^{m}\,\varepsilon_{j\,k\,l} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{T})^{i}{}_{j\,k}$$
$$+ \boldsymbol{T}^{i}{}_{m\,l}\,\boldsymbol{T}^{m}{}_{j\,k} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{m\,j}\,\boldsymbol{T}^{m}{}_{k\,l} + \boldsymbol{T}^{i}{}_{m\,k}\,\boldsymbol{T}^{m}{}_{l\,j}. \tag{3070}$$

شکل ِ (3059) برا یِ پیچش را در این رابطه میگذارم. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{i}{}_{m}{}^{m}\,\varepsilon_{j\,k\,l} = (\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,m}\,\varepsilon_{m\,k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,m}\,\varepsilon_{m\,l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,m}\,\varepsilon_{m\,j\,k}$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,m}[(\boldsymbol{\nabla}_j\,\varepsilon)_{m\,k\,l} + (\boldsymbol{\nabla}_k\,\varepsilon)_{m\,l\,j} + (\boldsymbol{\nabla}_l\,\varepsilon)_{m\,j\,k}]$$
$$+ \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}(\varepsilon_{n\,m\,l}\,\varepsilon_{p\,j\,k} + \varepsilon_{n\,m\,j}\,\varepsilon_{p\,k\,l} + \varepsilon_{n\,m\,k}\,\varepsilon_{p\,l\,j}),$$
$$= [(\boldsymbol{\nabla}_j\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,p}\,\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_j(\varepsilon) + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\,\varepsilon_{n\,m\,j}]\varepsilon_{p\,k\,l}$$
$$+ [(\boldsymbol{\nabla}_k\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,p}\,\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_k(\varepsilon) + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\varepsilon_{n\,m\,k}]\varepsilon_{p\,l\,j}$$
$$+ [(\boldsymbol{\nabla}_l\,\boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,p}\,\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_l(\varepsilon) + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\varepsilon_{n\,m\,l}]\varepsilon_{p\,j\,k}. \tag{3071}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{i}{}_{m}{}^{m}\,\varepsilon_{j\,k\,l} = \Big(\{[\boldsymbol{\nabla}_p + \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_p(\varepsilon)]\boldsymbol{\mathcal{U}}\}^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\,\varepsilon_{n\,m\,p}\Big)\varepsilon_{j\,k\,l}, \tag{3072}$$

و از آنجا

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}^{i}{}_{m}{}^{m} = \{[\boldsymbol{\nabla}_p + \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_p(\varepsilon)]\boldsymbol{\mathcal{U}}\}^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\,\varepsilon_{n\,m\,p}. \tag{3073}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} = \Big(\{[\boldsymbol{\nabla}_p + \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_p(\varepsilon)]\boldsymbol{\mathcal{U}}\}^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\,\varepsilon_{n\,m\,p}\Big)\,\varepsilon_{j\,k\,l}. \tag{3074}$$

اگر خمینه شبه- ِ-ریمانی باشد و هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، مشتق ِ هموردا یِ عنصر- ِ-حجم ِ لِوی-چیویتا صفر میشود. پس اگر ε عنصر- ِ-حجم ِ لِوی-چیویتا باشد،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^{i}{}_{l\,j\,k} = [(\boldsymbol{\nabla}_p \boldsymbol{\mathcal{U}})^{i\,p} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^{i\,n}\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^{m\,p}\,\varepsilon_{n\,m\,p}]\varepsilon_{j\,k\,l}. \tag{3075}$$

در این حالت تانسر ِ خمش نسبت به دُ-شاخص ِ اول َش هم (وقت ی هر-دُ پایین یا هردُ بالا باشند) پادمتقارن است. یعنی $\mathcal{V}$ نسبت به دُ-شاخص ِ اول َ چنین است. پس یک $\mathcal{W}$ هست که

$$\mathcal{V}^{i}{}_{j}{}^{m} = \varepsilon^{i}{}_{j\,n}\,\mathcal{W}^{m\,n}, \tag{3076}$$

یا

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = \varepsilon^{i}{}_{j\,n}\,\varepsilon_{m\,k\,l}\,\mathcal{W}^{m\,n}, \tag{3077}$$

در این حالت تارَد ِ خمش صفر است. برا یِ تانسر ِ ریچی هم،

$$\begin{aligned}\mathsf{R}_{j\,l} &= \varepsilon^{k}{}_{j\,n}\,\varepsilon_{m\,k\,l}\,\mathcal{W}^{m\,n},\\ &= [\mathsf{sgn}(g)](g_{j\,l}\,g_{n\,m} - g_{j\,m}\,g_{n\,l})\,\mathcal{W}^{m\,n}\end{aligned} \tag{3078}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{R}_{j\,l} = [\mathsf{sgn}(g)](g_{j\,l}\,\mathcal{W}^{m}{}_{m} - \mathcal{W}_{j\,l}). \tag{3079}$$

به این ترتیب،

$$\mathcal{R} = 2[\mathsf{sgn}(g)]\mathcal{W}^{m}{}_{m}, \tag{3080}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{W}_{j\,l} = -[\mathsf{sgn}(g)]\left(\mathsf{R}_{j\,l} - \frac{1}{2}\,g_{j\,l}\,\mathcal{R}\right), \tag{3081}$$

و از آنجا،

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = -[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i}{}_{j\,n}\,\varepsilon_{m\,k\,l}\left(\mathsf{R}^{m\,n} - \frac{1}{2}\,g^{m\,n}\,\mathcal{R}\right), \tag{3082}$$

یا

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = -[\mathsf{sgn}(g)]\varepsilon^{i}{}_{j\,n}\,\varepsilon_{m\,k\,l}\,\mathsf{R}^{m\,n} + \frac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\,g_{j\,l} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k})\mathcal{R}. \qquad (3083)$$

دیده میشود در این حالت همه یِ مئلفِها یِ تانسر ِ خمش بر حسب ِ تانسر ِ ریچی (و البته شبه- ِ-متریک) به دست میئایند. در واقع،

$$\begin{aligned}\varepsilon^{i}{}_{j\,n}\,\varepsilon_{m\,k\,l} = [\mathsf{sgn}(g)](&\delta^{i}_{m}\,g_{j\,k}\,g_{n\,l} - \delta^{i}_{m}\,g_{j\,l}\,g_{n\,k} - \delta^{i}_{k}\,g_{j\,m}\,g_{n\,l}\\ &+ \delta^{i}_{k}\,g_{j\,l}\,g_{n\,m} + \delta^{i}_{l}\,g_{j\,m}\,g_{n\,k} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k}\,g_{n\,m}),\end{aligned} \qquad (3084)$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} = \delta^{i}_{k}\,\mathsf{R}_{j\,l} + g_{j\,l}\,\mathsf{R}^{i}{}_{k} - \delta^{i}_{l}\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{j\,k}\,\mathsf{R}^{i}{}_{l} - \frac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\,g_{j\,l} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k})\mathcal{R}. \qquad (3085)$$

این رابطه با استفاده از تانسر ِ لِوی-چیویتا به دست آمد، اما اگر خمینه سمتپذیر نباشد هم درست است، چون مُضعَن میشود یک تانسر ِ لِوی-چیویتا تعریف کرد.

تانسر ِ وَیل وقت ی تعریف میشود که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد. از تعریف ِ تانسر ِ وَیل،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,k\,l} &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}\,(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^{i}_{l}\,\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,k} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,k}\,\mathcal{R}\right)\\ &\quad + \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^{i}_{k}\,\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,l} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,l}\,\mathcal{R}\right),\\ &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{k} - \delta^{i}_{l}\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{l} + \delta^{i}_{k}\,\mathsf{R}_{j\,l})\\ &\quad + \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^{i}_{k}\,g_{j\,l} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k})\mathcal{R},\end{aligned} \qquad (3004)$$

دیده میشود در سه-بُعد،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{i}{}_{j\,k\,l} &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - (g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^{i}_{l}\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,k} - \frac{1}{4}\,g_{p\,k}\,\mathcal{R}\right)\\ &\quad + (g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^{i}_{k}\delta^{p}_{j})\left(\mathsf{R}_{p\,l} - \frac{1}{4}\,g_{p\,l}\,\mathcal{R}\right)\\ &= \boldsymbol{R}^{i}{}_{j\,k\,l} - (g_{l\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{k} - \delta^{i}_{l}\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^{i}{}_{l} + \delta^{i}_{k}\,\mathsf{R}_{j\,l})\\ &\quad + \frac{1}{2}(\delta^{i}_{k}\,g_{l\,j} - \delta^{i}_{l}\,g_{k\,j})\mathcal{R}\end{aligned} \qquad (3086)$$

که نتیجه میدهد در سه-بُعد، تانسر ِ وَیل صفر است:

$$\boldsymbol{C} = 0. \tag{3087}$$

برا یِ برقراری یِ رابطِها یِ (3085) و (3087)، که تانسر ِ خمش به طُر ِ نقطِئی از تانسر ِ ریچی به دست میئاید و تانسر ِ وَیل صفر است، در خمینِها یِ سه-بُعدی، کافی ست هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد. لازم نیست هموستار لِوی-چیویتا باشد. اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد (یعنی پیچش هم صفر باشد) این رابطِها همچنان برقرار َند، و تانسر ِ ریچی متقارن است.

75 درجه-یِ-آزادی

در کل ِ این فصل، بُعد ِ خمینه را با m نشان میدهم. تعداد ِ پارامترها یی که تانسر ِ T (در یک نقطه) را تعیین میکند را با $\mathsf{df}(T)$ نشان میدهم. $\mathsf{df}(T)$ بُعد ِ فضا یی ست که همه یِ اعضا یِ آن محدودیتها یِ T را بر میئاورند. به $\mathsf{df}(T)$ درجه-یِ-آزادی یِ T میگویم. تعداد ِ میدانها یِ اسکالر ِ مستقل ی که میدان ِ تانسری یِ T را تعیین میکنند را با $\mathsf{fdf}(T)$ نشان میدهم و به آن درجه-یِ-آزادی یِ میدانی یِ T میگویم. $\mathsf{fdf}(T)$ لزومَن با $\mathsf{df}(T)$ یکسان نیست. مثلَن اگر

$$T = \mathbf{D}\,\phi, \tag{3088}$$

که S یک میدان ِ اسکالر است، رُشن است که

$$\mathsf{df}(T) = m. \tag{3089}$$

$$\mathsf{fdf}(T) = 1. \tag{3090}$$

تانسر ِ پیچش یک تانسر ِ سه-شاخصی ست، اما نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم َش پادمتقارن است. از اینجا نتیجه میشود

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{T}) = \frac{m^2(m-1)}{2}. \tag{3091}$$

از جمله دیده میشود اگر خمینه یک-بُعدی باشد، $\mathsf{df}(\boldsymbol{T})$ صفر است، پس در یک خمینه یِ یک-بُعدی پیچش صفر است. اگر خمینه دُ-بُعدی باشد، $\mathsf{df}(\boldsymbol{T})$ هم 2 میشود. پس در یک خمینه یِ دُ-بُعدی پیچش با یک بردار مشخص میشود. در یک خمینه یِ سه-بُعدی هم $\mathsf{df}(\boldsymbol{T})$ برابر ِ 9 یا 3^2 است. پس در یک خمینه یِ سه-بُعدی پیچش با یک تانسر ِ رتبه یِ 2 مشخص میشود. رُشن است که بر یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی، درجه یِ آزادی یِ همپیچش با درجه یِ آزادی یِ پیچش برابر است:

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{K}) = \frac{m^2(m-1)}{2}. \tag{3092}$$

هموستار سه شاخص دارد. اگر هیچ قید ی بر هموستار نباشد،

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{\Gamma}) = m^3. \tag{3093}$$

بخش ی از هموستار با پیچش مشخص میشود. این بخش با $\mathsf{df}(\boldsymbol{T})$ پارامتر مشخص میشود. به این ترتیب تعداد ِ پارامترها یی که بخش ِ مستقل-از-پیچش ِ هموستار را تعیین میکنند چنین میشود.

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{\Gamma}) - \mathsf{df}(\boldsymbol{T}) = \frac{m^2(m+1)}{2}. \tag{3094}$$

از جمله اگر پیچش صفر باشد، تعداد ِ پارامترها یی که هموستار را تعیین میکنند چنین میشود.

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{\Gamma}) = \frac{m^2(m+1)}{2}, \quad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3095}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}) = \frac{m^2(m+1)}{2}. \tag{3096}$$

البته هموستار ِ لِوی-چیویتا با شبه- ِ-متریک به طُر ِ یکتا مشخص میشود، اما رابطه اَش با شبه- ِ-متریک نقطه ای نیست. هموستار ی که با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، $[m^2(m+1)/2]$ از پارامترها یَش با شبه- ِ-متریک (و مشتق ِ اول َش) مشخص میشود و بقیه یِ پارامترها یَش با پیچش مشخص میشود. اگر خمینه یک-بُعدی باشد، هموستار 1 درجه یِ آزادی دارد. اگر خمینه دُ-بُعدی باشد، هموستار 8 درجه یِ آزادی دارد، که 2 تا یَش از پیچش میئاید. هموستار ِ بدون- ِ-پیچش 6 درجه یِ آزادی دارد. اگر

خمینه سه-بُعدی باشد، هموستار 27درجه یِ آزادی دارد، که 9 تا یَش از پیچش میئاید. هموستار ِ بدون- ِ-پیچش 18 درجه یِ آزادی دارد.

تانسر ِ خمش چهار شاخص دارد، و نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است. اگر جز این قید ی بر تانسر ِ خمش نباشد،

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{R}) = \frac{m^3(m-1)}{2}. \tag{3097}$$

تارَد ِ تانسر ِ خمش دُ شاخص دارد، و نسبت به این شاخصها پادمتقارن است. تانسر ِ ریچی هم دُ شاخص دارد، و در حالت ِ کلی (جز در بُعدها یِ کم) قید ی بر مئلفِها یَش نیست. این را نشان میدهم. یعنی نشان میدهم به ازا یِ هر تانسر- ِ دلبخاه ِ R و هر تانسر ِ پادمتقارن ِ دلبخاه ِ $\grave{\boldsymbol{R}}$ (هردُ از رتبه یِ دُ) یک تانسر ِ $\tilde{\boldsymbol{R}}$ هست که نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است، تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن R و تارَد- ِ-خمش ِ متناظر با آن $\grave{\boldsymbol{R}}$ است. $\tilde{\boldsymbol{R}}$ را چنین میگیرم.

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l} &= \mathfrak{a}(\delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k}) + \mathfrak{b}(\delta^i_k\,\mathsf{R}_{l\,j} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{k\,j}) + \mathfrak{c}\delta^i_j\,(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k})\\ &\quad + \mathfrak{d}(\delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} - \delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k}) + \mathfrak{e}\delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l}.\end{aligned} \tag{3098}$$

$\mathfrak{a}$ تا $\mathfrak{e}$ ثابتها یی یَند که باید با این شرط ِ تعیین شوند که تانسر ِ ریچی یِ و تارَد- ِ-خمش ِ متناظر با $\tilde{\boldsymbol{R}}$، به ترتیب R و $\grave{\boldsymbol{R}}$ باشند. رُشن است که $\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l}$ نسبت به k و l پادمتقارن است. در واقع طرف ِ راست ِ (3098) بر این اساس نوشته شده که نسبت به k و l پادمتقارن باشد، و هر جمله اَش حاصل- ِ-ضرب ِ یک مئلفه یِ R یا $\grave{\boldsymbol{R}}$ در یک مئلفه یِ δ باشد. دیده میشود

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,i\,l} &= (m-1)\mathfrak{a}\,\mathsf{R}_{j\,l} + (m-1)\mathfrak{b}\,\mathsf{R}_{l\,j} + \mathfrak{c}(\mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j}) + (m-1)\mathfrak{d}\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} + \mathfrak{e}\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l},\\ &= [(m-1)\mathfrak{a} + \mathfrak{c}]\mathsf{R}_{j\,l} + [(m-1)\mathfrak{b} - \mathfrak{c}]\mathsf{R}_{l\,j} + [(m-1)\mathfrak{d} + \mathfrak{e}]\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l}.\end{aligned} \tag{3099}$$

این که R تانسر ِ ریچی یِ متناظر با $\tilde{\boldsymbol{R}}$ باشد یعنی

$$(m-1)\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = 1. \tag{3100}$$

$$(m-1)\mathfrak{b} - \mathfrak{c} = 0. \tag{3101}$$

$$(m-1)\mathfrak{d} + \mathfrak{e} = 0. \tag{3102}$$

برا یِ تارَد ِ خمش هم،

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{i\,k\,l} = \mathfrak{a}(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + \mathfrak{b}(\mathsf{R}_{l\,k} - \mathsf{R}_{k\,l}) + m\,\mathfrak{c}(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + 2\,\mathfrak{d}\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} + m\,\mathfrak{e}\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l},$$

$$= (\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + m\,\mathfrak{c})(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + (2\,\mathfrak{d} + m\,\mathfrak{e})\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l}. \tag{3103}$$

این که $\grave{\boldsymbol{R}}$ تارَد- ِ-خمش ِ متناظر با $\tilde{\boldsymbol{R}}$ باشد یعنی

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} + m\,\mathfrak{c} = 1. \tag{3104}$$

$$2\,\mathfrak{d} + m\,\mathfrak{e} = 0. \tag{3105}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{a} = \frac{m^2 - m - 1}{(m-1)(m+1)(m-2)}. \tag{3106}$$

$$\mathfrak{b} = \frac{-1}{(m-1)(m+1)(m-2)}. \tag{3107}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1-m}{(m-1)(m+1)(m-2)}. \tag{3108}$$

$$\mathfrak{d} = \frac{1-m}{(m-1)(m+1)(m-2)}. \tag{3109}$$

$$\mathfrak{e} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)(m+1)(m-2)}. \tag{3110}$$

البته رُشن است که این رابطِها برا یِ $m > 2$ اند. پس در $m > 2$،

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{R}}^{i}{}_{j\,k\,l} = {} & \frac{1}{(m-1)(m+1)(m-2)} \\ & [(m^2 - m - 1)(\delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k}) - (\delta^i_k\,\mathsf{R}_{l\,j} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{k\,j}) \\ & + (1-m)\delta^i_j(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) \\ & + (1-m)(\delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} - \delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k}) + \delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l}].\end{aligned} \tag{3111}$$

پس اگر بُعد ِ خمینه بیش از دُ باشد، و هیچ قید ِ اضافی یی بر خمش نباشد، هیچ قید ی بر تانسر ِ ریچی نیست، و هیچ قید ی هم بر تارَد ِ خمش نیست (جز این که پادمتقارن است). به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\grave{\boldsymbol{R}}) = \frac{m(m-1)}{2}, \quad m > 2. \tag{3112}$$

$$\mathsf{df}(\mathsf{R}) = m^2, \qquad m > 2. \tag{3113}$$

اگر خمینه دُ-بُعدی باشد هم

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k}, \tag{3045}$$

که باز نتیجه میدهد متناظر با هر تانسر ِ دُ شاخصی یِ R یک تانسر ِ خمش هست که R تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن تانسر ِ خمش است. پس در (3113)، قید ِ $(m > 2)$ را میشود به $(m \geq 2)$ تبدیل کرد. البته اگر خمینه یک-بُعدی باشد تانسر ِ خمش صفر است و در نتیجه تانسر ِ ریچی هم صفر است. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\mathsf{R}) = \begin{cases} m^2, & m > 1 \\ 0, & m = 1 \end{cases}. \tag{3114}$$

(3112) را هم میشود به $m \leq 2$ گسترش داد:

$$\mathsf{df}(\grave{\boldsymbol{R}}) = \frac{m(m-1)}{2}. \tag{3115}$$

اما در بُعد ِ 2 تارَد- ِ-خمش مستقل از تانسر ِ ریچی نیست:

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} = \mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}. \tag{3046}$$

به این ترتیب، اگر خمینه یک-بُعدی باشد تانسر ِ خمش، تارَد ِ خمش، و تانسر ِ ریچی صفر َند. اگر خمینه دُ-بُعدی باشد درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 4، و درجه-یِ-آزادی یِ تارَد ِ خمش 1 است. این که درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی با درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش برابر است، یک راه ِ دیگر ِ دیدن ِ این است که در دُ-بُعد، رابطه یِ نقطِئی یِ تانسر ِ ریچی بر حسب ِ تانسر ِ خمش را میشود وارون کرد و تانسر ِ خمش را به طُر ِ نقطِئی از تانسر ِ ریچی حساب کرد. در سه-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش 27، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی 9، و درجه-یِ-آزادی یِ تارَد ِ خمش 3 است.

اگر پیچش صفر باشد، اتحاد ِ اول ِ بیانکی به این شکل ِ ساده در میئاید که بخش ِ پادمتقارن ِ $\boldsymbol{R}$ نسبت به شاخصها یِ دوم، سوم، و چهارم ِ $\boldsymbol{R}$ صفر است:

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} + \boldsymbol{R}^i{}_{k\,l\,j} + \boldsymbol{R}^i{}_{l\,j\,k} = 0. \tag{2106}$$

تعداد ِ قیدها یِ مستقل ی که به این ترتیب بر $\boldsymbol{R}$ اعمال میشود m ضرب در انتخاب ِ 3 از m است. به

این ترتیب درجه-یِ-آزادی یِ $\boldsymbol{R}$ به این تعداد کم میشود:

$$\begin{aligned}\mathsf{df}(\boldsymbol{R}) &= \frac{m^3(m-1)}{2} - m\binom{m}{3},\\ &= \frac{m^3(m-1)}{2} - \frac{m^2(m-1)(m-2)}{6},\end{aligned} \tag{3116}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{R}) = \frac{m^2(m^2-1)}{3}, \quad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3117}$$

با صفر-شدن ِ پیچش، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی و درجه یِ آزادی یِ تارَد- ِ-خمش تغییر نمیکنند. برا یِ اثبات، در $m > 2$ شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی برا یِ $\tilde{\boldsymbol{R}}$ را تحقیق میکنم.

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{k\,l\,j} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{l\,j\,k},\\ &= \mathfrak{a}[(\delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k}) + (\delta^i_l\,\mathsf{R}_{k\,j} - \delta^i_k\,\mathsf{R}_{l\,j}) + (\delta^i_j\,\mathsf{R}_{l\,k} - \delta^i_j\,\mathsf{R}_{k\,l})]\\ &\quad + \mathfrak{b}[(\delta^i_k\,\mathsf{R}_{l\,j} - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{k\,j}) + (\delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k} - \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l}) + (\delta^i_j\,\mathsf{R}_{k\,l} - \delta^i_j\,\mathsf{R}_{l\,k})]\\ &\quad + \mathfrak{c}[\delta^i_j(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + \delta^i_k(\mathsf{R}_{l\,j} - \mathsf{R}_{j\,l}) + \delta^i_l(\mathsf{R}_{j\,k} - \mathsf{R}_{k\,j})]\\ &\quad + \mathfrak{d}[(\delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} - \delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k}) + (\delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,j} - \delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j}) + (\delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{l\,k} - \delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l})]\\ &\quad + \mathfrak{e}(\delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} + \delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j} + \delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k}),\\ &= (-\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})[\delta^i_j(\mathsf{R}_{k\,l} - \mathsf{R}_{l\,k}) + \delta^i_k(\mathsf{R}_{l\,j} - \mathsf{R}_{j\,l}) + \delta^i_l(\mathsf{R}_{j\,k} - \mathsf{R}_{k\,j})]\\ &\quad + (-2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{e})(\delta^i_j\,\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} + \delta^i_k\,\grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j} + \delta^i_l\,\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k}),\end{aligned} \tag{3118}$$

که $\mathfrak{a}$ تا $\mathfrak{e}$ از رابطِها یِ (3106) تا (3110) به دست میئایند. از این رابطِها نتیجه میشود

$$-\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = -\frac{1}{m-2}. \tag{3119}$$

$$-2\,\mathfrak{d} + \mathfrak{e} = \frac{1}{m-2}. \tag{3120}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{k\,l\,j} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{l\,j\,k} = \frac{1}{m-2}[\delta^i_j(\grave{\boldsymbol{R}}_{k\,l} - \mathsf{R}_{k\,l} + \mathsf{R}_{l\,k}) + \delta^i_k(\grave{\boldsymbol{R}}_{l\,j} - \mathsf{R}_{l\,j} + \mathsf{R}_{j\,l}) + \delta^i_l(\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,k} - \mathsf{R}_{j\,k} + \mathsf{R}_{k\,j})] \tag{3121}$$

اگر پیچش صفر باشد پرانتزها صفر َند:

$$\grave{\boldsymbol{R}}_{j\,l} = \mathsf{R}_{j\,l} - \mathsf{R}_{l\,j}. \tag{2124}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{j\,k\,l} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{k\,l\,j} + \tilde{\boldsymbol{R}}^i{}_{l\,j\,k} = 0. \tag{3122}$$

دیده میشود $\tilde{\boldsymbol{R}}$ نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است، شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را برمیئاورَد، تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن R است، و تارَد- ِ-خمش ِ متناظر با آن $\grave{\boldsymbol{R}}$ است. پس متناظر با هر دُ-تانسر ِ دُ شاخصی یِ R و $\grave{\boldsymbol{R}}$ که (2124) را براورَد، یک تانسر ِ خمش هست که R تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن تانسر ِ خمش و $\grave{\boldsymbol{R}}$ تارَد- ِ-خمش ِ متناظر با آن تانسر ِ خمش است، و پیچش هم صفر است. در $m = 2$ هم هم ین نتیجه با (3045) به دست میئاید. پس

$$\mathsf{df}(\mathsf{R}) = \begin{cases} m^2, & m > 1 \\ 0, & m = 1 \end{cases}, \quad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3123}$$

$$\mathsf{df}(\grave{\boldsymbol{R}}) = \frac{m(m-1)}{2}, \qquad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3124}$$

قید ی که صفر-شدن ِ پیچش اعمال میکند بر تانسر ِ ریچی یا تارَد- ِ-خمش به-تنهایی نیست، بلکه هم ان (2124) است، که تارَد- ِ-خمش با بخش ِ پادمتقارن ِ تانسر ِ ریچی متناسب است.

به این ترتیب، اگر پیچش صفر باشد، در یک-بُعد تانسر ِ خمش، تارَد- ِ-خمش، و تانسر ِ ریچی صفر َند. در دُ-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 4، و درجه-یِ-آزادی یِ تارَد ِ خمش 1 است. دیده میشود در دُ-بُعد، این که پیچش صفر شود درجه-یِ-آزادی یِ تانسرها یِ خمش و

ریچی و تارَد- ِ-خمش را تغییر نمیدهد (کم نمیکند). در سه-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش 24، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی 9، و درجه یِ آزادی یِ تارَد- ِ-خمش 3 است.

اگر هموستار با شبه- ِ-متریک (g) سازگار باشد (و پیچش لزومَن صفر نباشد)، تانسر ِ خمش نسبت به شاخصها یِ اول و دوم َش هم (وقت ی هردُ بالا یا هردُ پایین باشند) پادمتقارن است. از اینجا نتیجه میشود درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش مجذور ِ انتخاب ِ 2 از m است:

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{R}) = \frac{m^2(m-1)^2}{4}, \quad \boldsymbol{\nabla}\, g = 0. \tag{3125}$$

در این حالت تارَد- ِ-خمش صفر است، و درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی برا یِ بُعدها یِ بزرگتر از 2 همچنان m^2 است. اثبات این است که در $m > 2$، تانسر ِ $\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}$ با تعریف ِ

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}^i{}_{j\,k\,l} = {}& \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\mathsf{R}^i{}_k - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^i{}_l + \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l}) \\ & - \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^i_k\,g_{j\,l} - \delta^i_l\,g_{j\,k})\,\mathcal{R},\end{aligned} \tag{3126}$$

به ازا یِ هر R هم نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است و هم نسبت به شاخصها یِ اول و دوم َش پادمتقارن است (وقت ی هر-دُ بالا یا هردُ پایین باشند)، و البته تانسر ِ ریچی یِ متناظر با $\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}$ هم ان R است. پس به ازا یِ هر R یک تانسر ِ خمش هست ($\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}$) که تقارنها یِ لازم را دارد و R تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن است. در واقع از رابطه یِ تعریف-کننده یِ تانسر ِ وَیل دیده میشود $\tilde{\tilde{\boldsymbol{R}}}$ تانسر- ِ-خمش ی ست که تانسر ِ وَیل ِ متناظر با آن صفر است. اگر خمینه دُ-بُعدی باشد، تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی به طُر ِ نقطِئی از اسکالر ِ خمش به دست میئایند:

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{2}\,(\delta^i_k\,g_{j\,l} - \delta^i_l\,g_{j\,k})\,\mathcal{R}. \tag{3056}$$

$$\mathsf{R}_{i\,j} = \frac{1}{2}\,g_{i\,j}\,\mathcal{R}. \tag{3055}$$

به این ترتیب، در $m = 2$ درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی 1 است. پس،

$$\mathsf{df}(\mathsf{R}) = \begin{cases} m^2, & m > 2 \\ 1, & m = 2 \\ 0, & m = 1 \end{cases} \quad \boldsymbol{\nabla}\, g = 0. \tag{3127}$$

در $m=2$ درجه یِ آزادی یِ تانسر ِ خمش هم 1 است. اما این حالت ِ خاص ی از (3125) است. و البته اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد تارَد- ِ-خمش صفر است.

تانسر ِ وَیل وقت ی تعریف میشود که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار، و بُعد ِ خمینه بیش از دُ باشد. تقارنها یِ تانسر ِ وَیل هم ان تقارنها یِ تانسر ِ خمش است، اما نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم ِ تانسر ِ وَیل صفر است. به سادگی دیده میشود برا یِ هر تانسر- ِ-وَیل ِ $\boldsymbol{C}$ (که تقارنها یِ لازم را دارد و نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم َش صفر است) و هر تانسر- ِ-ریچی یِ R، یک تانسر ِ خمش هست که $\boldsymbol{C}$ و Rبه ترتیب، تانسر ِ وَیل و تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن َند. کافی ست

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^i{}_{j\,k\,l} &= \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}\,(g^{p\,i}\,g_{l\,j} - \delta^i_l\,\delta^p_j)\left(\mathsf{R}_{p\,k} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,k}\,\mathcal{R}\right)\\ &\quad + \frac{1}{m-2}(g^{p\,i}\,g_{k\,j} - \delta^i_k\,\delta^p_j)\left(\mathsf{R}_{p\,l} - \frac{1}{2\,m-2}\,g_{p\,l}\,\mathcal{R}\right),\\ &= \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} - \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\mathsf{R}^i{}_k - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^i{}_l + \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l})\\ &\quad + \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^i_k\,g_{j\,l} - \delta^i_l\,g_{j\,k})\mathcal{R},\end{aligned} \tag{3004}$$

تعریف ِ تانسر ِ وَیل، به شکل ِ عبارت ی برا یِ $\boldsymbol{R}$ (تانسر ِ خمش) بر حسب ِ $\boldsymbol{C}$ و R نوشته شود:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} &= \boldsymbol{C}^i{}_{j\,k\,l} + \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\mathsf{R}^i{}_k - \delta^i_l\,\mathsf{R}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\mathsf{R}^i{}_l + \delta^i_k\,\mathsf{R}_{j\,l})\\ &\quad - \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^i_k\,g_{j\,l} - \delta^i_l\,g_{j\,k})\mathcal{R}.\end{aligned} \tag{3128}$$

دیده میشود طرف ِ راست ویژگیها یِ تانسر ِ خمش ی که $\boldsymbol{C}$ و R، به ترتیب، تانسر ِ وَیل و تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن َند را دارد. این که نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم در تانسر ِ وَیل صفر است، m^2 قید ِ اضافی (نسبت به تانسر ِ خمش) بر تانسر ِ وَیل میگذارد. پس

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{C}) = \mathsf{df}(\boldsymbol{R}) - m^2, \tag{3129}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{df}(\boldsymbol{C}) = \frac{m^2(m+1)(m-3)}{4}, \quad \boldsymbol{\nabla}\,g = 0. \tag{3130}$$

از جمله این یک راه ِ دیگر ِ دیدن ِ آن است که در سه-بُعد، تانسر ِ وَیل صفر است.

به این ترتیب، اگر هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد، تارَد ِ خمش صفر است. در یک-بُعد تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی صفر َند. در دُ-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 1 است. به هم ین خاطر در دُ-بُعد میشود هر یک از اینها را به طُر ِ نقطِئی بر حسب ِ دیگری یا بر حسب ِ اسکالر ِ خمش (و البته شبه- ِ-متریک) نوشت. در سه-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 9 است. به هم ین خاطر در سه-بُعد میشود تانسر ِ خمش را به طُر ِ نقطِئی بر حسب ِ تانسر ِ ریچی نوشت. در سه-بُعد، تانسر ِ وَیل صفر است.

اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، یعنی هموستار با شبه- ِ-متریک (g) سازگار باشد و پیچش هم صفر باشد، تانسر ِ خمش نسبت به شاخصها یِ اول و دوم َش (وقت ی هر-دُ بالا یا هر-دُ پایین باشند) پادمتقارن است، نسبت به شاخصها یِ سوم و چهارم َش پادمتقارن است، و بخش ِ کاملَن-پادمتقارن نسبت به شاخصها یِ دوم تا چهارم َش صفر است (شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را برمیئاورَد). از اینحا نتیجه میشود درجه-یِ-آزادی یِ تانسر- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا برابر است با درجه یِ آزادی یِ تانسر ِ خمش ِ سازگار با شبه- ِ-متریک، منها یِ تعداد ِ قیدها یِ مستقل ِ مربوط به صفر-شدن ِ بخش ِ پادمتقارن نسبت شاخصها یِ دوم تا چهارم. این تعداد m ضرب در انتخاب ِ 3 از m است. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}) = \frac{m^2(m-1)^2}{4} - \frac{m^2(m-1)(m-2)}{6}. \tag{3131}$$

میشد هم ین عدد را به این روش حساب کرد که درجه یِ آزادی یِ تانسر- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا برابر است با درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش وقت ی پیچش صفر است، منها یِ تعداد ِ قیدها یِ مستقل ِ متناظر با پادتقارن نسبت به شاخصها یِ اول و دوم. تعداد ِ این قیدها $[m(m-1)/2]$ ضرب در $[m(m+1)/2]$ است. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}) = \frac{m^2(m^2-1)}{3} - \frac{m^2(m^2-1)}{4}. \tag{3132}$$

نتیجه میشود

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}) = \frac{m^2(m^2-1)}{12}. \tag{3133}$$

در این حالت تارَد- ِ-خمش صفر است، و تانسر ِ ریچی متقارن است. نشان میدهم برا یِ بُعدها یِ بزرگتر از 2متناظر با هر تانسر ِ $\underset{\circ}{C}$ از رتبه یِ 4 که تقارنها یِ تانسر- ِ-وَیل ِ لِوی-چیویتا را براورَد، و هر تانسر ِ متقارن ِ $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$ از رتبه یِ 2، یک تانسر- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا هست که $\underset{\circ}{C}$ و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$، به ترتیب، تانسر ِ وَیل و تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن َند. در واقع رابطه یِ این تانسر ِ خمش ِ لِوی-چیویتا با $\underset{\circ}{C}$ و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$ هم ان (3128) است، که آن هم تعریف ِ تانسر ِ وَیل است:

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^{i}{}_{j\,k\,l} = \underset{\circ}{C}{}^{i}{}_{j\,k\,l} + \frac{1}{m-2}(g_{l\,j}\,\underset{\circ}{\mathsf{R}}{}^{i}{}_{k} - \delta^{i}_{l}\,\underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,k} - g_{k\,j}\,\underset{\circ}{\mathsf{R}}{}^{i}{}_{l} + \delta^{i}_{k}\,\underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l}) - \frac{1}{(m-2)(m-1)}(\delta^{i}_{k}\,g_{j\,l} - \delta^{i}_{l}\,g_{j\,k})\underset{\circ}{\mathcal{R}}. \tag{3134}$$

دیده میشود طرف ِ راست ویژگیها یِ تانسر ِ خمش ی که $\underset{\circ}{C}$ و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$، به ترتیب، تانسر ِ وَیل و تانسر ِ ریچی یِ متناظر با آن َند را دارد. کافی ست نشان داده شود اگر $\underset{\circ}{C}$ شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را براورَد و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$ متقارن باشد، $\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}$ در رابطه یِ بالا هم شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را برمیئاورَد. برا یِ اثبات، این را به کار میبرم که به ازا یِ هر $\mathcal{Y}$ ِ متقارن و هر $\mathcal{X}$،

$$(\mathcal{Y}_{j\,k}\,\mathcal{X}_{l} - \mathcal{Y}_{j\,l}\,\mathcal{X}_{k}) + (\mathcal{Y}_{k\,l}\,\mathcal{X}_{j} - \mathcal{Y}_{k\,j}\,\mathcal{X}_{l}) + (\mathcal{Y}_{l\,j}\,\mathcal{X}_{k} - \mathcal{Y}_{l\,k}\,\mathcal{X}_{j}) = 0. \tag{3135}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^{i}{}_{j\,k\,l} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^{i}{}_{k\,l\,j} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^{i}{}_{l\,j\,k} = \underset{\circ}{C}{}^{i}{}_{j\,k\,l} + \underset{\circ}{C}{}^{i}{}_{k\,l\,j} + \underset{\circ}{C}{}^{i}{}_{l\,j\,k}, \tag{3136}$$

که نتیجه میدهد اگر $\underset{\circ}{C}$ شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را براورَد و $\underset{\circ}{\mathsf{R}}$ متقارن باشد، $\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}$ هم شکل ِ بدون- ِ-پیچش ِ اتحاد ِ اول ِ بیانکی را برمیئاورَد. به این ترتیب برا یِ بعد ِ بزرگتر از 2، تانسر ِ ریچی یک تانسر ِ متقارن (بدون ِ قید ِ اضافه) است. در بُعد ِ 2 تانسر- ِ-خمش ِ لِوی-چیویتا و تانسر ِ ریچی به طُر ِ نقطِئی از اسکالر ِ خمش به دست میئایند. پس درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ ریچی 1 میشود. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\mathsf{R}}) = \begin{cases} \dfrac{m(m+1)}{2}, & m > 2 \\ 1, & m = 2 \\ 0, & m = 1 \end{cases} \tag{3137}$$

تانسر ِ وَیل (که در بُعد ِ بزرگتر از 2 تعریف میشود) هم ان قیدها یِ تانسر ِ خمش را دارد، با این قید ِ اصافی که نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم در تانسر ِ وَیل صفر است. این نتیجه $[m(m+1)/2]$ قید ِ اضافی (نسبت به تانسر ِ خمش) بر تانسر ِ وَیل میگذارد. $[m(m+1)/2]$ از آنجا میئاید که به خاطر ِ تقارنها یِ تانسر- ِ-وَیل ِ لِوی-چیویتا، نتیجه یِ حاصل از ادغام ِ شاخصها یِ اول و سوم در تانسر- ِ-وَیل ِ لِوی-چیویتا متقارن است. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{C}}) = \mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}) - \frac{m(m+1)}{2}, \tag{3138}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{df}(\underset{\circ}{\boldsymbol{C}}) = \frac{m(m+1)(m+2)(m-3)}{12}, \tag{3139}$$

به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، تارَد- ِ-خمش صفر است. در یک-بُعد تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی صفر َند. در دُ-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 1 است. به هم ین خاطر در دُ-بُعد میشود هر یک از اینها را به طُر ِ نقطِئی بر حسب ِ دیگری یا بر حسب ِ اسکالر ِ خمش (و البته شبه- ِ-متریک) نوشت. در سه-بُعد، درجه-یِ-آزادی یِ تانسر ِ خمش و تانسر ِ ریچی 6 است. به هم ین خاطر در سه-بُعد میشود تانسر ِ خمش را به طُر ِ نقطِئی بر حسب ِ تانسر ِ ریچی نوشت. در سه-بُعد، تانسر ِ وَیل صفر است.

76 طول و ژئُدزیک

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. γ یک خم است. طول- ِ-جبری یِ γ از t_1 تا t_2 را با $\mathsf{al}_\gamma(t_2, t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{aligned}
\mathsf{al}_\gamma(t_2, t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \sqrt{|g\{[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)], [(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\}|}, \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \sqrt{|[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)] \cdot [(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]|}, \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, |\mathbf{D}\,\gamma|(t).
\end{aligned} \tag{3140}$$

طول (یا طول- ِ-کمان) ِ γ را هم قدر- ِ-مطلق ِ این عبارت تعریف میکنم. دیده میشود

$$\begin{aligned}|\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)| &= \left|\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,|\mathbf{D}\,\gamma|(t)\right|,\\ &= \int_{\min(t_1,t_2)}^{\max(t_1,t_2)}\mathrm{d}t\,|\mathbf{D}\,\gamma|(t).\end{aligned}\tag{3141}$$

$\mathfrak{r}$ را یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{al}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2),\mathfrak{r}(t_1)] &= \int_{\mathfrak{r}(t_1)}^{\mathfrak{r}(t_2)}\mathrm{d}r\,|\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})|(r),\\ &= \int_{\mathfrak{r}(t_1)}^{\mathfrak{r}(t_2)}\mathrm{d}r\,\{|\mathbf{D}\,\gamma|[\mathfrak{r}^{-1}(r)]\}[|\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})|(r)],\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)][|\mathbf{D}\,\gamma|(t)]\{|\mathbf{D}(\mathfrak{r}^{-1})|[\mathfrak{r}(t)]\}\,.\end{aligned}\tag{3142}$$

$(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})$ پیوسته است و صفر نمیشود. پس $\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})$ ثابت است و میشود آن را از انتگرال بیرون آورد. درواقع $\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})$ هم ان $\mathsf{sgn}_{\mathbf{1}}(\mathfrak{r})$ است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathsf{al}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2),\mathfrak{r}(t_1)] &= [\mathsf{sgn}_{\mathbf{1}}(\mathfrak{r})]\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,|\mathbf{D}\,\gamma|(t),\\ &= [\mathsf{sgn}_{\mathbf{1}}(\mathfrak{r})]\,\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1).\end{aligned}\tag{3143}$$

به این ترتیب، طول- ِ-جبری تابع ی از خمها یِ مستقل-از-پارامتر نیست، چون اگر مشتق ِ تابع- ِ-بازپارامترش منفی باشد طول- ِ-جبری قرینه میشود. اما رُشن است که طول- ِ-جبری تابع ِ خمها یِ سمتدار ِ مستقل-از-پارامتر است، یعنی در اثر ِ تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت تغییر نمیکند:

$$\mathsf{al}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2),\mathfrak{r}(t_1)] = \mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1),\quad \mathsf{sgn}_{\mathbf{1}}(\mathfrak{r}) = 1.\tag{3144}$$

همچنین، دیده میشود طول تابع ی از خمها یِ مستقل-از-پارامتر است:

$$|\mathsf{al}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2),\mathfrak{r}(t_1)]| = |\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)|.\tag{3145}$$

به سادِگی دیده میشود طول- ِ-جبری نسبت به بازه یِ پارامتر فزونوَر است:

$$\mathsf{al}_\gamma(t_3,t_1) = \mathsf{al}_\gamma(t_3,t_2) + \mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1).\tag{3146}$$

طول در حالت ِ کلی چنین نیست. رابطه ای مشابه ِ بالا برا یِ طول برقرار است، اگر t_2 بین ِ t_1 و t_3 باشد:

$$|\mathsf{al}_\gamma(t_3,t_1)| = |\mathsf{al}_\gamma(t_3,t_2)| + |\mathsf{al}_\gamma(t_2,t_1)|, \quad (t_3-t_2)\,(t_2-t_1) \geq 0. \tag{3147}$$

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ ریمانی ست. γ یک خم است. از (3140) دیده میشود

$$\mathbf{D}[\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1)] = |\mathbf{D}\,\gamma|. \tag{3148}$$

به این ترتیب، اگر $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نشود $\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1)$ یک تابع- ِ بازپارامترش ِ مثبت برا یِ γ است. در واقع $[\ell_1+\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1)]$ یک تابع- ِ بازپارامترش ِ مثبت برا یِ γ است، که ℓ_1 یک ثابت ِ دلبخاه است. از جمله اگر خمینه ریمانی باشد و $(\mathbf{D}\,\gamma)$ صفر نباشد، $[\ell_1+\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1)]$ یک تابع- ِ بازپارامترش ِ مثبت برا یِ γ است. میشود گفت $[\ell_1+\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1)]$ یک پارامتر برا یِ $\mathsf{pc}_+(\gamma)$ است. به این پارامتر، پارامتر ِ طول- ِ جبری میگویم. دیده میشود پارامتر ِ طول- ِ جبری به t_1 و ℓ_1 بستِگی دارد، اما مشتق ِ پارامتر ِ طول- ِ جبری به t_1 یا ℓ_1 بستِگی ندارد. ℓ_1 فقط یک ثابت ِ انتگرالگیری ست، که مقدار ِ پارامتر ِ طول- ِ جبری ست و قت ی پارامتر ِ خم برابر ِ t_1 است. یا میشود گفت t_1 جا یی ست که پارامتر ِ طول- ِ جبری ℓ_1 میشود. البته رُشن است که تغییر ِ t_1 را میشود در ℓ_1 جذب کرد:

$$\begin{aligned}\ell_1+\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1) &= [\ell_1+\mathsf{al}_\gamma(t_1',t_1)] + \mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1'),\\ &=: \ell_1'+\mathsf{al}_\gamma(\cdot,t_1').\end{aligned} \tag{3149}$$

به این ترتیب، پارامتر ِ طول- ِ جبری عملَن با یک ثابت ِ مستقل تعیین میشود. از جمله اگر ℓ_1 صفر باشد t_1 فقط جا یی را تعیین میکند که طول ِ جبری صفر میشود. همچنین، رُشن است که دُ پارامتر- ِ طول- ِ جبری یِ مختلف در فقط یک ثابت ِ جمعی با هم اختلاف دارند. از اینجا طول- ِ جبری یِ نامعین را تعریف میکنم. میگویم $\mathfrak{l}$ یک طول- ِ جبری یِ نامعین برا یِ خم ِ γ است، اگر

$$\mathbf{D}\,\mathfrak{l} = |\mathbf{D}\,\gamma|. \tag{3150}$$

این را چنین مینویسم.

$$\mathfrak{l} = \mathsf{i}\mathsf{al}_\gamma. \tag{3151}$$

ial_γ یکتا نیست، تا حد ِ یک ثابت ِ جمعی یِ دلبخاه مشخص است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. γ یک خم است، چنان که $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نمیشود. $\mathfrak{l}$ را یک طول- ِ-جبری یِ نامعین برا یِ γ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}
[\mathbf{D}\,(\gamma\circ\mathfrak{l}^{-1})](\ell) &= \{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{l}^{-1}(\ell)]\}\{[\mathbf{D}\,(\mathfrak{l}^{-1})](\ell)\},\\
&= \{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{l}^{-1}(\ell)]\}\{(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})[\mathfrak{l}^{-1}(\ell)]\}^{-1},\\
&= \{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{l}^{-1}(\ell)]\}|(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{l}^{-1}(\ell)]|^{-1},
\end{aligned}\tag{3152}$$

یا

$$\mathbf{D}\,(\gamma\circ\mathfrak{l}^{-1}) = \left(\frac{\mathbf{D}\,\gamma}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\circ\mathfrak{l}^{-1}.\tag{3153}$$

این را چنین هم مینویسم.

$$\mathbf{D}\,[\gamma\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1}] = \left(\frac{\mathbf{D}\,\gamma}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1},\tag{3154}$$

که یعنی رابطه یِ بالا به ازا یِ هر طول- ِ-جبری یِ نامعین ی برقرار است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
|\mathbf{D}\,[\gamma\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1}]| &= \left|\frac{\mathbf{D}\,\gamma}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right|\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1},\\
&= 1.
\end{aligned}\tag{3155}$$

یعنی مماس بر $[\gamma\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1}]$ یکه است. پارامتر ِ $[\gamma\circ(\mathsf{ial}_\gamma)^{-1}]$ متناظر با پارامتر ِ t برا یِ γ هم ان $[\mathsf{ial}_\gamma(t)]$ است، که طول- ِ-جبری ست. به این ترتیب، اگر پارامتر ِ خم طول- ِ-جبری باشد، بردار ِ مماس بر خم یکه است. به سادِگی دیده میشود بر عکس ِ این هم درست است. μ را خم ی میگیرم که بردار- ِ-مماس َش یکه است. دیده میشود

$$\begin{aligned}
\mathsf{al}_\mu(\ell,\ell_1) &= \int_{\ell_1}^{\ell}\mathrm{d}\ell'\,|\mathbf{D}\mu|(\ell'),\\
&= \int_{\ell_1}^{\ell}\mathrm{d}\ell'\,1,\\
&= \ell-\ell_1.
\end{aligned}\tag{3156}$$

یعنی طول- ِ-جبری هم ان پارامتر ِ خم است. به خم ی که بردار ِ مماس َش یکه باشد خم ِ یکه میگویم. نشان داده شد متناظر با هر خم ِ γ که بردار- ِ-مماس َش پوچ نمیشود، یک دسته خم در $\mathsf{pc}_+(\gamma)$ هستند که یکه اند. اینها آن خمها یی یَند که پارامتر ِشان طول- ِ-جبری ست، و رابطه ی ِ هر دُتا یِشان با هم این است که هر یک پارامتر-منتقل-شده ی ِ دیگری ست.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه ی ِ شبه- ِ-ریمانی ست. قبلَن ژئُدزیک خم ی تعریف شد که مشتق ِ هموردا ی ِ مشتق َش با مشتق َش موازی باشد. با استفاده از شبه- ِ-متریک تعریفها ی ِ دیگر ی برا ی ِ ژئُدزیک میئاورم و نشان میدهم وقت ی هموستار لِوی-چیویتا باشد، این تعریفها با تعریف ِ قبلی سازگار َند. تعریف ِ اول بر اساس ِ طول- ِ-جبری ی ِ خمها یی ست که از دُ نقطه ی ِ ثابت میگذرند. خمها یی را در نظر میگیرم که ابتدا و انتها یِشان x_1 و x_2 (متناظر با پارامترها ی ِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خم ِ γ از این خمها یک-ژئُدزیک است، اگر وردش ِ $\mathsf{al}_\gamma(t_2, t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییر ِ $\mathsf{al}_\gamma(t_2, t_1)$ تا مرتبه ی ِ یک نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. این یعنی اگر μ یک خانواده ی ِ یک-پارامتری ی ِ خمها باشد که

$$\mu(t_1, s) = x_1, \tag{3157}$$

$$\mu(t_2, s) = x_2, \tag{3158}$$

$$\mu(\cdot, s_0) = \gamma, \tag{3159}$$

و $\mathfrak{l}$ چنین تعریف شود،

$$\mathfrak{l}(s) = \mathsf{al}_{\mu(\cdot,s)}(t_2, t_1), \tag{3160}$$

$(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})(s_0)$ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathfrak{l}(s) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, |\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mu|(t, s), \tag{3161}$$

که نتیجه میدهد

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})(s) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, [\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)} | \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mu|](t, s). \tag{3162}$$

با فرض ِ این که

$$|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu| \neq 0, \tag{3163}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu| &= \overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\sqrt{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|},\\ &= \frac{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|\}}{2\sqrt{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|}},\\ &= \{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\,\frac{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}}{2\sqrt{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|}}.\end{aligned} \tag{3164}$$

$\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu](t,\bullet)\}$ یک خم در $\mathrm{T}\mathbb{M}$ است. گیرم هموستار لِوی-چیویتا ست. از این که هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار است نتیجه میشود

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\} = 2\,[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]. \tag{3165}$$

از این که پیچش صفر است، نتیجه میشود

$$\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu = \overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu. \tag{3166}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned}\mu &= \boldsymbol{\pi}\circ[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu],\\ &= \boldsymbol{\pi}\circ[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu].\end{aligned} \tag{3167}$$

و باز این که هموستار با متریک سازگار است، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu] &= \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}(0)\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}\\ &\quad - [\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu].\end{aligned} \tag{3168}$$

به این ترتیب،

$$\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\} = 2\Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\} - [\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\Big), \tag{3169}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu| &= \{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\left(\frac{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}}{\sqrt{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|}}\right.\\
&\quad\left.-\frac{[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\mathbf{D}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{\sqrt{|[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]|}}\right),\\
&= \{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\left(\frac{\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}}{|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|}\right.\\
&\quad\left.-\frac{[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|}\right),\\
&= \overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\left(\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\frac{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{|\mathbf{D}_{(0)}\,\mu|}\right)\\
&\quad-\left\{\left[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\left(\frac{\{\mathsf{sgn}[\mathbf{D}_{(0)}\,\mu]\}}{|\mathbf{D}_{(0)}\,\mu|}\right)\right][\mathbf{D}_{(0)}\,\mu]\right.\\
&\quad\left.+\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\frac{[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]}{|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|}\right\}\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu].
\end{aligned} \tag{3170}$$

از اینکه ابتدا و انتها یِ همه یِ خمها یِ خانواده یِ μ ثابت است، نتیجه میشود

$$[\mathbf{D}_{(1)}\,\mu](t_1,s) = 0. \tag{3171}$$

$$[\mathbf{D}_{(1)}\,\mu](t_2,s) = 0. \tag{3172}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)} \left(\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\frac{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{|\mathbf{D}_{(0)}\,\mu|}\right)\right](t,s),\\
&= \left(\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\frac{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{|\mathbf{D}_{(0)}\,\mu|}\right)(t_2,s)\\
&\quad - \left(\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}\frac{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]}{|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|}\right)(t_1,s),\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3173}$$

پس با تعریف ِ $\mathcal{E}_{[1]\,\gamma}$ با

$$\mathcal{E}_{[1]\,\gamma} = -\left\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]\frac{\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma}{|\mathbf{D}\,\gamma|} + \left[\mathbf{D}\left(\frac{\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\right](\mathbf{D}\,\gamma)\right\}, \tag{3174}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})(s) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{\mathcal{E}_{[1]\,\mu(\boldsymbol{\cdot},s)}(t)\}\cdot\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu](t,s)\}. \tag{3175}$$

γ یک-ژئُدزیک است، اگر طرف ِ راست به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ $\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu](t,s_0)\}$ صفر باشد. این یعنی γ یک-ژئُدزیک است، اگر

$$\mathcal{E}_{[1]\,\gamma}(t) = 0. \tag{3176}$$

به این ترتیب γ یک-ژئُدزیک است، اگر

$$\frac{\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma}{|\mathbf{D}\,\gamma|} + \left[\mathbf{D}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\right](\mathbf{D}\,\gamma) = 0. \tag{3177}$$

البته برا یِ این که این رابطه برقرار باشد لازم است $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نشود. دیده میشود این هم ان معادله یِ ژئُدزیک،

$$\boldsymbol{\nabla}\mathbf{D}\,\gamma + \mathfrak{k}\,\mathbf{D}\,\gamma = 0, \tag{1893}$$

است، که در آن

$$\mathfrak{k} = |\mathbf{D}\,\gamma|\left[\mathbf{D}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\right]. \tag{3178}$$

به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، خم ی که یک-ژئُدزیک باشد ژئُدزیک هم هست. بر عکس، اگر γ ژئُدزیک باشد،

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma)] &= \boldsymbol{\nabla}[(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma)],\\ &= 2(\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma),\\ &= -2\,\mathfrak{k}(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma).\end{aligned} \tag{3179}$$

اگر $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نشود،

$$\begin{aligned}|\mathbf{D}\,\gamma|\left[\mathbf{D}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\right] &= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma)}\,\mathbf{D}\,[(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma)],\\ &= \mathfrak{k}.\end{aligned} \tag{3180}$$

این یعنی (3177) برقرار است و γ یک-ژئُدزیک است. پس اگر γ ژئُدزیک باشد و $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نشود، γ یک-ژئُدزیک است. به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، این دُ-گزاره همئرز َند.

- γ یک-ژئُدزیک است.
- γ ژئُدزیک است و $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نمیشود.

همچنین از (3179) دیده میشود اگر γ ژئُدزیک باشد و $\mathfrak{k}$ کراندار باشد، $[(\mathbf{D}\,\gamma)\cdot(\mathbf{D}\,\gamma)]$ یا همواره مثبت است، یا همواره منفی ست، یا همواره صفر است، یعنی $[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]$ ثابت است. به این ترتیب، همه ی ِ ژئُدزیکها تک-علامت َند. با استفاده از این، همئرزی ی ِ قبلی را میشود چنین بیان کرد که یک-ژئُدزیکها دقیقَن ژئُدزیکها یی یَند که پوچ نیستند.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه ی ِ شبه- ِ-ریمانی ست، که هموستار َش لِوی-چیویتا ست. γ یک خم است و $\mathfrak{r}$ یک تابع- ِ-بازپارامترش برا ی ِ γ است. اگر γ ژئُدزیک باشد بازپارمتریده ی ِ γ با $\mathfrak{r}$ هم ژئُدزیک است. ژئُدزیک ِ γ، به شرط ی که γ پوچ نباشد، رابطه ی ِ (3177) را برمیئاورَد. به این ترتیب از

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,(\mathfrak{r}_*\,\gamma) = \left[-\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^3}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(\mathbf{D}\,\gamma) + \frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^2}(\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma)\right]\circ\mathfrak{r}^{-1}. \tag{1895}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,(\mathfrak{r}_*\,\gamma) = -\left(\left\{\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^3}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{r}) + \frac{|\mathbf{D}\,\gamma|}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})^2}\left[\mathbf{D}\left(\frac{1}{|\mathbf{D}\,\gamma|}\right)\right]\right\}(\mathbf{D}\,\gamma)\right)\circ\mathfrak{r}^{-1}. \tag{3181}$$

$\mathfrak{l}$ را یک طول- ِ-جبری یِ نامعین برا یِ γ میگیرم. از رابطه یِ بالا و (3150) دیده میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,(\mathfrak{l}_*\,\gamma) = -\left(\left\{\frac{1}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})^3}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathfrak{l}) + \frac{\mathbf{D}\,\mathfrak{l}}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{l})^2}\left[\mathbf{D}\left(\frac{1}{\mathbf{D}\,\mathfrak{l}}\right)\right]\right\}(\mathbf{D}\,\gamma)\right)\circ\mathfrak{r}^{-1}, \tag{3182}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,(\mathfrak{l}_*\,\gamma) = 0. \tag{3183}$$

پس $(\mathfrak{l}_*\,\gamma)$ یک ژئُدزیک با پارامتر ِ آفین است. این یعنی برا یِ هر ژئُدزیک ی که پوچ نباشد، طول- ِ-جبری یِ نامعین یک پارامتر ِ آفین است. قبلَن دیده شد رابطه یِ پارامترها یِ آفین با هم این است که هر پارامتر- ِ-آفین اثر ِ یک تابع ِ آفین بر یک پارامتر- ِ-آفین ِ دیگر است. از اینجا دیده میشود پارامترها یِ آفین برا یِ هر ژئُدزیک ی که پوچ نباشد دقیقَن اثر ِ تابع- ِ-آفینها یِ (ِ غیر ِ ثابت) بر یک طول ِ جبری یِ نامعین برا یِ آن ژئُدزیک َند. میشود هم گفت برا یِ هر ژئُدزیک ی که پوچ نباشد، طول- ِ-جبری یِ نامعین اثر ِ یک تابع ِ آفین بر یک پارامتر- ِ-آفین است. اگر ژئُدزیک پوچ باشد، طول- ِ-جبری یِ نامعین ثابت است. پس در این حالت هم طول- ِ-جبری یِ نامعین اثر ِ یک تابع ِ آفین بر یک پارامتر- ِ-آفین است. البته در این حالت طول- ِ-جبری یِ نامعین پارامتر ِ خم نیست. نتیجه میشود برا ی هر ژئُدزیک (چه پوچ باشد و چه پوچ نباشد) طول- ِ-جبری یِ نامعین اثر ِ یک تابع ِ آفین بر یک پارامتر- ِ-آفین است.

صفر-گذاشتن ِ وردش ِ طول ِ یک خم با ابتدا و انتها یِ ثابت، به این مینجامد که آن خم معادله یِ ژئُدزیک را براورَد، به شرط ی که ژئُدزیک ِ متناظر پوچ نباشد. میشود به جا یِ طول تابع ِ دیگر ی از خمها را گرفت که محدودیت ِ پوچ-نبودن ِ ژئُدزیک هم حذف شود.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. متناظر با خم ِ γ دی-طول- ِ-جبری یِ γ از t_1 تا t_2

را با $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\begin{aligned}\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1) &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, g\{[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)],[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\},\\ &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, [(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\cdot[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]. \end{aligned} \tag{3184}$$

$\mathfrak{r}$ را یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{Al}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2),\mathfrak{r}(t_1)] &= \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{r}(t_1)}^{\mathfrak{r}(t_2)} \mathrm{d}r\, \{[\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})](r)\}\cdot\{[\mathbf{D}(\gamma\circ\mathfrak{r}^{-1})](r)\},\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{r}(t_1)}^{\mathfrak{r}(t_2)} \mathrm{d}r\, \Big(\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{r}^{-1}(r)]\}\cdot\{(\mathbf{D}\,\gamma)[\mathfrak{r}^{-1}(r)]\}\Big)\\ &\quad \{[\mathbf{D}\,(\mathfrak{r}^{-1})](r)\}^2,\\ &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, [(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)]\{[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\cdot[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\}\\ &\quad \{[\mathbf{D}\,(\mathfrak{r}^{-1})][\mathfrak{r}(t)]\}^2,\\ &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, [\mathbf{D}\,(\mathfrak{r}^{-1})][\mathfrak{r}(t)]\,\{[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\cdot[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\},\\ &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]\cdot[(\mathbf{D}\,\gamma)(t)]}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)}. \end{aligned} \tag{3185}$$

به این ترتیب، دی-طول- ِ-جبری تابع ی از خمها یِ مستقل-از-پارامتر نیست. دی-طول- ِ-جبری تابع ِ خمها یِ سمتدار ِ مستقل از پارامتر هم نیست. در حالت ِ کلی، دی-طول- ِ-جبری در اثر ِ تابع- ِ-بازپارامترشها (حتا تابع- ِ-بازپارامترشها یِ مثبت) تغییر میکند. اما دیده میشود دی-طول- ِ-جبری در اثر ِ انتقال ِ پارامتر تغییر نمیکند: دی-طول- ِ-جبری یِ پارامتر-منتقل-شده یِ یک خم، با دی-طول- ِ-جبری یِ آن خم برابر است.

یک تعریف ِ دیگر برا یِ ژئُدزیک، بر اساس ِ دی-طول است. $(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. خمها یی را میگیرم که ابتدا و انتها یِشان x_1 و x_2 (متناظر با پارامترها یِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خم ِ γ از این خمها دُ-ژئُدزیک است، اگر وردش ِ $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییر ِ $\mathsf{Al}_\gamma(t_2,t_1)$ تا مرتبه یِ یک نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. این یعنی اگر μ یک خانواده یِ یک-پارامتری از خمها باشد که (3157) تا (3159) را بر میئاورَد، و

$\mathfrak{L}$ چنین تعریف شود

$$\mathfrak{L}(s) = \mathsf{Al}_{\mu(\boldsymbol{\cdot},s)}(t_2, t_1), \tag{3186}$$

$(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(s_0)$ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}(t,s), \tag{3187}$$

که نتیجه میدهد اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد،

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(s) &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\mathbf{D}_{(0)}\,\mu]\}\Big)(t,s),\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}(t,s),\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}(t,s),\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\Big(\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\} - [\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}\Big)(t,s),\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{-[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\}(t,s).
\end{aligned} \tag{3188}$$

مراحل ِ استنتاج کاملَن مشابه با هم ان است که برا یِ یک-ژئُدزیک به کار رفت. از اینجا با تعریف ِ $\mathcal{E}_{[2]\,\gamma}$ با

$$\mathcal{E}_{[2]\,\gamma} = -\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma, \tag{3189}$$

دیده میشود

$$(\mathbf{D}\,\mathfrak{L})(s) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\{\mathcal{E}_{[2]\,\mu(\boldsymbol{\cdot},s)}(t)\}\cdot\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu](t,s)\}. \tag{3190}$$

γ دُ-ژئُدزیک است، اگر طرف ِ راست به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ $\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu](t,s_0)\}$ صفر باشد. این یعنی γ دُ-ژئُدزیک است، اگر

$$\mathcal{E}_{[2]\,\gamma}(t) = 0. \tag{3191}$$

به این ترتیب γ دُ-ژئُدزیک است، اگر

$$\boldsymbol{\nabla}\,\mathbf{D}\,\gamma = 0. \tag{3192}$$

برا یِ برقراری یِ این رابطه لازم نیست $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوچ نشود. دیده میشود این هم ان معادله یِ ژئُدزیک با پارامترش ِ آفین است. به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، دُ-ژئُدزیکها هم ان ژئُدزیکها یِ با پارامترش- ِ-آفین َند. پس اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، این دُ-گزاره همئرز َند.

- γ دُ-ژئُدزیک است.
- γ ژئُدزیک است و پارامتر ِ γ آفین است.

تعریفها یِ طول و دی-طول را میشود با یک پارامتر گسترش داد. $(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست و γ یک خم است. $(\mathfrak{n})$-طول- ِ-جبری یِ γ از t_1 تا t_2 را با $\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_\gamma(t_2, t_1)$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_\gamma(t_2, t_1) = \frac{1}{\mathfrak{n}} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, |(\mathbf{D}\,\gamma)(t)|^{\mathfrak{n}}. \tag{3193}$$

$\mathfrak{r}$ را یک تابع- ِ-بازپارامترش برا یِ γ میگیرم. دیده میشود

$$\begin{aligned}\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_{\mathfrak{r}_*\gamma}[\mathfrak{r}(t_2), \mathfrak{r}(t_1)] &= \frac{1}{\mathfrak{n}} \int_{\mathfrak{r}(t_1)}^{\mathfrak{r}(t_2)} \mathrm{d}r\, |[\mathbf{D}(\gamma \circ \mathfrak{r}^{-1})](r)|^{(\mathfrak{n})}, \\ &= \frac{1}{\mathfrak{n}} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, [(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)]|(\mathbf{D}\,\mathfrak{r})(t)|^{-\mathfrak{n}}\, |(\mathbf{D}\,\gamma)(t)|^{\mathfrak{n}},\end{aligned} \tag{3194}$$

که نشان میدهد $\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}$ در اثر ِ بازپارامترش تغییر میکند، مگر تابع- ِ-بازپارامترش انتقال- ِ-پارامتر باشد.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. خمها یی را میگیرم که ابتدا و انتها یِشان x_1 و x_2 (متناظر با پارامترها یِ، به ترتیب، t_1 و t_2) است. میگویم خم ِ γ از این خمها $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک است، اگر وردش ِ $\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_\gamma(t_2, t_1)$ نسبت به γ صفر باشد، یعنی وقت ی γ را تغییر میدهم تغییر ِ $\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_\gamma(t_2, t_1)$ تا مرتبه یِ یک نسبت به تغییر ِ γ صفر باشد. این یعنی اگر μ یک خانواده یِ یک-پارامتری از خمها باشد که (3157) تا (3159) را بر میئاورَد، و $\mathfrak{l}^{(\mathfrak{n})}$ چنین تعریف شود

$$\mathfrak{l}^{(\mathfrak{n})}(s) = \mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}_{\mu(\cdot,s)}(t_2, t_1), \tag{3195}$$

$\{\mathbf{D}[\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}]\}(s_0)$ صفر باشد. دیده میشود

$$\mathfrak{l}^{(\mathfrak{n})}(s) = \frac{1}{\mathfrak{n}} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, |\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\, \mu|^{\mathfrak{n}}(t, s), \tag{3196}$$

که، با روش ی مشابه ِ موارد ِ پیش (طول و دی-طول)، نتیجه میدهد اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد

$$\begin{aligned}\{\mathbf{D}\,[\mathfrak{l}^{(\mathfrak{n})}]\}(s) &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\Big[\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|^{\mathfrak{n}-2}\Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(1)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\Big)\Big](t,s),\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\Big[\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|^{\mathfrak{n}-2}\Big([\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\cdot[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\Big)\Big](t,s),\\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\Big\{-\Big[\overset{0}{\boldsymbol{\nabla}}_{(0)}\Big(\{\mathsf{sgn}[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu]\}|\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu|^{\mathfrak{n}-2}\,\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\mu\Big)\Big]\\ &\quad\cdot[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu]\Big\}(t,s)..\end{aligned}\tag{3197}$$

پس با تعریف ِ $\mathcal{E}_{\gamma}^{(\mathfrak{n})}$ با

$$\mathcal{E}_{\gamma}^{(\mathfrak{n})} = -\boldsymbol{\nabla}\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\},\tag{3198}$$

نتیجه میشود

$$\{\mathbf{D}\,[\mathfrak{l}^{(\mathfrak{n})}]\}(s) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,[\mathcal{E}_{\mu(\bullet,s)}^{(\mathfrak{n})}(t)]\cdot\{[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\mu](t,s)\}.\tag{3199}$$

به این ترتیب γ $(\mathfrak{n})$-ژئُدزیک است اگر

$$\mathcal{E}_{\gamma}^{(\mathfrak{n})}(t) = 0,\tag{3200}$$

یعنی اگر

$$\boldsymbol{\nabla}\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\} = 0.\tag{3201}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}\Big(\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}\cdot\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}\Big),\\ &= 2\Big(\boldsymbol{\nabla}\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}\Big)\\ &\quad\cdot\Big(\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}\Big).\end{aligned}\tag{3202}$$

همچنین،

$$[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{2\,\mathfrak{n}-2},$$
$$= \{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}\cdot\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{\mathfrak{n}-2}(\mathbf{D}\,\gamma)\}. \tag{3203}$$

پس اگر γ $(\mathfrak{n})$-ژنُدزیک باشد،

$$\mathbf{D}\{[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]|\mathbf{D}\,\gamma|^{2\,\mathfrak{n}-2}\} = 0. \tag{3204}$$

به این ترتیب، اگر γ $(\mathfrak{n})$-ژنُدزیک باشد و $\mathfrak{n}$ یک نباشد، $|\mathbf{D}\,\gamma|$ ثابت است. از اینجا شرطِ این که γ $(\mathfrak{n})$-ژنُدزیک باشد هم ان (3192) (صفر-شدنِ مشتق-ِ-همموردا یِ مشتقِ γ) است، یعنی این شرط که γ ژنُدزیک با پارامترِ آفین باشد. البته همه یِ اینها به شرط ی ست که مشتقِ γ پوچ نشود. به این ترتیب، اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، این دُ-گزاره همئرز َند.

- γ $(\mathfrak{n})$-ژنُدزیک با $\mathfrak{n}$ مخالفِ یک است.
- γ ژنُدزیک با پارامترِ آفین است و $(\mathbf{D}\,\gamma)$ پوج نمیشود.

تعریفها یِ $\mathsf{al}^{(\mathfrak{n})}$ و $(\mathfrak{n})$-ژنُدزیک در حالتِ $\mathfrak{n}$ برابر با 2، شبیهِ تعریفها یِ Al و دُ-ژنُدزیک َند، اما دقیقَن همانها نیستند. تفاوت در $[\mathsf{sgn}(\mathbf{D}\,\gamma)]$ است، که در تعریفها یِ Al و دُ-ژنُدزیک نیست. به هم ین خاطر برا یِ دُ-ژنُدزیک شرطِ پوچ-نشدنِ مشتقِ خم لازم نیست.

8

نقشِها یِ ویژه

77 نقشِها یِ دِکَرتی

متناظر با هر نقطه یِ x_0 در خمینه یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e هست که بخش ِ متقارن ِ هموستار ِ متناظر با e، در x_0 صفر میشود. در واقع متناظر با هر x_0 یک نقشه هست که هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن نقشه، در x_0 صفر میشود، اگر و تنها اگر هموستار در x_0 متقارن (بدون ِ پیچش) باشد. به نقشه یِ ϕ با این ویژِگی که هموستار ِ متناظر با آن (هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ) در x_0 صفر شود، یک نقشه یِ (تابع- ِ-مختصاتی یِ) هموستار-دِکَرتی در x_0 میگویم، یا میگویم نقشه یِ ϕ در x_0 هموستار-دِکَرتی ست.

$\mathbb{M}$ یک خمینه با هموستار ِ $\mathbf{\Gamma}$ است، که پیچش ِ متناظر با آن در x_0 صفر است. میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ ϕ را با e نشان میدهم. میخاهم نقشه یِ ϕ' را چنان بیابم که در x_0 هموستار-دِکَرتی باشد. دیده میشود

$$(\mathbf{D}_i\,\phi'^n)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} = (\mathbf{D}_j\,\phi'^l)(\mathbf{D}_k\,\phi'^p)[\mathbf{\Gamma}(e')]^n{}_{l\,p} + \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^n. \qquad (1755)$$

به این ترتیب صفر-شدن ِ $[\mathbf{\Gamma}(e')](x_0)$ میشود

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^n)(x_0) = \{(\mathbf{D}_i\,\phi'^n)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}\}(x_0). \tag{3205}$$

دیده میشود

$$(\boldsymbol{\nabla}_j\,\mathbf{D}\,\phi'^s)_k = \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s - \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}(\mathbf{D}_i\,\phi'^s). \tag{3206}$$

به این ترتیب یک شکل ِ بستِتر ِ (3205) چنین است.

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi'^s)(x_0) = 0. \tag{3207}$$

این رابطه با

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi')^s(x_0) = 0, \tag{3208}$$

یا

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi')(x_0) = 0, \tag{3209}$$

فرق دارد. ϕ'^s ها اسکالر َند. اما تا وقت ی تانسر ِ ϕ' تعریف نشده طرف ِ چپ ِ (3208) یا (3209) بیمعنی ست. البته میشد با ϕ'^s ها یک بردار ِ ϕ' ساخت. اما در این صورت $(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi')$ شامل ِ مشتق ِ $\mathbf{\Gamma}$ خاهد بود. مثلَن اگر تعریف شود

$$\phi' := \phi'^s\,e_s, \tag{3210}$$

به دست میئاید

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,\phi')^s{}_{j\,k} &= \mathbf{D}_j\,(\boldsymbol{\nabla}\,\phi')^s{}_k - \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\,(\boldsymbol{\nabla}\,\phi')^s{}_i + \mathbf{\Gamma}^s{}_{j\,i}\,(\boldsymbol{\nabla}\,\phi')^i{}_k,\\ &= \mathbf{D}_j(\mathbf{D}_k\,\phi'^s + \mathbf{\Gamma}^s{}_{k\,p}\,\phi'^p)\\ &\quad - \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}(\mathbf{D}_i\,\phi'^s + \mathbf{\Gamma}^s{}_{i\,p}\,\phi'^p)\\ &\quad + \mathbf{\Gamma}^s{}_{j\,i}(\mathbf{D}_k\,\phi'^i + \mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,p}\,\phi'^p),\end{aligned}$$

$$= \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s - \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s$$
$$+ (\mathbf{\Gamma}^s{}_{k\,p}\,\mathbf{D}_j + \mathbf{\Gamma}^s{}_{j\,p}\,\mathbf{D}_k)\phi'^p$$
$$+ (\mathbf{D}_j\,\mathbf{\Gamma}^s{}_{k\,p} + \mathbf{\Gamma}^s{}_{j\,i}\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,p} - \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}\,\mathbf{\Gamma}^s{}_{i\,p})\phi'^p. \qquad (3211)$$

دیده میشود جملِها یِ سطر ِ دوم و سوم در طرف ِ راست ِ برابری یِ آخر در رابطه یِ بالا، در طرف ِ راست ِ (3206) نیستند.

جواب ِ معادله یِ (3205) برا یِ ϕ' چنین است.

$$\phi'^n(x) = \phi'^n(x_0) + [(\mathbf{D}_i\,\phi'^n)(x_0)][\phi^i(x) - \phi^i(x_0)]$$
$$+ \frac{1}{2}[(\mathbf{D}_i\,\phi'^n)(x_0)]\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}(x_0)\}[\phi^j(x) - \phi^j(x_0)][\phi^k(x) - \phi^k(x_0)]$$
$$+ o[(x - x_0)^2]. \qquad (3212)$$

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. هموستار ِ لِوی-چیویتا متقارن است. پس در هر نقطه یِ x_0 از $\mathbb{M}$ میدان-پایه ای مختصاتی هست که هموستار ِ لِوی-چیویتا را در x_0 صفر میکند. از رابطه یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا با شبه- ِ-متریک دیده میشود شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که هموستار ِ لِوی-چیویتا در x_0 صفر شود این است که مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در x_0 صفر شود. به نقشه یِ ϕ با این ویژگی که مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن در x_0 صفر شود، یک نقشه یِ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی در x_0 میگویم، یا میگویم ϕ در x_0 شبه- ِ-متریک دِکَرتی ست. رُشن است که چنین نقشه ای با هموستار ِ لِوی-چیویتا در x_0 هموستار-دِکَرتی ست.

میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصات ِ ϕ را با e نشان میدهم. میخاهم مختصات ِ ϕ' را چنان بیابیم که هموستار ِ لِوی-چیویتا متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e' (متناظر با ϕ') در x_0 صفر شود. میشود معادله یِ صفر-شدن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در x_0 را نوشت، یا مستقیمَن رابطه یِ تغییر ِ مئلفِها یِ هموستار در تغییر ِ پایه را به کار بُرد. دومی هم ان است که برا یِ حالت ی به کار رفت که هموستار متقارن است. نتیجه میشود

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s)(x_0) = \{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k}\}(x_0), \qquad (3213)$$

که هم ان (3205) برا یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا ست. معادله یِ صفر-شدن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ

شبه- ِ-متریک هم از اینجا میئاید.

$$g_{j\,k} = (\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)g_{p'\,q'}. \tag{3214}$$

از این رابطه مشتق میگیرم:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_l\,g_{j\,k} &= [(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q) + (\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_k\,\phi'^q)]g_{p'\,q'}\\ &\quad + (\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)(\mathbf{D}_l\,g_{p'\,q'}).\end{aligned} \tag{3215}$$

صفر-شدن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در پایه یِ e' در x_0، همئرز است با

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_l\,g_{j\,k})(x_0) &= \{[(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)\\ &\quad + (\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_k\,\phi'^q)]g_{p'\,q'}\}(x_0),\end{aligned} \tag{3216}$$

یا، با استفاده از تقارن ِ شبه- ِ-متریک،

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_l\,g_{j\,k})(x_0) &= \{[(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)\\ &\quad + (\mathbf{D}_j\,\phi'^q)(\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)]g_{p'\,q'}\}(x_0).\end{aligned} \tag{3217}$$

از این رابطه (با تبدیل ِ دُری یِ شاخصها یِ j و k و l به هم) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l})(x_0) &= \{[(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)\\ &\quad + (\mathbf{D}_k\,\phi'^q)(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_l\,\phi'^p)]g_{p'\,q'}\}(x_0).\end{aligned} \tag{3218}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_k\,g_{l\,j})(x_0) &= \{[(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,\phi'^p)(\mathbf{D}_j\,\phi'^q)\\ &\quad + (\mathbf{D}_l\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,\phi'^q)]g_{p'\,q'}\}(x_0).\end{aligned} \tag{3219}$$

رابطه یِ (3217) را از مجموع ِ دُرابطه یِ اخیر کم میکنم. نتیجه میشود

$$(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,g_{j\,k})(x_0) = 2[g_{p'\,q'}(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)](x_0), \tag{3220}$$

که با استفاده از

$$g_{p'\,q'}(\mathbf{D}_l\,\phi'^q) = g_{r\,l}(\mathbf{D}_{p'}\,\phi^r), \tag{3221}$$

میشود

$$(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,g_{j\,k})(x_0) = 2[g_{r\,l}(\mathbf{D}_{p'}\,\phi^r)(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)](x_0), \tag{3222}$$

یا

$$\frac{1}{2}[g^{s\,l}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,g_{j\,k})](x_0) = [(\mathbf{D}_{p'}\,\phi^s)(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)](x_0), \tag{3223}$$

که یعنی

$$(\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}{}^s{}_{j\,k})(x_0) = [(\mathbf{D}_{p'}\,\phi^s)(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^p)](x_0). \tag{3224}$$

این هم ان (3213) است. جواب ِ (3213) برا یِ ϕ' چنین است

$$\begin{aligned}\phi'^s(x) = \phi'^s(x_0) &+ [(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)(x_0)][\phi^i(x) - \phi^i(x_0)]\\ &+ \frac{1}{2}[(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)(x_0)]\{[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^i{}_{j\,k}(x_0)\}[\phi^j(x) - \phi^j(x_0)][\phi^k(x) - \phi^k(x_0)]\\ &+ o[(x - x_0)^2],\end{aligned} \tag{3225}$$

که هم ان (3212) برا یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا ست. در حالت ِ کلی یی که هموستار (ِ حتا متقارن) با شبه- ِ-متریک سازگار نیست، صفر-شدن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در x_0 با صفر-شدن ِ هموستار در آن نقطه همئرز نیست. اما نقشه ای هست که مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن، در x_0 صفر است: هم ان نقشه یِ ϕ' در (3225) این ویژِگی را دارد، و البته این نقشه را میشود بر حسب ِ مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک (به جا یِ هموستار ِ لِوی-چیویتا) نوشت:

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s)(x_0) = \frac{1}{2}[(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)g^{l\,i}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,g_{j\,k})](x_0), \tag{3226}$$

که نتیجه میدهد

$$\phi'^s(x) = \phi'^s(x_0) + [(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)(x_0)][\phi^i(x) - \phi^i(x_0)]$$
$$+ \frac{1}{4}[(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)(x_0)]\{[g^{l\,i}(\mathbf{D}_j\,g_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,g_{j\,k})](x_0)\}$$
$$[\phi^j(x) - \phi^j(x_0)][\phi^k(x) - \phi^k(x_0)] + o[(x - x_0)^2]. \tag{3227}$$

صفر-شدن ِ $[\mathbf{\Gamma}(e')](x_0)$ (وقت ی هموستار متقارن است) شرط ی بر فقط مشتق ِ دوم ِ ϕ' است. به ازا یِ هر $\phi'(x_0)$ و $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$، یک و فقط مقدار برا یِ مشتق ِ دوم ِ ϕ' در x_0 هست، که به ازا یِ آن ϕ' در x_0 هموستار-دِکَرتی ست. در رابطه یِ (3205) که مشتق ِ دوم ِ ϕ' در x_0 را میدهد، خُد ِ $\phi'(x_0)$ وارد نمیشود، اما $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$ وارد میشود، و البته $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$ دلبخاه است، جز این باید وارونپذیر باشد. یک انتخاب برا یِ $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$ چنین است.

$$(\mathbf{D}_j\,\phi'^i)(x_0) = \delta^i_j, \tag{3228}$$

یا

$$(\mathbf{D}\,\phi')(x_0) = (\mathbf{D}\,\phi)(x_0). \tag{3229}$$

با این انتخاب، در x_0 پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ' هم ان پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ است:

$$e'_i(x_0) = e_i(x_0). \tag{3230}$$

در این حالت (3205) میشود

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s)(x_0) = [\mathbf{\Gamma}(e)]^s{}_{j\,k}\}(x_0). \tag{3231}$$

و جواب َش هم، که حالت ِ خاص ِ (3212) است، میشود

$$\phi'^i(x) = \phi'^i(x_0) + [\phi^i(x) - \phi^i(x_0)]$$
$$+ \frac{1}{2}\,\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}(x_0)\}[\phi^j(x) - \phi^j(x_0)][\phi^k(x) - \phi^k(x_0)]$$
$$+ o[(x - x_0)^2]. \tag{3232}$$

از جمله با انتخاب ِ

$$\phi'(x_0) = \phi(x_0), \tag{3233}$$

علاوه بر (3229)، رابطه یِ (3232) میشود

$$\phi'^i(x) = \phi^i(x) + \frac{1}{2}\{[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}(x_0)\}[\phi^j(x) - \phi^j(x_0)][\phi^k(x) - \phi^k(x_0)] + o[(x - x_0)^2]. \tag{3234}$$

این ϕ' نقشه ای ست که در x_0 هموستار-دِکَرتی ست و تا حد ِ مشتق ِ اول (در x_0) هم ان ϕ است. چنین نقشه ای تا حد ِ مشتق ِ دوم (در x_0) یکتا ست.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست، که هموستار َش متقارن است. x_0 یک نقطه در $\mathbb{M}$ است. از نقشِها یی که در x_0 هموستار-دِکَرتی یَند، یک نقشه یِ ϕ' هست که $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$ چنان است که در x_0، ماتریس ِ شبه- ِ-متریک در پایه یِ e' (میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ') قطری ست:

$$g_{k'\,l'} = 0, \quad l \neq k, \tag{3235}$$

یعنی e' در x_0 متعامد است. در این حالت میگویم نقشه یِ ϕ' در x_0 هموستار-دِکَرتی و متعامد است. همچنین، از نقشِها یی که در x_0 هموستار-دِکَرتی یَند، یک نقشه یِ ϕ' هست که $(\mathbf{D}\,\phi')(x_0)$ چنان است که در x_0، ماتریس ِ شبه- ِ-متریک در پایه یِ e' قطری ست و عنصرها یِ قطری یَش ± 1 اند:

$$|g_{k'\,l'}| = \delta_{k\,l}, \tag{3236}$$

یعنی e' در x_0 یکه-متعامد است. در این حالت میگویم نقشه یِ ϕ' در x_0 هموستار-دِکَرتی و یکه-متعامد است. رُشن است که برا یِ نقشِها یِ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی در x_0 هم این انتخابها (در x_0 پایه یِ جدید هم ان پایه یِ قدیم باشد، نقشه متعامد باشد، یا نقشه یکه-متعامد باشد) شدنی ست.

این که میشود هموستار ِ متقارن ِ متناظر با یک پایه یِ مختصاتی را در یک نقطه صفر کرد، یا مشتق ِ مثلفِها یِ شبه- ِ-متریک در آن پایه یِ مختصاتی را در آن نقطه صفر کرد، با شمارش ِ تعداد ِ شرطها و درجه-یِ-آزادی یِ مشتق ِ دوم ِ نقشه هم دیده میشود. یک هموستار ِ متقارن 3 شاخص دارد و نسبت به 2 تا از شاخصها یَش متقارن است. مشتق ِ دوم ِ نقشه هم 3 شاخص دارد و نسبت به 2 تا از

شاخصها یَش متقارن است. مشتق ِ اول ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک هم 3 شاخص دارد و نسبت به 2 تا از شاخصها یَش متقارن است. به این ترتیب، تعداد ِ شرطها یِ لازم برا یِ صفرکردن ِ یک هموستار ِ متقارن در یک نقطه، یا مشتق ِ اول ِ مئلفِها یِ متریک در آن نقطه، برابر ِ درجه-یِ-آزادی یِ مشتق ِ نقشه در آن نقطه است:

$$\mathsf{df}(\mathbf{\Gamma}) = \frac{m^2(m+1)}{2}. \tag{3096}$$

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,g) = \frac{m^2(m+1)}{2}. \tag{3237}$$

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\phi) = \frac{m^2(m+1)}{2}, \tag{3238}$$

که m بُعد ِ خمینه است. به این ترتیب یک و فقط یک دسته عدد برا یِ مشتق ِ دوم ِ نقشه در یک نقطه هست (با معلوم-بودن ِ مشتق ِ اول ِ نقشه در آن نقطه) که مئلفِها یِ هموستار در آن نقطه را صفر میکنند، یا مشتق ِ اول ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در آن نقطه را صفر میکنند. البته اگر هموستار ِ متقارن با شبه- ِ-متریک سازگار نباشد، شرطها یِ صفر-شدن ِ مئلفِها یِ هموستار در یک نقطه با شرطها یِ صفر-شدن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ متریک در آن نقطه یک ی نیست، هر چند تعداد ِ شرطها یِ این دُ-دسته یکسان است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ m بُعدی ست، که هموستار َش متقارن است. با انتخاب ِ مناسب ِ نقشه، میشود مئلفِها یِ هموستار را در یک نقطه صفر کرد. اما با انتخاب ِ مناسب ِ نقشه، لزومَن نمیشود مئلفِها یِ هموستار و مشتق ِ این مئلفِها را در یک نقطه صفر کرد. اگر مئلفِها یِ هموستار و مشتق ِ آنها در یک نقطه صفر شوند، تانسر ِ خمش در آن نقطه صفر میشود:

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l} = \mathbf{D}_k\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,j} - \mathbf{D}_l\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,j} + \mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,p}\,\mathbf{\Gamma}^p{}_{l\,j} - \mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,p}\,\mathbf{\Gamma}^p{}_{k\,j}. \tag{2035}$$

پس اگر تانسر ِ خمش در یک نقطه صفر نباشد، نمیشود مئلفِها یِ هموستار و مشتق ِ این مئلفِها را در آن نقطه صفر کرد. این (که لزومَن نمیشود مئلفِها یِ یک هموستار ِ متقارن و مشتق ِ این مئلفِها را در یک نقطه صفر کرد) با شمارش ِ شرطها و درجه-یِ-آزادی هم دیده میشود. وضع برا یِ مشتق ِ دوم ِ

مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در آن نقطه هم مشابه است:

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\mathbf{\Gamma}) = \frac{m^3(m+1)}{2}. \tag{3239}$$

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,g) = \frac{m^2(m+1)^2}{4}. \tag{3240}$$

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\mathbf{D}\,\phi) = \frac{m^2(m+1)(m+2)}{6}. \tag{3241}$$

این را میشود برا یِ مشتقها یِ بالاتر هم بررسی کرد: مشتق ِ nُم ِ مئلفِها یِ یک هموستار ِ متقارن $(n+3)$ شاخص دارد، نسبت به 2 شاخص متقارن و نسبت به n شاخص ِ دیگر هم متقارن است. مشتق ِ $(n+1)$ُم ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک $(n+3)$ شاخص دارد، نسبت به 2 شاخص متقارن و نسبت به $(n+1)$ شاخص ِ دیگر هم متقارن است. مشتق ِ $(n+2)$ُم ِ نقشه $(n+3)$ شاخص دارد، و نسبت به $(n+2)$ شاخص متقارن است. به این ترتیب

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}] = m\binom{m+1}{2}\binom{m+n-1}{n}, \tag{3242}$$

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g] = \binom{m+1}{2}\binom{m+n}{n+1}, \tag{3243}$$

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+2}\,\phi] = m\binom{m+n+1}{n+2}, \tag{3244}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}] = \frac{(m+1)\,m}{2}\,\frac{(n+2)\,(n+1)}{(m+n+1)(m+n)}\,\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+2}\,\phi]. \tag{3245}$$

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}] = \frac{m}{1}\,\frac{n+1}{m+n}\,\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g]. \tag{3246}$$

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g] = \frac{m+1}{2}\,\frac{n+2}{m+n+1}\,\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+2}\,\phi]. \tag{3247}$$

ضریب ِ df در طرف ِ راست ِ رابطِها یِ بالا، در $n=0$ یا $m=1$ برابر ِ 1 میشود. برا یِ $m>1$، ضریب ِ df در طرف ِ راست ِ رابطِها یِ بالا نسبت به n صعودی ست. پس برا یِ $m>1$ و $n>0$، ضریب ِ df در طرف ِ راست ِ رابطِها یِ بالا بزرگتر از 1 است. به این ترتیب،

$$\mathsf{df}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}] > \mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g] > \mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+2}\,\phi], \quad [(m>1)\wedge(n>0)]. \tag{3248}$$

پس در حالت ِ کلی نقشه ای نیست که به ازا یِ آن در یک نقطه مشتقها یِ (از مرتبه یِ بیش از صفر ِ) مئلفِها یِ هموستار یا مشتقها یِ از مرتبه یِ بیش از یک ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک صفر شوند. اما با

انتخاب ِ مناسب ِ نقشه میشود ترکیبها یی از مشتقها یِ مئلفِها یِ هموستار، یا ترکیبها یی از مشتقها یِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک را صفر کرد. مشتق ِ nُم ِ مئلفِها یِ هموستار 1 شاخص ِ بالا و $(n+2)$ شاخص ِ پایین دارد. از این شاخصها یِ پایین، 2 تا مال ِ خُد ِ هموستار و n تا مال ِ مشتقگیری ست. متقارن-شده یِ مشتق ِ nُم ِ مئلفِها یِ هموستار نسبت به شاخصها یِ پایین، نسبت به $(n+2)$ شاخص متقارن است. متقارن-شده یِ مشتق ِ $(n+1)$ُم ِ شبه- ِ-متریک نسبت به شاخصها یِ مشتقگیری و یک ی از شاخصها یِ شبه- ِ-متریک، نسبت به $(n+2)$ شاخص متقارن است:

$$\mathsf{df}\{\mathsf{Sym}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}_{\{2,3\}}]\} = m\binom{m+n+1}{n+2}. \tag{3249}$$

$$\mathsf{df}\{\mathsf{Sym}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g_{\{1\}}]\} = m\binom{m+n+1}{n+2}. \tag{3250}$$

$$\mathsf{df}\{\mathsf{Sym}[(\mathbf{D})^{n+1}\,g_{\{2\}}]\} = m\binom{m+n+1}{n+2}. \tag{3251}$$

دیده میشود طرفها یِ راست ِ این رابطِها با $\mathsf{df}[(\mathbf{D})^{n+2}\,\phi]$ برابر َند. پس با انتخاب ِ نقشه میشود در یک نقطه متقارن-شده یِ مشتق ِ مئلفِها یِ هموستار یا متقارن-شده یِ مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک را صفر کرد.

متقارن-شده یِ مشتق ِ nُم ِ هموستار ِ $\mathbf{\Gamma}$ نسبت به شاخصها یِ پایین را با $\mathsf{D}_n\,\mathbf{\Gamma}$ نشان میدهم:

$$\mathsf{D}_n\,\mathbf{\Gamma} = \mathsf{Sym}[(\mathbf{D})^n\,\mathbf{\Gamma}_{\{2,3\}}]. \tag{3252}$$

رُشن است که

$$\mathsf{D}_{n+1}\,\mathbf{\Gamma} = \mathsf{Sym}[\mathbf{D}(\mathsf{D}_n\,\mathbf{\Gamma})]. \tag{3253}$$

تعریف ِ (3252) بر حسب ِ مئلفِها میشود

$$(\mathsf{D}_n\,\mathbf{\Gamma})^i{}_{j_{n+2}\dots j_1} = \frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}} \mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}}\cdots\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(3)}}\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{[j_{\mathfrak{p}^{-1}(2)}]\,[j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]}. \tag{3254}$$

از جمله،

$$(\mathsf{D}_0\,\mathbf{\Gamma})^i{}_{j\,k} = \frac{1}{2}(\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k} + \mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,j}). \tag{3255}$$

$$\begin{aligned}(\mathsf{D}_1\,\mathbf{\Gamma})^i{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{6}(&\mathbf{D}_j\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,l} + \mathbf{D}_j\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,k} + \mathbf{D}_k\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,l}\\ &+ \mathbf{D}_k\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{l\,j} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,j}).\end{aligned} \tag{3256}$$

اینها برا یِ هموستارها یِ متقارن سادِتر میشوند:

$$(\mathsf{D}_0\,\mathbf{\Gamma})^i{}_{j\,k} = \mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}, \qquad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3257}$$

$$(\mathsf{D}_1\,\mathbf{\Gamma})^i{}_{j\,k\,l} = \frac{1}{3}(\mathbf{D}_j\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,l} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{\Gamma}^i{}_{j\,k}), \quad \boldsymbol{T} = 0. \tag{3258}$$

به این ترتیب رابطه یِ (1755) بین ِ مئلفِها یِ هموستارها یِ متناظر با دُ میدان-پایه یِ مختصاتی را میشود چنین نوشت.

$$(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathsf{D}_0\,\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k} = (\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)[\mathsf{D}_0\,\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'} + \mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s, \tag{3259}$$

همچنین، با n بار مشتقگیری از (1755) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_3}\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j_2\,j_1}\},\\ &= \mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_3}\{(\mathbf{D}_{j_2}\,\phi'^{k_2})(\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^{k_1})[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{k'_2\,k'_1}\}\\ &\quad + \mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^s,\\ &= (\mathbf{D}_{j_{n+2}}\,\phi'^{k_{n+2}})\cdots(\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^{k_1})\mathbf{D}_{k'_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{k'_3}\,[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{k'_2\,k'_1}\\ &\quad + \mathfrak{J}^s{}_{j_{n+2}\cdots j_1} + \mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^s,\end{aligned} \tag{3260}$$

که آ مجموع ِ جملِها یی ست که هر کدام حاصل- ِ-ضرب ِ یک مشتق ِ $[\mathbf{\Gamma}(e')]$ از مرتبه یِ کوچکتر از n، در تعداد ی از مشتقها یِ ϕ' است، که مرتبه یِ هر یک از این مشتقها یِ ϕ' از $(n+2)$ کوچکتر است. متقارن-شده یِ (3260) نسبت به j_1 تا j_{n+2} را بررسی میکنم. جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست ِ (3260)، مشتق ِ $(n+2)$ وُم ِ ϕ'، نسبت به j_1 تا j_{n+2} متقارن است. برا یِ متقارن-شده یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (3260)،

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}}[\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}}\,\phi'^{k_{n+2}}]\cdots[\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}}\,\phi'^{k_1}]\\
&\mathbf{D}_{k'_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{k'_3}\,[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{k'_2\,k'_1},\\
&=\frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}}[\mathbf{D}_{j_{n+2}}\,\phi'^{k_{n+2}}]\cdots[\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^{k_1}]\\
&\mathbf{D}_{k'_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}}\cdots\mathbf{D}_{k'_{\mathfrak{p}^{-1}(3)}}\,[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{[k'_{\mathfrak{p}^{-1}(2)}]\,[k'_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]},\\
&=[\mathbf{D}_{j_{n+2}}\,\phi'^{k_{n+2}}]\cdots[\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^{k_1}]\{\mathsf{D}'_n\,[\mathbf{\Gamma}(e')]\}^{s'}{}_{k'_{n+2}\cdots k'_1},
\end{aligned}\tag{3261}$$

که D' مثل ِ D اما با پایه یِ پریمدار تعریف شده. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}}\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}}\cdots\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(3)}}\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{[j_{\mathfrak{p}^{-1}(2)}]\,[j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]}\},\\
&=[\mathbf{D}_{j_{n+2}}\,\phi'^{k_{n+2}}]\cdots[\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^{k_1}]\{\mathsf{D}'_n\,[\mathbf{\Gamma}(e')]\}^{s'}{}_{k'_{n+2}\cdots k'_1}\\
&\quad+\frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}}\mathfrak{J}^s{}_{[j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}]\cdots[j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]}+\mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^s,
\end{aligned}\tag{3262}$$

و شرط ِ این که متقارن-شده یِ مشتق ِ nُم ِ $[\mathbf{\Gamma}(e')]$ در x_0 صفر شود میشود

$$\begin{aligned}
(\mathbf{D}_{j_{n+2}}\cdots\mathbf{D}_{j_1}\,\phi'^s)(x_0)=\frac{1}{(n+2)!}\sum_{\mathfrak{p}\in\mathcal{S}_{n+2}}\Big(&\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}}\cdots\mathbf{D}_{j_{\mathfrak{p}^{-1}(3)}}\\
&\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{[j_{\mathfrak{p}^{-1}(2)}]\,[j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]}\}\\
&-\mathfrak{J}^s{}_{[j_{\mathfrak{p}^{-1}(n+2)}]\cdots[j_{\mathfrak{p}^{-1}(1)}]}\Big)(x_0).
\end{aligned}\tag{3263}$$

آ شامل ِ با مشتقها یِ با مرتبه یِ کمتر از n از مئلفِها یِ $[\mathbf{\Gamma}(e')]$ است، که میشود آنها را بر حسب ِ مئلفِها یِ $[\mathbf{\Gamma}(e)]$ و مشتقها یِ با مرتبه یِ کمتر از n از آنها، و نیز مشتقها یِ با مرتبه یِ کمتر از $(n+2)$

از ϕ' نوشت. از جمله برا یِ $(n=1)$،

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,\phi'^s)(x_0) &= \frac{1}{6}\Big(\mathbf{D}_l\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,k}\}+\mathbf{D}_l\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{k\,j}\}\\
&\quad+\mathbf{D}_k\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{j\,l}\}+\mathbf{D}_k\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{l\,j}\}\\
&\quad+\mathbf{D}_j\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{k\,l}\}+\mathbf{D}_j\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)[\mathbf{\Gamma}(e)]^i{}_{l\,k}\}\Big)(x_0)\\
&\quad-\frac{1}{6}\Big(\{\mathbf{D}_l[(\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\\
&\quad+\{\mathbf{D}_l[(\mathbf{D}_k\,\phi'^p)(\mathbf{D}_j\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\\
&\quad+\{\mathbf{D}_k[(\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\\
&\quad+\{\mathbf{D}_k[(\mathbf{D}_l\,\phi'^p)(\mathbf{D}_j\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\\
&\quad+\{\mathbf{D}_j[(\mathbf{D}_k\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\\
&\quad+\{\mathbf{D}_j[(\mathbf{D}_l\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)]\}[\mathbf{\Gamma}(e')]^{s'}{}_{p'\,q'}\Big)(x_0),\\
&= \Big((\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_1[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,k\,l}\Big)(x_0)\\
&\quad+\frac{1}{3}\Big((\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,k}\\
&\quad+(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,l}\\
&\quad+(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{k\,l}\Big)(x_0)\\
&\quad-\Big(\frac{1}{3}\{\mathbf{D}_l[(\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_k\,\phi'^q)]+\mathbf{D}_k[(\mathbf{D}_j\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)]\\
&\quad+\mathbf{D}_j[(\mathbf{D}_k\,\phi'^p)(\mathbf{D}_l\,\phi'^q)]\}\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e')]\}^{s'}{}_{p'\,q'}\Big)(x_0). \qquad (3264)
\end{aligned}
$$

دیده میشود از شرط ِ صفر-شدن ِ بخش ِ متقارن ِ مشتق ِ nُم ِ مئلفِها یِ هموستار در x_0، مشتق ِ $(n+2)$ وُم ِ نقشه در x_0، بر حسب ِ مشتقها یِ نقشه با مرتبه یِ نابزرگتر از $(n+1)$ و مشتقها یِ مئلفِها یِ هموستار ِ متناظر با نقشه یِ قدیم با مرتبه یِ نابزرگتر از n، همه در x_0، به دست میئاید. به این ترتیب، این خاسته که بخش ِ متقارن ِ همه یِ مشتقها یِ مئلفِها یِ هموستار با مرتبه یِ نابزرگتر از n در x_0 صفر شود، مشتقها یِ دوم تا $(n+2)$ وُم ِ نقشه در x_0 را (البته بر حسب ِ مشتق ِ اول ِ نقشه و مئلفِها یِ هموستار ِ متناظر با نقشه یِ قدیم و مشتقها یِ آنها با مرتبه یِ نابزرگتر از n، همه در x_0) تعیین

میکند. از جمله برا یِ $(n=1)$، شرطها میشوند

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\phi'^s)(x_0)=\{(\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,k}\}(x_0). \tag{3265}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,\phi'^s)(x_0)=&\Big((\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_1[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,k\,l}\Big)(x_0)\\&+\frac{1}{3}\Big((\mathbf{D}_l\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,k}\\&+(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{j\,l}\\&+(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_i\,\phi'^s)\{\mathsf{D}_0[\mathbf{\Gamma}(e)]\}^i{}_{k\,l}\Big)(x_0).\end{aligned} \tag{3266}$$

این رابطِها خاص ِ هموستار ِ لِوی-چیویتا نیستند، حتا خاص ِ هموستار ِ متقارن (بدون- ِ-پیچش) یا سازگار-با-شبه- ِ-متریک هم نیستند.

این که بخش ِ متقارن ِ هموستار در x_0 صفر شود شرط ی بر مشتق ِ دوم ِ نقشه در x_0 است. این که مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در x_0 صفر شود هم شرط ی بر مشتق ِ دوم ِ نقشه در x_0 است. این شرط ِ دوم هم ان شرط ِ صفر-شدن ِ بخش ِ متقارن ِ هموستار در x_0 است، اگر و تنها اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، که در این صورت خُد ِ هموستار در x_0 صفر میشود. در واقع از

$$\mathbf{D}_k\,g_{l\,n}=[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{l\,k\,n}+[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,k\,l} \tag{3267}$$

مستقیمَن دیده میشود اگر هموستار- ِ-لِوی-چیویتا یِ متناظر با میدان-پایه یِ e در x_0 صفر شود، مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در پایه یِ e هم در x_0 صفر میشود.

از (3267) مشتق میگیرم:

$$\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,g_{l\,n}=\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{l\,k\,n}+\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,k\,l}. \tag{3268}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,g_{l\,n}+\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,g_{j\,n}+\mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,g_{k\,n},\\&=\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{l\,k\,n}+\mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{j\,l\,n}+\mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{k\,j\,n}\\&\quad+\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,k\,l}+\mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,l\,j}+\mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,j\,k}.\end{aligned} \tag{3269}$$

گیرم هموستار- ِ-لوی-چیویتا متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ e در x_0 صفر شود. در این صورت

مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ e هم در x_0 صفر میشود. به این ترتیب،

$$\{\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{m\,k\,l}\}(x_0) = \Big(\mathbf{D}_j\{g_{m\,p}\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^p{}_{k\,l}\}\Big)(x_0),$$
$$= \{g_{m\,p}\,\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^p{}_{k\,l}\}(x_0). \qquad (3270)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\{\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,k\,l} + \mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,l\,j} + \mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{n\,j\,k}\}(x_0),$$
$$= [g_{n\,p}(x_0)]\{\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^p{}_{k\,l} + \mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^p{}_{l\,j} + \mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]^p{}_{j\,k}\}(x_0). \qquad (3271)$$

پس در این حالت صفر-شدن ِ $\mathsf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ در x_0، با صفر-شدن ِ طرف ِ چپ در رابطه یِ بالا همئرز است. گیرم $\mathsf{D}_0\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ و $\mathsf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ در x_0 صفر َند. قبلَن دیده شد نقشه ای هست که چنین ویژِگی یی دارد. در این صورت مجموع ِ سه-جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست ِ (3269)، در x_0 صفر است. پس

$$(\mathbf{D}_j\,\mathbf{D}_k\,g_{l\,n} + \mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,g_{j\,n} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,g_{k\,n})(x_0),$$
$$= \{\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{l\,k\,n} + \mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{j\,l\,n} + \mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{k\,j\,n}\}(x_0). \qquad (3272)$$

در این حالت صفر-شدن ِ طرف ِ چپ در رابطه یِ بالا همئرز است با

$$\{\mathbf{D}_j\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{l\,k\,n} + \mathbf{D}_k\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{j\,l\,n} + \mathbf{D}_l\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{k\,j\,n}\}(x_0) = 0. \qquad (3273)$$

این شرط ی اضافه بر آن است که $\mathsf{D}_0\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ و $\mathsf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ در x_0 صفر شوند. مثلَن اگر خمینه دُ-بُعدی باشد، از (3242) و (3249) نتیجه میشود

$$\mathsf{df}\{\mathbf{D}[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]\} = 12. \qquad (3274)$$

$$\mathsf{df}\{\mathsf{D}_1[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]\} = 8. \qquad (3275)$$

شرطها یِ صفر-شدن ِ $\mathsf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]$ در x_0 (با اعمال ِ تقارن ِ مئلفِها یِ هموستار نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم) میشوند

$$\{3\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = 0. \qquad (3276)$$

$$\{2\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2} + \mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = 0. \qquad (3277)$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2} + 2\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3278}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3279}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3280}$$

$$\{2\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2} + \mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3281}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2} + 2\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3282}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3283}$$

با اینها همه یِ مئلفِها یِ $\{\mathbf{D}[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]\}(x_0)$ بر حسب ِ 4 تا از مئلفِها یِ $\{\mathbf{D}[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]]\}(x_0)$ تعیین میشوند. مثلَن میشود همه یِ مئلفِها یِ $\{\mathbf{D}[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]]\}(x_0)$ را بر حسب ِ $\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)$ و $\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)$ و $\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0)$ و $\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0)$ تعیین کرد:

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3284}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}\}(x_0) = -2\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0). \tag{3285}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = -2\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0). \tag{3286}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3287}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3288}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0) = -2\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0). \tag{3289}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0) = -2\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0). \tag{3290}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0) = 0. \tag{3291}$$

شرطها یِ (3273) هم میشوند

$$\{3\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3292}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,1} + \mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1} + \mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3293}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,1} + \mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,1} + \mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3294}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,1}\}(x_0) = 0. \tag{3295}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)=0. \tag{3296}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}+\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}+\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)=0. \tag{3297}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}+\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}+\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0)=0. \tag{3298}$$

$$\{3\,\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0)=0. \tag{3299}$$

با این معادلِها (و البته با توجه به تقارن ِ مئلفِها یِ هموستار نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم) شرطها یی اضافی بر مشتق ِ مئلفِها یِ هموستار به دست میئاید: همه را میشود بر حسب ِ $\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0)$ تعیین کرد:

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0)=0. \tag{3284}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)=0. \tag{3300}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}\}(x_0)=-2\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0). \tag{3301}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0)=0. \tag{3288}$$

$$\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0)=0. \tag{3302}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,1}\}(x_0)=0. \tag{3303}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,1\,2}\}(x_0)=\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0). \tag{3304}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{1\,2\,2}\}(x_0)=0. \tag{3287}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,1}\}(x_0)=-2\{\mathbf{D}_1\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0). \tag{3290}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,1\,2}\}(x_0)=0. \tag{3305}$$

$$\{\mathbf{D}_2\,[\underset{\circ}{\mathbf{\Gamma}}(e)]_{2\,2\,2}\}(x_0)=0. \tag{3291}$$

پس معادلِها یِ (3273) سه شرط ِ مستقل ِ اضافی بر مشتق ِ مئلفِها یِ هموستار اعمال میکنند. دیده میشود این که هموستار ِ لِوی-چیویتا و بخش ِ متقارن ِ مشتق ِ آن در x_0 صفر شوند، لزومَن نتیجه نمیدهد متقارن-شده یِ مشتق ِ دوم ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک نسبت به شاخصها یِ مشتقگیری و یک شاخص ِ شبه- ِ-متریک هم در x_0 صفر َند.

$\mathbb{M}$ یک خمینه است. اگر این خمینه مُضعَن-تخت باشد، متناظر با هر نقطه یِ x_0 از آن یک

همسایِگی هست که در آن یک میدان-پایه هست که هموستار ِ متناظر با آن میدان-پایه صفر است. این میدان-پایه مختصاتی ست، اگر و تنها اگر پیچش هم صفر باشد. برعکس هم، رُشن است که اگر یک نقشه یِ ϕ باشد که هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ صفر باشد (نقشه هموستار-دِکَرتی باشد)، خمش و پیچش هر-دُ صفر َند. برا یِ وجود ِ یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی در فقط یک نقطه، لازم و کافی بود پیچش در آن نقطه صفر باشد. برا یِ وجود ِ یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی در یک ناحیه یِ باز، باید خمش هم در آن ناحیه صفر شود. رُشن است که اگر ϕ در یک مجموعه یِ باز یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی باشد، همه یِ مشتقها یِ مئلفِها یِ هموستار ِ متناظر با میدان-پایه یِ متناظر با ϕ هم در آن مجموعه صفر َند. اگر شرط ِ صفربودن ِ خمش و پیچش نبود، با انتخاب ِ مناسب ِ نقشه میشد دست- ِ-بالا در یک نقطه بخش ِ متقارن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ هموستار را (تا یک مرتبه یِ دلبخاه ولی باپایان) صفر کرد. اگر خمش و پیچش در یک خمینه صفر شوند، با انتخاب ِ مناسب ِ نقشه میشود همه یِ مشتقها یِ هموستار را صفر کرد.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. اگر پیچش و خمش صفر شوند، متناظر با نقطه یِ x_0 یک همسایِگی یِ x_0 هست که یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی دارد. این که پیچش صفر است، یعنی هموستار متقارن است، اما لازم نیست هموستار با شبه- ِ-متریک سازگار باشد. در میدان-پایه یِ متناظر با یک نقشه یِ هموستار-دِکرتی،

$$(\boldsymbol{\nabla}\, g)_{i\,j} = \mathbf{D}\, g_{i\,j}. \tag{3306}$$

به این ترتیب هموستار ِ تخت ِ بدون- ِ-پیچش با شبه- ِ-متریک سازگار است، اگر و تنها اگر مشتق ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ متناظر با یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی صفر باشد. این یعنی یک نقشه یِ هموستار-دِکَرتی شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست، اگر و تنها اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد. البته حتا اگر هموستار لِوی-چیویتا باشد، لزومَن نقشه ای نیست که همزمان بخش ِ متقارن ِ مشتق ِ مئلفِها یِ هموستار با مرتبه یِ نابزرگتر از n و بخش ِ متقارن ِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک با مرتبه یِ نابزرگتر از $(n+1)$ را در یک نقطه یِ x_0 صفر کند، مگر برا یِ $(n=0)$. اما اگر خمش و پیچش در یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی با هموستار ِ لِوی-چیویتا صفر باشند، همه یِ مشتقها یِ مئلفِها یِ هموستار و همه یِ مشتقها یِ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک را میشود همزمان صفر کرد.

78 نقشه یِ گاؤسی-بهنجار

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ m بُعدی ست. دنبال ِ یک نقشه یِ ϕ' هستم، که میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن را با e' نشان میدهم، چنان که e'_0 پوچ نباشد و

$$g_{0'\,p'} = [\mathsf{sgn}(e'_0)]\delta_{0\,p}, \tag{3307}$$

که مئلفِها در e' نوشته شده اند. البته از پیوستِگی یِ e'_0 نتیجه میشود اگر e'_0 پوچ نباشد علامت ِ آن ثابت است. برا یِ این که معلوم شود چنین نقشه ای مُضعَن هست، رابطه یِ بالا را بر حسب ِ نقشه یِ ϕ' و مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با یک نقشه یِ ϕ مینویسم:

$$g_{i\,j}(\mathbf{D}_{0'}\,\phi^i)(\mathbf{D}_{p'}\,\phi^j) = \{\mathsf{sgn}[g_{i\,j}(\mathbf{D}_{0'}\,\phi^i)(\mathbf{D}_{0'}\,\phi^j)]\}\delta_{0\,p}. \tag{3308}$$

این دستگاه m معادله برا یِ m متغیر (مئلفِها یِ نقشه یِ ϕ') است. شکل ِ صریحتر ِ این دستگاه بر حسب ِ ϕ' (در واقع ِ مشتق ِ ϕ') چنین است.

$$M^q{}_l = \mathbf{D}_l\,\phi'^q,$$

$$g_{i\,j}\,(M^{-1})^i{}_0\,(M^{-1})^j{}_p = \{\mathsf{sgn}[g_{i\,j}\,(M^{-1})^i{}_0\,(M^{-1})^j{}_0]\}\delta_{0\,p}. \tag{3309}$$

البته حل ِ این دستگاه ساده نمینماید. اما از این که تعداد ِ معادلِها با تعداد ِ مجهولها برابر است، برمیئاید دستگاه جواب داشته باشد.

میکوشم برا یِ (3307) جواب بسازم. برا یِ این کار زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ از $\mathbb{M}$ را میگیرم، که از نقطه یِ x_0 میگذرد و بُعد َش $(m-1)$، یعنی یک ی کمتر از بُعد ِ خمینه، است؛ یک نقشه یِ $\tilde{\phi}$ دارد که دامنه اَش $\tilde{\mathbb{M}}$ است؛ و در هر نقطه یِ $\tilde{x}$ در $\tilde{\mathbb{M}}$ بردارها یِ ناصفر ی در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\mathbb{M}$ که بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود َند پوچ نیستند. از پیوستِگی یِ شبه- ِ-ضرب و هموار-بودن ِ $\tilde{\mathbb{M}}$ نتیجه میشود اگر شرط ِ اخیر برا یِ فقط x_0 برقرار باشد، یعنی بردارها یِ ناصفر ی در $\mathrm{T}_{x_0}\mathbb{M}$ که بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{x_0}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود َند پوچ نباشند، آنگاه یک همسایِگی یِ x_0 در $\tilde{\mathbb{M}}$ هست که در آن این شرط برقرار است، یعنی به ازا یِ هر نقطه یِ $\tilde{x}$ از آن همسایِگی $(\mathbb{S})$ بردارها یِ ناصفر ی در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\mathbb{M}$ که بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\mathbb{S}$ عمود َند پوچ نیستند. در این صورت این همسایِگی یِ x_0 را به جا یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ به کار میبرم. میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با $\tilde{\phi}$ را با $\tilde{e}$ نشان میدهم. با تعریف ِ $\tilde{v}$ با

$$\tilde{v} = \mathbf{a}(\tilde{e}_1, \ldots \tilde{e}_{m-1}), \tag{3310}$$

که $\mathbf{a}$ بردار- ِ-مساحت است، دیده میشود

$$\tilde{e}_i \cdot \tilde{v} = 0. \tag{3311}$$

پس $\tilde{v}(\tilde{x})$ بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است. به علاوه $\tilde{v}(\tilde{x})$ صفر نیست، پس پوچ نیست:

$$|\tilde{v}(\tilde{x})| \neq 0. \tag{3312}$$

از این که $\tilde{v}(\tilde{x})$ بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است ولی پوچ نیست، نتیجه میشود $\tilde{v}(\tilde{x})$ در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ نیست. $\tilde{u}$ را یکه-شده یِ $\tilde{v}$ تعریف میکنم:

$$\tilde{u}(\tilde{x}) = \frac{1}{|\tilde{v}(\tilde{x})|}\,\tilde{v}(\tilde{x}). \tag{3313}$$

رُشن است که

$$|\tilde{u}(\tilde{x})| = 1. \tag{3314}$$

$$\mathsf{sgn}[\tilde{u}(\tilde{x})] = \mathsf{sgn}[\tilde{v}(\tilde{x})]. \tag{3315}$$

$$[\tilde{e}_i(\tilde{x})] \cdot [\tilde{u}(\tilde{x})] = 0. \tag{3316}$$

علامت ِ $\tilde{v}$ ثابت است، چون $\tilde{v}$ پیوسته است و پوچ نمیشود. پس $\tilde{u}(\tilde{x})$ یک بردار ِ یکه است که علامت َش مستقل از $\tilde{x}$ است، و بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است. دامنه یِ $\tilde{u}$ خمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ است، اما $\tilde{u}(\tilde{x})$ در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ نیست (در واقع بر $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است) بلکه در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\mathbb{M}$ است.

دُ-ژئُدزیک ی (در $\mathbb{M}$) که از $\tilde{x}$ میگذرد و در $\tilde{x}$ بردار ِ مماس َش $\tilde{u}(\tilde{x})$ است را با $\gamma(\bullet, \tilde{x})$ نشان میدهم، و صفر ِ پارامتر را متناظر با $\tilde{x}$ میگذارم:

$$\gamma(0, \tilde{x}) = \tilde{x}. \tag{3317}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(0)}\,\gamma](0, \tilde{x}) = \tilde{u}(\tilde{x}). \tag{3318}$$

$$[\overset{0}{\mathbf{D}}_{(1)}\,\gamma](0, \tilde{x}) = \mathbf{1}_{\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}}. \tag{3319}$$

رابطه یِ (3319) نتیجه یِ (3317) است. از (3318) و (3319)، همراه با این که $\tilde{u}(\tilde{x})$ در $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ نیست، نتیجه میشود $(\mathbf{D}\,\gamma)(0, \tilde{x})$ تکین نیست. به این ترتیب از قضیه یِ رتبه و قضیه یِ تابع ِ وارون

نتیجه میشود یک همسایِگی یِ $\mathbb{D}$ از $(0,x_0)$ در $\mathbb{R}\times\tilde{\mathbb{M}}$ هست که تحدید ِ γ به آن یک وابرریختی ست، یعنی $\mathrm{res}(\gamma;\mathbb{D})$ هموار و در $\gamma(\mathbb{D})$ وارونپذیر است، و وارون ِ $\mathrm{res}(\gamma;\mathbb{D})$ هم هموار است.

نقشه یِ ϕ برا یِ $\mathbb{M}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\forall\,\tilde{x}\in\tilde{\mathbb{M}},\qquad \phi^i[\gamma(t,\tilde{x})]=\begin{cases}t, & i=0,\\ \tilde{\phi}^i(\tilde{x}), & i\neq 0\end{cases}. \tag{3320}$$

این نقشه در واقع بر $\gamma(\mathbb{D})$ تعریف شده:

$$\forall\,x\in[\gamma(\mathbb{D})],\qquad \phi^i(x)=\begin{cases}(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\gamma^{-1})(x), & i=0,\\ (\tilde{\phi}^i\circ\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\gamma^{-1})(x), & i\neq 0\end{cases}. \tag{3321}$$

به این ترتیب، نقشه یِ ϕ با این دستور تعریف میشود. متناظر با x در $[\gamma(\mathbb{D})]$، که $[\gamma(\mathbb{D})]$ یک همسایِگی از x_0 در $\mathbb{M}$ است، یک دُ-ژنُدزیک میگیرم که از x میگذرد، طول ِ بردار ِ مماس بر آن یک است، و در تقاطع َش با $\tilde{\mathbb{M}}$ بر $\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است، یعنی اگر دُ-ژنُدزیک $\tilde{\mathbb{M}}$ را در $\tilde{x}$ قطع کند، مماس بر دُ-ژنُدزیک در $\tilde{x}$ بر همه یِ بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است. پارامتر ِ دُ-ژنُدزیک در $\tilde{x}$ را صفر، و بردار ِ مماس بر دُ-ژنُدزیک در $\tilde{x}$ را $\tilde{u}(\tilde{x})$ میگیرم. در واقع بردار ِ مماس بر دُ-ژنُدزیک در $\tilde{x}$، تا حد ِ یک ضریب ِ ±1 معلوم است (چون بر بردارها یِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ عمود است و طول َش هم یک است). انتخاب ِ $\tilde{u}(\tilde{x})$ فقط سو یِ دُ-ژنُدزیک را تعیین میکند. $\phi^0(x)$، یعنی مختصه یِ صفرُم ِ x، را پارامتر ِ این دُ-ژنُدزیک در x میگیرم. $\phi^i(x)$ برا یِ $i\neq 0$ را هم $\tilde{\phi}^i(\tilde{x})$ میگیرم. یعنی بقیه یِ مختصِها یِ x را هم ان مختصِها یِ متناظر ِ $\tilde{x}$ میگیرم.

میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ را با e نشان میدهم. دیده میشود

$$e_j=[\mathbf{D}_j(\phi^{-1})][\phi(x)]. \tag{354}$$

به این ترتیب از

$$\phi^{-1}[t,\tilde{\phi}(\tilde{x})]=\gamma(t,\tilde{x}), \tag{3322}$$

نتیجه میشود

$$e_0\{\phi^{-1}[t,\tilde{\phi}(\tilde{x})]\} = [\mathbf{D}_{(0)}\,\gamma](t,\tilde{x}), \tag{3323}$$

یا

$$e_0[\gamma(t,\tilde{x})] = [\mathbf{D}_{(0)}\,\gamma](t,\tilde{x}), \tag{3324}$$

یا

$$e_0(x) = [\mathbf{D}_{(0)}\,\gamma]\{(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\phi)(x),[(\tilde{\phi})^{-1}\circ\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\phi](x)\}. \tag{3325}$$

از (3323) دیده میشود $e_0[\gamma(t,\tilde{x})]$ مماس بر دُ- ژنُدزیک ِ $\gamma(\centerdot,\tilde{x})$ در $\gamma(t,\tilde{x})$ است، یا $e_0[\gamma(t,\tilde{x})]$ مماس بر دُ- ژنُدزیک ِ $\gamma(\centerdot,\tilde{x})$ به ازا یِ پارامتر ِ t است. همئرز با آن، یا با استفاده از (3325)، دیده میشود $e_0(x)$ مماس بر دُ- ژنُدزیک ِ $\gamma\{\centerdot,[(\tilde{\phi})^{-1}\circ\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\phi](x)\}$ در x است، یعنی مماس بر $\gamma\{\centerdot,[(\tilde{\phi})^{-1}\circ\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_1\circ\phi](x)\}$ به ازا یِ پارامتر ِ $(\overset{0}{\mathbf{\Pi}}_0\circ\phi)(x)$ است.

از این که $\gamma(\centerdot,\tilde{x})$ دُ- ژنُدزیک است، نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,\mathbf{D}[\gamma(\centerdot,\tilde{x})] = 0, \tag{3326}$$

یا

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\{e_0[\gamma(\centerdot,\tilde{x})]\} = 0. \tag{3327}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned}\Big(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\{e_0[\gamma(\centerdot,\tilde{x})]\}\Big)(t) &= \{(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,e_0)[\gamma(t,\tilde{x})]\}\Big(\{\mathbf{D}[\gamma(\centerdot,\tilde{x})]\}(t)\Big),\\ &= \{(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,e_0)[\gamma(t,\tilde{x})]\}\{[\mathbf{D}_{(0)}\,\gamma](t,\tilde{x})\},\\ &= \{(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\,e_0)[\gamma(t,\tilde{x})]\}\{e_0[\gamma(t,\tilde{x})]\},\\ &= (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{e_0}\,e_0)[\gamma(t,\tilde{x})].\end{aligned} \tag{3328}$$

نتیجه میشود

$$\underset{\circ}{\nabla}_{e_0} e_0 = 0. \tag{3329}$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{D}_0(e_0 \cdot e_0) = 0. \tag{3330}$$

از (3317) و (3318) و (3325) هم دیده میشود

$$e_0(\tilde{x}) = \tilde{u}(\tilde{x}). \tag{3331}$$

$\tilde{u}$ یکه است. پس $e_0(\tilde{x})$ یکه است، یعنی e_0 بر $\tilde{\mathbb{M}}$ یکه است:

$$|e_0(\tilde{x})| = 1. \tag{3332}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} |e_0[\gamma(0,\tilde{x})]| &= |e_0(\tilde{x})|, \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3333}$$

از این و (3330) هم نتیجه میشود

$$|e_0[\gamma(t,\tilde{x})]| = 1, \tag{3334}$$

یا

$$|e_0| = 1. \tag{3335}$$

به این ترتیب e_0 یک میدان ِ برداری یِ یکه است که مشتق ِ هموردا یَش (با هموستار ِ لِوی-چیویتا) با خُد َش صفر است. از (3335) ضمنَن نتیجه میشود

$$\mathbf{D}(e_0 \cdot e_0) = 0. \tag{3336}$$

چون e یک میدان-پایه یِ مختصاتی ست، جابِجاگر ِ e_i با e_j صفر است. از جمله،

$$e_0 \diamond e_i = 0. \tag{3337}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{e_0} e_i - \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{e_i} e_0 - e_0 \diamond e_i &= \boldsymbol{T}_{\{2,3\}}(e_0, e_i), \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3338}$$

چون پیچش ِ متناظر با هموستار ِ لِوی-چیویتا صفر است. به این ترتیب،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{e_0} e_i = \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{e_i} e_0, \tag{3339}$$

یا

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_0 e_i = \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i e_0. \tag{3340}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} e_0 \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_i e_0) &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_i(e_0 \cdot e_0), \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3341}$$

به این ترتیب،

$$e_0 \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_0 e_i) = 0. \tag{3342}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0(e_0 \cdot e_i) &= e_0 \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_0 e_i) + (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_0 e_0) \cdot e_i, \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3343}$$

اگر $\tilde{x}$ در $\mathbb{M}$باشد،

$$\phi^{-1}[0, \tilde{\phi}(\tilde{x})] = \tilde{x}, \tag{3344}$$

که یعنی

$$\phi^{-1}(0, \cdot) = (\tilde{\phi})^{-1}. \tag{3345}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} e_i(\tilde{x}) &= [\mathbf{D}_i(\phi^{-1})][\phi(\tilde{x})], \\ &= [\mathbf{D}_i(\phi^{-1})][0, \tilde{\phi}(\tilde{x})]. \end{aligned} \tag{3346}$$

پس اگر i صفر نباشد،

$$\begin{aligned} e_i(\tilde{x}) &= \{\mathbf{D}_i[\phi^{-1}(0, \cdot)]\}[\tilde{\phi}(\tilde{x})], \\ &= \{\mathbf{D}_i[(\tilde{\phi})^{-1}]\}[\tilde{\phi}(\tilde{x})]. \end{aligned} \tag{3347}$$

پس $e_i(\tilde{x})$ هم ان میدان-پایه یِ مختصاتی یِ i اُم ِ $\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}$ متناظر با نقشه یِ $\tilde{\phi}$ است:

$$e_i(\tilde{x}) = \tilde{e}_i(\tilde{x}), \qquad (\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{M}}) \wedge (i \neq 0). \tag{3348}$$

از جمله نتیجه میشود

$$[e_i(\tilde{x})] \in (\mathrm{T}_{\tilde{x}}\tilde{\mathbb{M}}), \quad (\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{M}}) \wedge (i \neq 0). \tag{3349}$$

از این، یا مستقیمَن از (3316)، دیده میشود

$$[e_0(\tilde{x})] \cdot [e_i(\tilde{x})] = 0, \qquad (\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{M}}) \wedge (i \neq 0). \tag{3350}$$

به این ترتیب،

$$\{e_0[\gamma(0, \tilde{x})]\} \cdot \{e_i[\gamma(0, \tilde{x})]\} = 0, \qquad i \neq 0. \tag{3351}$$

از این، همراه با (3343)، نتیجه میشود

$$\{e_0[\gamma(t,\tilde{x})]\}\cdot\{e_i[\gamma(t,\tilde{x})]\}=0, \qquad i\neq 0, \tag{3352}$$

که یعنی

$$e_0\cdot e_i=0, \qquad i\neq 0. \tag{3353}$$

از ترکیب ِ این با (3335) نتیجه میشود

$$g_{0\,i}=[\mathsf{sgn}(e_0)]\delta_{0\,i}, \tag{3354}$$

که هم ان (3307) برا یِ نقشه یِ ϕ و میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر (e) است. و البته چون e_0 پوچ نیست، رُشن است که $\mathsf{sgn}(e_0)$ ثابت است.

برا یِ اثبات ِ وجود ِ چنین نقشه ای هموستار ِ لِوی-چیویتا به کار رفت. اما هموستار ِ لِوی-چیویتا ساختار یِ مستقل از شبه- ِ-متریک نیست. به این ترتیب هر خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یی نقشه ای دارد که میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن (3354) را (مُضعَن) براورَد. ضمنَن رُشن است که اگر (3354) براورده شود e_0 نمیتواند پوچ باشد، چون اگر (3354) براورده شوند و e_0 پوچ باشد، e_0 بر همه یِ بردارها عمود است، که این با ناتکین-بودن ِ شبه- ِ-متریک ناسازگار است.

به نقشه یِ ϕ که میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با آن (3354) را براورَد یک نقشه یِ گاؤسی-بهنجار میگویند.

روش ی که برا یِ اثبات ِ وجود ِ نقشه یِ گاؤسی-بهنجار به کار رفت، نتیجه ای قویتر از اثبات ِ وجود ِ چنین نقشه ای میدهد. نتیجه این است که اگر زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ با یک بُعد کمتر از $\mathbb{M}$ چنان باشد که بردار ِ عمود بر آن پوچ نباشد، آنگاه متناظر با هر نقشه یِ $\tilde{\phi}$ برا یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ یک نقشه یِ گاؤسی-بهنجار ِ ϕ هست که تحدید َش بر $\tilde{\mathbb{M}}$ برابر ِ $(0,\tilde{\phi})$ است:

$$\mathsf{res}(\phi;\tilde{\mathbb{M}})=(0,\tilde{\phi}). \tag{3355}$$

این از (3320) دیده میشود.

79 نقشه یِ متعامد

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ m بُعدی ست. میگویم نقشه یِ ϕ متعامد است، اگر میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ متعامد باشد. میگویم نقشه یِ ϕ در x_0 متعامد است، اگر میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ، در x_0 متعامد باشد. میگویم نقشه یِ ϕ (در x_0) یکه-متعامد است، اگر میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ (در x_0) یکه-متعامد باشد.

متناظر با هر نقطه یِ x_0 از خمینه، حتمَن یک نقشه هست که در x_0 متعامد (یا حتا یکه-متعامد) باشد. برا یِ دیدن ِ این پایه یِ $\tilde{e}$ در $\mathrm{T}_{x_0}\mathbb{M}$ را میگیرم. متناظر با این پایه و e (میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با نقشه یِ ϕ) یک تابع- ِ-تبدیل- ِ-پایه یِ Λ هست که

$$\tilde{e}_p = \Lambda^i{}_p\, e_i. \tag{3356}$$

نقشه یِ ϕ' را چنین تعریف میکنم

$$\phi'^p(x) = \phi'^p(x_0) + (\Lambda^{-1})^p{}_i\, [\phi^i(x) - \phi^i(x_0)], \tag{3357}$$

که $\phi'(x_0)$ دلبخاه است. دیده میشود

$$(\mathbf{D}_i\, \phi'^p)(x_0) = (\Lambda^{-1})^p{}_i. \tag{3358}$$

حتا میشود در تعریف ِ ϕ' جملِها یی افزود که در $(x \to x_0)$ سریعتر از $(x - x_0)$ صفر میشوند. (3358) همچنان برقرار است. از (3358) دیده میشود

$$e'_p(x_0) = \Lambda^i{}_p\, e_i(x_0), \tag{3359}$$

که e' میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ' است. به این ترتیب،

$$e'_p(x_0) = \tilde{e}_p. \tag{3360}$$

میشود $\tilde{e}$ را متعامد یا یکه-متعامد گرفت. در این صورت نقشه یِ ϕ' در x_0 متعامد یا یکه-متعامد است.

به روش ِ بالا میشود نقشه ای ساخت که در یک نقطه متعامد یا یکه-متعامد باشد. برا یِ این که نقشه یِ ϕ' در یک ناحیه متعامد باشد، لازم و کافی ست که

$$[(\mathbf{D}\,\phi')^{-1}]^i{}_p\,[(\mathbf{D}\,\phi')^{-1}]^j{}_q\,g_{i\,j}=0,\quad q\neq p. \tag{3361}$$

برا یِ این که نقشه یِ ϕ' در یک ناحیه یکه-متعامد باشد، لازم و کافی ست که رابطه یِ بالا برقرار باشد و

$$|[(\mathbf{D}\,\phi')^{-1}]^i{}_p\,[(\mathbf{D}\,\phi')^{-1}]^j{}_p\,g_{i\,j}|=1. \tag{3362}$$

بخش ِ غیر- ِ-قطری یِ (قطری یِ) مئلفِها یِ g در پایه یِ e' را با $g_{\mathrm{nd}'}$ ($g_{\mathrm{d}'}$) نشان میدهم. دیده میشود

$$\mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'})=\frac{m(m-1)}{2}. \tag{3363}$$

$$\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{nd}'})=\frac{m(m-1)}{2}. \tag{3364}$$

$$\mathsf{df}(g_{\mathrm{d}'})=m. \tag{3365}$$

$$\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{d}'})=m. \tag{3366}$$

عنصرها یِ ($\mathbf{D}\,\phi'$) در x_0 مستقل از هم َند:

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\phi')=m^2. \tag{3367}$$

اما در یک ناحیه همه یِ مئلفِها یِ ($\mathbf{D}\,\phi'$) میدانها یِ اسکالر ِ مستقل-از-هم ی نیستند. مئلفِها یِ ϕ' مستقل از هم َند. به این ترتیب،

$$\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi')=m. \tag{3368}$$

اگر هدف این میبود که (3361) یا (3362) در فقط x_0 برقرار باشند، تعداد ِ معادلِها به ترتیب $\mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'})$ و $\mathsf{df}(g_{\mathrm{d}'})$ و تعداد ِ مجهولها $\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\phi')$ میشد. اگر هدف این میبود که (3361) یا (3362) در یک ناحیه برقرار باشند، تعداد ِ معادلِها به ترتیب $\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{nd}'})$ و $\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{d}'})$، و تعداد ِ مجهولها $\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi')$

میشد. تعداد ِ معادلِها، برا یِ نقطه یا ناحیه فرق نمیکند، اما تعداد مجهولها برا یِ وقت ی که معادلِها برا یِ یک ناحیه نوشته شوند کمتر است. دیده میشود

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\phi') > \mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}). \tag{3369}$$

$$\mathsf{df}(\mathbf{D}\,\phi') \begin{cases} > [\mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}) + \mathsf{df}(g_{\mathrm{d}'})], & m > 1 \\ = [\mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}) + \mathsf{df}(g_{\mathrm{d}'})], & m = 1 \end{cases}. \tag{3370}$$

به این ترتیب برا یِ نقشه ای که در یک نقطه متعامد باشد، تعداد ِ مجهولها بیش از تعداد ِ معادلِها ست، پس چنین نقشه ای هست و یکتا هم نیست. برا یِ نقشه ای که در یک نقطه یکه- متعامد باشد؛ در بُعد ِ بیش از 1 تعداد ِ مجهولها بیش از تعداد ِ معادلِها ست، پس چنین نقشه ای هست و یکتا هم نیست؛ در بُعد ِ 1 تعداد ِ مجهولها با تعداد ِ معادلِها برابر است، پس چنین نقشه ای هست ولی پارامتر ِ پیوسته یِ دلبخاه ندارد.

همچنین،

$$\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi') \begin{cases} < \mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}), & m > 3 \\ = \mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}), & m = 3 \\ > \mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}), & m < 3 \end{cases}. \tag{3371}$$

$$\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi') \begin{cases} < [\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{nd}'}) + \mathsf{fdf}(g_{\mathrm{d}'})], & m > 1 \\ = [\mathsf{fdf}(g_{\mathrm{nd}'}) + \mathsf{fdf}(g_{\mathrm{d}'})], & m = 1 \end{cases}. \tag{3372}$$

پس برا یِ نقشه ای که در یک ناحیه متعامد باشد؛ در بُعد ِ بیش از 3 تعداد ِ مجهولها کمتر از تعداد ِ معادلِها ست، پس در حالت ِ کلی چنین نقشه ای وجود ندارد. در بُعد ِ 3 تعداد ِ مجهولها با تعداد ِ معادلِها برابر است، پس چنین نقشه ای هست ولی پارامتر ِ پیوسته یِ دلبخاه ندارد؛ در بُعد ِ کمتر از 3 تعداد ِ مجهولها بیش از تعداد ِ معادلِها ست، پس چنین نقشه ای هست. در واقع

$$\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi') = \mathsf{df}(g_{\mathrm{nd}'}) + 1, \quad m < 3, \tag{3373}$$

که نشان میدهد در بُعدها یِ 1 و 2 نقشِها یی که در یک نقطه متعامد باشند یک پارامتر ِ پیوسته یِ دلبخاه دارند. برا یِ نقشه ای که در یک ناحیه یکه- متعامد باشد؛ در بُعد ِ بیش از 1 تعداد ِ مجهولها کمتر از

تعداد ِ معادلِها ست، پس در حالت ِ کلی چنین نقشه ای وجود ندارد؛ در بُعد ِ 1 تعداد ِ مجهولها با تعداد ِ معادلِها برابر است، پس چنین نقشه ای هست ولی پارامتر ِ پیوسته یِ دلبخاه ندارد.

نقشه یِ ϕ که در نقطه یِ x متعامد یا حتا یکه-متعامد باشد، لزومَن در x شبه- ِ-متریک-دِکَرتی نیست. نقشه یِ ϕ که در ناحیه یِ باز ِ $\mathbb{D}$ متعامد باشد هم لزومَن در $\mathbb{D}$ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی نیست، چون ممکن است مشتق مئلفِها یِ قطری یِ شبه- ِ-متریک در $\mathbb{D}$ صفر نباشد. اما رُشن است که نقشه یِ ϕ اگر در ناحیه یِ باز ِ $\mathbb{D}$ یکه-متعامد باشد، شبه- ِ-متریک-دِکَرتی هم هست. چون اگر نقشه یِ ϕ در ناحیه یِ باز ِ $\mathbb{D}$ یکه-متعامد باشد، در $\mathbb{D}$ مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک در میدان-پایه یِ متناظر با ϕ ثابت َند، در نتیجه مشتق ِشان صفر است.

این که در بُعد ِ بیش از 1 در حالت ِ کلی نقشه ای نیست که در یک ناحیه یِ باز ِ $\mathbb{D}$ یکه-متعامد باشد را میشود از اینجا هم دید که چنین نقشه ای در $\mathbb{D}$ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی خاهد بود، که نتیجه میدهد در $\mathbb{D}$ خمش- ِ-لِوی-چیویتا صفر است. پس اگر خمش ِ لِوی-چیویتا در $\mathbb{D}$ صفر نباشد چنین نقشه ای وجود نخاهد داشت، و در بُعد ِ بیش از 1 در حالت ِ کلی خمش- ِ-لِوی-چیویتا صفر نیست.

شمارش ِ درجه-یِ-آزادیها تصویر ی از وجود ِ جواب و درجه-یِ-آزادی یِ جواب میدهد، اما نتیجه ای که از این تصویر به دست میئاید بر این اساس است که معادلِها از هم مستقل َند و با هم ناسازگار نیستند. میخاهم در بُعد ِ 3 یک نقشه یِ متعامد بسازم. برا یِ این کار در خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 3 بُعدی یِ $(\mathbb{M}, g)$ یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی میگیرم که شامل ِ نقطه یِ x_0 است، چنان که بردار ِ ناصفر ِ عمود بر این زیرخمینه پوچ نباشد. به این ترتیب، این زیرخمینه با شبه- ِ-متریک ِ القاییده بر آن یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی میشود. این زیرخمینه 2 بُعدی ست، و یک نقشه یِ گاؤسی-بهنجار دارد (که دامنه اَش شامل ِ x_0 است). در 2 بُعد هر نقشه یِ گاؤسی-بهنجار متعامد هم هست. پس این زیرخمینه $(\tilde{\mathbb{M}})$ یک نقشه یِ متعامد دارد (که دامنه اَش شامل ِ x_0 است). نقشه یِ متعامد ِ (نَ لزومَن گاؤسی-بهنجار ِ) $\tilde{\phi}$ برا یِ زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ را میگیرم. میدان-پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر با این نقشه را v و w مینامم، مختصات ِ متناظر را هم با $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ نشان میدهم:

$$v[\tilde{\phi}^{-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] = \{\mathbf{D}\,[\tilde{\phi}^{-1}(\cdot, \mathfrak{y})]\}(\mathfrak{x}). \tag{3374}$$

$$w[\tilde{\phi}^{-1}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})] = \{\mathbf{D}\,[\tilde{\phi}^{-1}(\mathfrak{x}, \cdot)]\}(\mathfrak{y}). \tag{3375}$$

برا یِ ساختن ِ یک نقشه در $\mathbb{M}$ یک مختصه یِ دیگر هم لازم است. نقشه یِ ϕ برا یِ $\mathbb{M}$ را چنین میسازم

$$\phi^{-1}(t,\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = [\mathsf{fl}(t\,u)][\tilde{\phi}^{-1}(\mathfrak{x},\mathfrak{y})], \tag{3376}$$

که u بر زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}_t$ عمود است، و $\tilde{\mathbb{M}}_t$ چنین تعریف میشود

$$\tilde{\mathbb{M}}_t = \phi^{-1}(t,\cdot). \tag{3377}$$

این یعنی در هر نقطه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ یک بردار ِ عمود بر $\tilde{\mathbb{M}}$ گرفته ام. با اثر-دادن ِ شارش ِ این بردار (میدان ِ برداری) به اندازه یِ Δt بر این نقطه نقطه یِ جدید ی به دست آمده. از نقطِها یِ جدید زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}_{\Delta t}$ ساخته شده، و این کار را تکرار شده تا $\tilde{\mathbb{M}}_t$ به دست آید. البته این روند در حد ِ $(\Delta t) \to 0$ انجام میشود. u وجود دارد. وجود ِ u مثلَن از اینجا ثابت میشود که یک نقشه یِ گاؤسی-بهنجار برا یِ $\mathbb{M}$ هست که تحدید َش بر $\tilde{\mathbb{M}}$ یک مختصه اَش صفر است. اما u یکتا نیست (لازم نیست طول u یک باشد). هدف این است که u و v و w چنان یافته شوند که ϕ یک نقشه یِ متعامد باشد. دیده میشود

$$u[\phi^{-1}(t,\mathfrak{x},\mathfrak{y})] = \{\mathbf{D}\,[\phi^{-1}(\cdot,\mathfrak{x},\mathfrak{y})]\}(t). \tag{3378}$$

به هم ین ترتیب تعریف میکنم

$$v[\phi^{-1}(t,\mathfrak{x},\mathfrak{y})] = \{\mathbf{D}\,[\phi^{-1}(t,\cdot,\mathfrak{y})]\}(\mathfrak{x}). \tag{3379}$$

$$w[\phi^{-1}(t,\mathfrak{x},\mathfrak{y})] = \{\mathbf{D}\,[\phi^{-1}(t,\mathfrak{x},\cdot)]\}(\mathfrak{y}). \tag{3380}$$

دیده میشود اینها با (3374) و (3375) سازگار َند، چون

$$\phi^{-1}(0,\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \tilde{\phi}^{-1}(\mathfrak{x},\mathfrak{y}). \tag{3381}$$

بر اساس ِ این ساختار، میدانها یِ برداری یِ u و v و w دُ-یه-دُ با هم جابِجا میشوند. همچنین، u بر v و w عمود است. v و w هم در $(t=0)$ بر هم عمود َند. میمانَد این که در بقیه یِ t ها هم v و w بر هم عمود بمانند. برا یِ این باید

$$\mathbf{D}_u(v\cdot w) = 0. \tag{3382}$$

دیده میشود

$$\mathbf{D}_u(v\cdot w) = (\underset{\circ}{\nabla}_u\, v)\cdot w + v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_u\, w),$$
$$= (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)\cdot w + v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_w\, u). \tag{3383}$$

در برابری یِ اخیر این به کار رفته که پیچش صفر است و u با v و w جابِجا میشود. به این ترتیب، با استفاده از سازگاری یِ شبه- ِ-متریک با هموستار دیده میشود

$$\mathbf{D}_u(v\cdot w) = \underset{\circ}{\nabla}_v(u\cdot w) - u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w) + \underset{\circ}{\nabla}_w(v\cdot u) - (\underset{\circ}{\nabla}_w\, v)\cdot u,$$
$$= -u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w + \underset{\circ}{\nabla}_w\, v), \tag{3384}$$

که در آن تعامد ِ u بر v و w به کار رفته. با استفاده از صفر-بودن ِ پیچش و این که v و w با هم جابِجا میشوند نتیجه میشود

$$\mathbf{D}_u(v\cdot w) = -2\, u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w). \tag{3385}$$

پس (3382)، شرط ِ این که v و w بر هم عمود بمانند، این است که

$$u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w) = 0. \tag{3386}$$

با فرض ِ این که این رابطه در $\tilde{\mathbb{M}} = \tilde{\mathbb{M}}_0$ برقرار باشد، شرط ِ این که 3386 برا یِ $(t \neq 0)$ هم برقرار باشد این است که

$$\mathbf{D}_u[u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w)] = 0. \tag{3387}$$

دیده میشود

$$\mathbf{D}_u[u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w)] = (\underset{\circ}{\nabla}_u\, u)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\, w) + u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_u\, \underset{\circ}{\nabla}_v\, w). \tag{3388}$$

این که u بر v و w عمود است را میشود چنین نوشت.

$$u = \Sigma(v\times w), \tag{3389}$$

که Σ یک میدان ِ اسکالر است. به این ترتیب بر زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}_t$، با معلوم-بودن ِ v و w بردار ِ u با اسکالر ِ Σ تعیین میشود. برا یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (3388)،

$$\underset{\circ}{\nabla}_u\, u = (\underset{\circ}{\nabla}_u\, \Sigma)(v \times w) + \Sigma\, \underset{\circ}{\nabla}_u (v \times w). \tag{3390}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \underset{\circ}{\nabla}_u (v \times w) &= (\underset{\circ}{\nabla}_u\, v) \times w + v \times (\underset{\circ}{\nabla}_u\, w), \\ &= (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u) \times w + (\underset{\circ}{\nabla}_w\, u) \times v, \end{aligned} \tag{3391}$$

که در برابری یِ آخر این به کار رفته که پیچش صفر است و u با v و w جابِجا میشود. u و v و w در هر نقطه یک پایه یِ متعامد میسازند. پس هر بردار را میشود بر حسب ِ آنها بسط داد. از جمله،

$$\underset{\circ}{\nabla}_v\, u = \frac{u \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)}{u \cdot u}\, u + \frac{v \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)}{v \cdot v}\, v + \frac{w \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)}{w \cdot w}\, w, \tag{3392}$$

که نتیجه میدهد

$$(\underset{\circ}{\nabla}_v\, u) \times w = \frac{u \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)}{u \cdot u}\, u \times w + \frac{v \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u)}{v \cdot v}\, v \times w. \tag{3393}$$

دیده میشود

$$u \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u) = \frac{1}{2}\, \underset{\circ}{\nabla}_v (u \cdot u). \tag{3394}$$

$$\begin{aligned} v \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, u) &= \Sigma\, v \cdot [\underset{\circ}{\nabla}_v (v \times w)] + v \cdot (v \times w) \underset{\circ}{\nabla}_v\, \Sigma, \\ &= \Sigma\, v \cdot [\underset{\circ}{\nabla}_v (v \times w)]. \end{aligned} \tag{3395}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} [(\underset{\circ}{\nabla}_v\, u) \times w] \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, w) = {} & \frac{\underset{\circ}{\nabla}_v (u \cdot u)}{2\, u \cdot u}\, u \cdot [w \times (\underset{\circ}{\nabla}_v w)] \\ & + \frac{v \cdot [\underset{\circ}{\nabla}_v (v \times w)]}{v \cdot v}\, u \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v\, w). \end{aligned} \tag{3396}$$

به شکل ی مشابه،

$$[v\times(\underset{\circ}{\nabla}_w\,u)]\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)=\frac{\underset{\circ}{\nabla}_w(u\cdot u)}{2\,u\cdot u}\,u\cdot[(\underset{\circ}{\nabla}_v w)\times v]+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w). \tag{3397}$$

$(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)$ را هم میشود بر حسب ِ u و v و w بسط داد:

$$\underset{\circ}{\nabla}_v\,w=\frac{u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{u\cdot u}\,u+\frac{v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{v\cdot v}\,v+\frac{w\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{w\cdot w}\,w. \tag{3398}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}[(\underset{\circ}{\nabla}_v\,u)\times w]\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)&=\frac{\underset{\circ}{\nabla}_v(u\cdot u)}{2\,u\cdot u}\,u\cdot\left[\frac{u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{u\cdot u}\,w\times u+\frac{v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{v\cdot v}\,w\times v\right]\\&\quad+\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]}{v\cdot v}\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w),\\&=-\frac{v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{2\,\Sigma\,v\cdot v}\,\underset{\circ}{\nabla}_v(u\cdot u)\\&\quad+\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]}{v\cdot v}\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w),\end{aligned} \tag{3399}$$

و به شکل ی مشابه،

$$[v\times(\underset{\circ}{\nabla}_w\,u)]\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)=-\frac{w\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{2\,\Sigma\,w\cdot w}\,\underset{\circ}{\nabla}_w(u\cdot u)+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w). \tag{3400}$$

پس،

$$\begin{aligned}[\underset{\circ}{\nabla}_u(v\times w)]\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)&=-\frac{v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{2\,\Sigma\,v\cdot v}\,\underset{\circ}{\nabla}_v(u\cdot u)-\frac{w\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{2\,\Sigma\,w\cdot w}\,\underset{\circ}{\nabla}_w(u\cdot u)\\&\quad+\left\{\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]}{v\cdot v}+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\right\}u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w),\\&=-\frac{1}{2\,\Sigma}\left[\frac{v\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{v\cdot v}\,\underset{\circ}{\nabla}_v+\frac{w\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{w\cdot w}\,\underset{\circ}{\nabla}_w\right.\\&\quad\left.+\frac{u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{u\cdot u}\,\underset{\circ}{\nabla}_u\right](u\cdot u)+\frac{u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)}{2\,\Sigma\,u\cdot u}\,\underset{\circ}{\nabla}_u(u\cdot u)\\&\quad+\left\{\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]}{v\cdot v}+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\right\}u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w),\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\,\Sigma}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w}(u\cdot u)$$
$$+\left\{\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v(v\times w)]}{v\cdot v}+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\right.$$
$$\left.+\frac{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u(u\cdot u)}{2\,\Sigma\,u\cdot u}\right\}u\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w). \tag{3401}$$

به این ترتیب،

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\,u)\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w)=-\frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w}(u\cdot u)+\mathfrak{a}\,u\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w), \tag{3402}$$

که

$$\mathfrak{a}=\Sigma\left\{\frac{v\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v(v\times w)]}{v\cdot v}+\frac{w\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)]}{w\cdot w}\right\}+\frac{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u(u\cdot u)}{2\,u\cdot u}+\frac{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\,\Sigma}{\Sigma}. \tag{3403}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (3402) را باز میکنم. نتیجه میشود

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\,u)\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w)=-\Sigma\{(v\times w)\cdot[\Sigma\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w}\,(v\times w)]$$
$$+(v\times w)\cdot(v\times w)\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w}\,\Sigma\}+\mathfrak{a}\,u\cdot(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w). \tag{3404}$$

برا یِ جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (3388)،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,w=\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_u\,w+\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,u,v),$$
$$=\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w\,u+\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,u,v), \tag{3405}$$

که صفر-بودن ِ پیچش و جابِجا-شدن ِ بردارها با هم به کار رفته است. دیده میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w\,u=\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w[\Sigma(v\times w)],$$
$$=(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w\,\Sigma)(v\times w)$$
$$+(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\Sigma)[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)]+(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w\,\Sigma)[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v(v\times w)]$$
$$+\Sigma\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w). \tag{3406}$$

همچنین،

$$(v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)]=\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v[(v\times w)\cdot\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)]$$
$$-[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v(v\times w)]\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_w(v\times w)],$$

$$= \frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w[(v\times w)\cdot(v\times w)]$$
$$-\,[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]. \tag{3407}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_u\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,w) &= u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w\,u) + u\,[\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,u,v)],\\
&= \Sigma\Big\{(v\times w)\cdot(v\times w)\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma\\
&\quad + (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]\underset{\circ}{\nabla}_v\,\Sigma + (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma\\
&\quad + \frac{\Sigma}{2}\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w[(v\times w)\cdot(v\times w)] - \Sigma[\underset{\circ}{\nabla}_v\,(v\times w)]\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w\,(v\times w)]\\
&\quad + (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,v\times w,v)]\Sigma\Big\}.
\end{aligned} \tag{3408}$$

پس (3388) میشود

$$\mathbf{D}_u[u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)] = \Sigma\,\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w), \tag{3409}$$

که

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b} &= [(v\times w)\cdot(v\times w)](\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma)\\
&\quad + (v\times w)\cdot\{[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]\underset{\circ}{\nabla}_v\,\Sigma + [\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma - (v\times w)\underset{\circ}{\nabla}_{\underset{\circ}{\nabla}_v\,w}\,\Sigma\}\\
&\quad + \Big\{\frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w[(v\times w)\cdot(v\times w)] - [\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]\\
&\quad - (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_{\underset{\circ}{\nabla}_v\,w}(v\times w)] + (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,v\times w,v)]\Big\}\Sigma,\\
&= \|v\times w\|^2(\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma)\\
&\quad + \frac{1}{2}(\underset{\circ}{\nabla}_w\,\|v\times w\|^2)\underset{\circ}{\nabla}_v\,\Sigma + \frac{1}{2}(\underset{\circ}{\nabla}_v\,\|v\times w\|^2)\underset{\circ}{\nabla}_w\,\Sigma - \|v\times w\|^2\,\underset{\circ}{\nabla}_{\underset{\circ}{\nabla}_v\,w}\,\Sigma\\
&\quad + \Big\{\frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\nabla}_v\,\underset{\circ}{\nabla}_w\,\|v\times w\|^2 - [\underset{\circ}{\nabla}_v(v\times w)]\cdot[\underset{\circ}{\nabla}_w(v\times w)]\\
&\quad - \frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\nabla}_{\underset{\circ}{\nabla}_v\,w}\,\|v\times w\|^2 + (v\times w)\cdot[\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{\{2,3,4\}}(w,v\times w,v)]\Big\}\,\Sigma.
\end{aligned} \tag{3410}$$

شرط ِ این که $[u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_v\,w)]$ صفر بماند (وقت ی در $\tilde{\mathbb{M}}_t$ صفر باشد) این است که $\mathfrak{b}$ در $\tilde{\mathbb{M}}_t$ صفر باشد:

$$\mathfrak{b} = 0. \tag{3411}$$

با v و w یِ معلوم بر $\tilde{\mathbb{M}}_t$، و با این شرط که $[u \cdot (\underset{\circ}{\nabla}_v w)]$ بر $\tilde{\mathbb{M}}_t$ صفر باشد، یعنی $(\underset{\circ}{\nabla}_v w)$ بر $\tilde{\mathbb{M}}_t$ مماس باشد، (3411) یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ 2 برا یِ Σ است، که متغیرها یَش $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ اند (در آن مشتق نسبت به t ظاهر نمیشود). این معادله نسبت به f خطی ست. پس اگر جواب ی از آن در یک عدد ِ ثابت ضرب شود، یک جواب ِ دیگر به دست میئاید.

به این ترتیب، شرط ِ این که ϕ متعامد باشد این است که $\mathfrak{b}$ بر $\tilde{\mathbb{M}}$ صفر شود، و بر $\tilde{\mathbb{M}}$ نقشه یِ $\tilde{\phi}$ متعامد باشد و (3386) را براورَد. مانده نشان بدهم میشود $\tilde{\phi}$ را چنان یافت که (3386) را بر $\tilde{\mathbb{M}}$ براورَد. برا یِ این کار، ابتدا زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ را چنان میگیرم که هیچ بردار ِ ناصفر ِ مماس بر آن پوچ نباشد. اگر $\mathbb{M}$ ریمانی باشد، $\tilde{\mathbb{M}}$ هم ریمانی خاهد بود و این شرط براورده است. اگر $\mathbb{M}$ ریمانی نباشد، از $\mathsf{snt}_+(g)$ و $\mathsf{snt}_-(g)$ یک ی کوچکتر (و برابر با 1) است. در این حالت $\tilde{\mathbb{M}}$ را چنان میگیریم که علامت ِ u (بردار ِ عمود بر آن) ثابت باشد، و این علامت مثبت باشد اگر $\mathsf{snt}_+(g)$ برابر ِ 1 باشد، و منفی باشد اگر $\mathsf{snt}_-(g)$ برابر ِ 1 باشد. به این ترتیب علامت ِ همه یِ بردارها یِ ناصفر ِ مماس بر $\tilde{\mathbb{M}}$ ثابت است، و هیچ یک از این بردارها پوچ نیستند.

از مختصات ِ $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ برا یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ شروع میکنم، که متناظر با یک نقشه یِ متعامد برا یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ اند و میدان-پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر ِشان v' و w' است، که لزومَن مانسته یِ (3386) را بر نمیئاورند. تعریف میکنم

$$v(\theta) = v' \cos\theta - w' \frac{|v'|}{|w'|} \sin\theta. \tag{3412}$$

$$w(\theta) = v' \frac{|w'|}{|v'|} \sin\theta + w' \cos\theta. \tag{3413}$$

به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ θ مجموعه یِ $\{[1, v(\theta)], [2, w(\theta)]\}$ خطی-مستقل است. ضمنَن از تعامد ِ v' و w' بر یکدیگر، و این که علامت ِ v' با علامت ِ w' یکسان است، دیده میشود

$$[v(\theta)] \cdot [w(\theta)] = 0. \tag{3414}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\nabla}_{v(\theta)}[w(\theta)] = (\sin\theta)(\cos\theta)\left(\frac{|w'|}{|v'|}\underset{\circ}{\nabla}_{v'} v' - \frac{|v'|}{|w'|}\underset{\circ}{\nabla}_{w'} w'\right)\\ + (\cos^2\theta)\underset{\circ}{\nabla}_{v'} w' - (\sin^2\theta)\underset{\circ}{\nabla}_{w'} v' + \mathfrak{c}\, v' + \mathfrak{d}\, w',\end{aligned}$$

$$= (\sin\theta)(\cos\theta)\left(\frac{|w'|}{|v'|}\,\underset{\circ}{\nabla}_{v'}\,v' - \frac{|v'|}{|w'|}\,\underset{\circ}{\nabla}_{w'}\,w'\right)$$
$$+ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\underset{\circ}{\nabla}_{v'}\,w' + \mathfrak{c}\,v' + \mathfrak{d}\,w', \tag{3415}$$

که $\mathfrak{c}$ و $\mathfrak{d}$ اسکالرها یی یَند که از مشتقگیری از ضریبها یِ v' و w' در بسط ِ $[w(\theta)]$ بر حسب ِ v' و w' به دست میئایند. در برابری یِ دوم این به کار رفته که جابِجاگر ِ v' و w' صفر است (و البته پیچش هم صفر است). پس

$$\underset{\circ}{\nabla}_{w'}v' = \underset{\circ}{\nabla}_{v'}w'. \tag{3416}$$

از (3415) نتیجه میشود

$$u\cdot\{\underset{\circ}{\nabla}_{v(\theta)}[w(\theta)]\} = (\sin\theta)(\cos\theta)u\cdot\left(\frac{|w'|}{|v'|}\,\underset{\circ}{\nabla}_{v'}\,v' - \frac{|v'|}{|w'|}\,\underset{\circ}{\nabla}_{w'}\,w'\right)$$
$$+ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_{v'}\,w'). \tag{3417}$$

از جمله،

$$\left(u\cdot\{\underset{\circ}{\nabla}_{v(\cdot)}[w(\cdot)]\}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\left(u\cdot\{\underset{\circ}{\nabla}_{v(\cdot)}[w(\cdot)]\}\right)(0). \tag{3418}$$

از این، همراه با این که $\left(u\cdot\{\underset{\circ}{\nabla}_{v(\cdot)}[w(\cdot)]\}\right)$ پیوسته است، نتیجه میشود دست- ِ-کم یک θ_0 هست که

$$\left(u\cdot\{\underset{\circ}{\nabla}_{v(\cdot)}[w(\cdot)]\}\right)(\theta_0) = 0. \tag{3419}$$

تعریف میکنم

$$v'' = v(\theta_0). \tag{3420}$$

$$w'' = w(\theta_0). \tag{3421}$$

به این ترتیب، $\{(1,v''),(2,w'')\}$ یک میدان-پایه برا یِ $\mathrm{T}\tilde{\mathbb{M}}$ است، که

$$v''\cdot w'' = 0. \tag{3422}$$

$$u\cdot(\underset{\circ}{\nabla}_{v''}w'') = 0. \tag{3423}$$

اما جابِجاگر ِ v'' و w'' لزومَن صفر نیست. در واقع،

$$v'' \diamond w'' = \mathfrak{a}'\, v' + \mathfrak{b}'\, w' + \mathfrak{c}'\, v' \diamond w',$$
$$= \mathfrak{a}''\, v'' + \mathfrak{b}''\, w'', \tag{3424}$$

که $\mathfrak{a}'$، $\mathfrak{b}'$، $\mathfrak{c}'$، $\mathfrak{a}''$، و $\mathfrak{b}''$ میدانها یی اسکالر َند، و در برابری یِ دوم این به کار رفته که جابِجاگر ِ v' با w' صفر است، و v' و w' را میشود بر حسب ِ v'' و w'' بسط داد. تعریف میکنم

$$v = \mathfrak{a}_0\, v'', \tag{3425}$$

$$w = \mathfrak{b}_0\, w'', \tag{3426}$$

که $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{b}_0$ میدانها یی اسکالر َند. از

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w = \mathfrak{a}_0[\mathfrak{b}_0\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_{v''}\, w'' + (\mathbf{D}_{v''}\, \mathfrak{b}_0)\, w''], \tag{3427}$$

همراه با (3423) و البته این که u بر w'' عمود است، دیده میشود

$$u \cdot (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w) = 0. \tag{3386}$$

به علاوه رُشن است که

$$v \cdot w = 0, \tag{3428}$$

و اگر $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{b}_0$ هیچ یک صفر نباشند، $\{(1, v), (2, w)\}$ یک میدان-پایه برا یِ $\mathrm{T}\tilde{\mathbb{M}}$ است. میخاهم $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{b}_0$ را چنان تعیین کنم که جابِجاگر ِ v با w صفر شود. دیده میشود

$$v \diamond w = \mathfrak{a}_0\, (\mathbf{D}_{v''}\, \mathfrak{b}_0)\, w'' - \mathfrak{b}_0\, (\mathbf{D}_{w''}\, \mathfrak{a}_0)\, v'' + \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{b}_0\, (v'' \diamond w'')$$
$$= (\mathfrak{a}''\, \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{b}_0\, \mathbf{D}_{w''}\, \mathfrak{a}_0)\, v'' + (\mathfrak{b}''\, \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_0\, \mathbf{D}_{v''}\, \mathfrak{b}_0)\, w''. \tag{3429}$$

به این ترتیب، شرط ِ صفر-شدن ِ جابِجاگر ِ v با w این است که

$$\mathfrak{a}''\, \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{b}_0\, \mathbf{D}_{w''}\, \mathfrak{a}_0 = 0, \tag{3430}$$

$$\mathfrak{b}''\, \mathfrak{a}_0\, \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_0\, \mathbf{D}_{v''}\, \mathfrak{b}_0 = 0, \tag{3431}$$

یا

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_0}\,\mathbf{D}_{w''}\,\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}''. \tag{3432}$$

$$\frac{1}{\mathfrak{b}_0}\,\mathbf{D}_{v''}\,\mathfrak{b}_0 = -\mathfrak{b}''. \tag{3433}$$

این دستگاه ِ معادلات- ِ-دیفرانسیل ِ واجفتیده یِ از مرتبه یِ یک، برا یِ $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{b}_0$ جواب دارد. با این جوابها،

$$v \diamond w = 0. \tag{3434}$$

به این ترتیب، برا یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ یک نقشه یِ $\tilde{\phi}$ هست که v و w میدان-پایِها یِ مختصاتی یِ متناظر با آن َند، و (3386) براورده میشود. پس نقشه یِ ϕ که از رو یِ $\tilde{\phi}$ ساخته میشود، یک نقشه یِ متعامد برا یِ $\mathbb{M}$ است.

چکیده یِ طرح ِ بالا برا یِ ساختن ِ یک نقشه یِ متعامد (ϕ) در یک همسایگی یِ یک نقطه (x_0) از یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 3 بُعدی چنین است. یک زیرخمینه یِ 2 بُعدی شامل ِ x_0 میگیرم، که علامت ِ بردارها یِ ناصفر ِ مماس بر آن ثابت باشد. این زیرخمینه ($\tilde{\mathbb{M}}$) شرط ِ اولیه ($t=0$) برا یِ $\tilde{\mathbb{M}}_t$ ها (یک خانواده یِ زیرخمینِها یِ 2 بُعدی) است، که قرار است زیرخمینِها یِ یک-مختصه-ثابت (t-ثابت) باشند. بر $\tilde{\mathbb{M}}$ یک نقشه یِ متعامد ($\tilde{\phi}$) میگذارم. این نقشه را چنان تنظیم میکنم که مشتق ِ هموردا یِ (با هموستار- ِ-لِوی-چیویتا یِ) یک میدان-پایه یِ مختصاتی یِ آن (w) با میدان-پایه یِ مختصاتی یِ دیگر َش (v) بر زیرخمینه مماس باشد. نقشه یِ ϕ را چنان میگیرم که بر $\tilde{\mathbb{M}}$ دُ تا از مختصِها یَش هم ان مختصات ِ $\tilde{\phi}$، و مختصه یِ دیگر َش (t) صفر باشد. به این ترتیب یک شرط ِ اولیه ($t=0$) برا یِ ϕ^{-1} (جا یِ نقطه بر $\mathbb{M}$ بر حسب ِ مختصات) به دست میئاید. باید ϕ^{-1} برا یِ بقیه یِ t ها تعیین شود. برا یِ این کار میدان ِ برداری یِ u (میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با مختصه یِ t) را متناسب با ($v \times w$) میگیرم، و ضریب ِ تناسب را چنان میگیرم که اگر ($v \cdot w$) و $[u \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w)]$ صفر بودند، مشتق ِ $[u \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w)]$ نسبت به t هم صفر باشد. مشتق ِ ($v \times w$) نسبت به t با $[u \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w)]$ متناسب است. پس انتخاب ِ بالا برا یِ ضریب ِ تناسب تضمین میکند ($v \cdot w$) و $[u \cdot (\overset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}_v\, w)]$ صفر بمانند. پس میدان-پایه یِ مختصاتی یِ $\{(0,u),(1,v),(2,w)\}$ متعامد میماند.

در این طرح، حل ِ معادلات- ِ-دیفرانسیل پیش میئاید، در تنظیم ِ نقشه ِ $\tilde{\phi}$ برا یِ زیرخمینه یِ $\tilde{\mathbb{M}}$،

و در تعیین ِ ضریب ِ تناسب ِ بین ِ u و $(v \times w)$. جواب ِ این معادلات یکتا نیست، مگر با شرایط ِ مرزی یِ مناسب. البته بستِگی یِ ϕ^{-1} به t هم از حل ِ یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه یِ یک به دست میئاید. در این مُرد شرط ِ اولیه در $(t=0)$ هم ان $\tilde{\phi}^{-1}$ است.

در این طرح هموستار ِ لِوی-چیویتا به کار رفته. اما هموستار ِ لِوی-چیویتا ساختار یِ مستقل از شبه- ِ-متریک نیست. ضمنَن این طرح چیز ی قویتر از ساختن ِ فقط یک نقشه یِ متعامد است. اگر زیرخمینه یِ 2 بُعدی یِ $\tilde{\mathbb{M}}$ چنان باشد که علامت ِ بردارها یِ ناصفر ِ مماس بر آن ثابت باشد، یک نقشه یِ متعامد ساخته میشود که یک ی از مختصات ِ متناظر با آن بر $\tilde{\mathbb{M}}$ ثابت است.

دیده شد در این طرح معادله-یِ-دیفرانسیلها یی به کار رفته که جواب ِشان یکتا نیست. بخش ی از آزادی در این جوابها (و اثر ِشان بر نقشه یِ ϕ) را به سادِگی میشود دید. در معادله یِ (3411) برا یِ Σ، اگر جواب در تابع ی از فقط t، یعنی مستقل از $(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$، ضرب شود جواب ِ دیگر ی به دست میئاید. این یعنی u در تابع ی از فقط t ضرب شده، یا به جا یِ مختصه یِ t مختصه یِ $\underline{t}$ به کار رفته، که تابع ِ فقط t است:

$$\underline{u} = \frac{1}{\mathbf{D}\,\underline{t}}\,u. \tag{3435}$$

همچنین در معادلِها یِ (3432) و (3433) برا یِ $\mathfrak{a}_0$ و $\mathfrak{b}_0$، اگر جواب برا یِ $\mathfrak{a}_0$ در تابع ی از فقط $\mathfrak{x}$ ضرب شود جواب ِ دیگر ی به دست میئاید، و اگر جواب برا یِ $\mathfrak{b}_0$ در تابع ی از فقط $\mathfrak{y}$ ضرب شودجواب ِ دیگر ی به دست میئاید. اینها یعنی میشود به جا یِ $\mathfrak{x}$ مختصه یِ $\underline{\mathfrak{x}}$ را گذاشت که تابع ِ فقط $\mathfrak{x}$ است، و میشود به جا یِ $\mathfrak{y}$ مختصه یِ $\underline{\mathfrak{y}}$ را گذاشت که تابع ِ فقط $\mathfrak{y}$ است:

$$\underline{v} = \frac{1}{\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{x}}}\,v. \tag{3436}$$

$$\underline{w} = \frac{1}{\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{y}}}\,w. \tag{3437}$$

تبدیلها یِ متناظر با (3435) تا (3437) رویها یِ یک-مختصه-ثابت، یا خمها یِ دُ-مختصه-ثابت، را تغییر نمیدهند. این آزادیها در جواب را میشد از پیش هم انتظار داشت. این که $(t,\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ یک نقشه یِ متعامد باشد، یعنی

$$g = \frac{(\mathbf{D}\,t)\otimes(\mathbf{D}\,t)}{(\mathbf{D}\,t)\cdot(\mathbf{D}\,t)} + \frac{(\mathbf{D}\,\mathfrak{x})\otimes(\mathbf{D}\,\mathfrak{x})}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{x})\cdot(\mathbf{D}\,\mathfrak{x})} + \frac{(\mathbf{D}\,\mathfrak{y})\otimes(\mathbf{D}\,\mathfrak{y})}{(\mathbf{D}\,\mathfrak{y})\cdot(\mathbf{D}\,\mathfrak{y})}, \tag{3438}$$

و رُشن است که اگر $\underline{t}$ تابع ِ فقط t، $\underline{\mathfrak{x}}$ تابع ِ فقط $\mathfrak{x}$، و $\underline{\mathfrak{y}}$ تابع ِ فقط $\mathfrak{y}$ باشد، آنگاه

$$g = \frac{(\mathbf{D}\,\underline{t})\otimes(\mathbf{D}\,\underline{t})}{(\mathbf{D}\,\underline{t})\cdot(\mathbf{D}\,\underline{t})} + \frac{(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{x}})\otimes(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{x}})}{(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{x}})\cdot(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{x}})} + \frac{(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{y}})\otimes(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{y}})}{(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{y}})\cdot(\mathbf{D}\,\underline{\mathfrak{y}})}, \tag{3439}$$

که یعنی نقشه یِ $(\underline{t},\underline{\mathfrak{x}},,\underline{\mathfrak{y}})$ هم متعامد است.

در واقع این خاص ِ بُعد ِ 3 هم نیست.، این که ϕ یک نقشه یِ متعامد باشد (در بُعد ِ بیش از 3 ممکن است چنین نقشه ای وجود نداشته باشد) یعنی

$$g = \sum_i \frac{(\mathbf{D}\,\phi^i)\otimes(\mathbf{D}\,\phi^i)}{(\mathbf{D}\,\phi^i)\cdot(\mathbf{D}\,\phi^i)}. \tag{3440}$$

اگر نقشه یِ $\underline{\phi}$ چنان باشد که به ازا یِ هر i مختصه یِ $\underline{\phi}^i$ تابع ِ فقط ϕ^i باشد،

$$g = \sum_i \frac{(\mathbf{D}\,\underline{\phi}^i)\otimes(\mathbf{D}\,\underline{\phi}^i)}{(\mathbf{D}\,\underline{\phi}^i)\cdot(\mathbf{D}\,\underline{\phi}^i)}, \tag{3441}$$

که یعنی نقشه یِ $\underline{\phi}$ هم متعامد است.

80 نقشه یِ همدیس-دِکَرتی

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. میگویم $(\mathbb{M},g)$ همدیس-تخت است، اگر با یک تغییر ِ همدیس ِ شبه- ِ-متریک لِوی-چیویتا-تخت شود، یعنی یک میدان ِ اسکالر ِ Σ باشد که $(\mathbb{M},g')$ با

$$g' = [\exp(2\,\Sigma)]g \tag{2944}$$

تخت باشد.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. نقشه یِ ϕ اگر در یک ناحیه یِ باز شبه- ِ-متریک-دِکَرتی باشد، در آن ناحیه خمینه لِوی-چیویتا-تخت خاهد بود. برعکس، اگر خمینه در یک همسایِگی یِ باز ِ یک نقطه لِوی-چیویتا-تخت باشد، یک نقشه یِ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی هست که دامنه اَش شامل ِ آن نقطه است.

$(\mathbb{M},g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست، که در یک ناحیه یِ باز همدیس-تخت است. این یعنی یک ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ِ $[\exp(\Sigma)]$ از g به g' هست که $(\mathbb{M},g')$ در آن ناحیه تخت است. پس متناظر با هر نقطه یِ x_0 در آن ناحیه، یک نقشه یِ ϕ هست که دامنه اَش شامل ِ x_0 است و برا یِ خمینه یِ

شبه- ِ-ریمانی یِ $(\mathbb{M}, g')$ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست. رُشن است که ϕ یک نقشه برا یِ $(\mathbb{M}, g)$ هم هست. این که ϕ برا یِ $(\mathbb{M}, g')$ شبه- ِ-متریک-تخت است، یعنی مئلفِها یِ g' در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ ثابت اند. پس هر یک از مئلفِها یِ g در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ برابر ِ یک ثابت ضرب در $[\exp(-2\,\Sigma)]$ است، یا هر یک از مئلفِها یِ g در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ، ضرب در ضریب ِ تغییر- ِ-مقیاس ِ $[\exp(2\,\Sigma)]$ ثابت است. بر عکس، رُشن است که اگر یک Σ باشد که همه یِ $\{[\exp(2\,\Sigma)]g_{i\,j}\}$ ها ثابت باشند، آنگاه همه یِ $g'_{i\,j}$ ها با g' به شکل ِ (2944) ثابت خاهند بود، که این نشان میدهد $(\mathbb{M}, g')$ تخت است، و بنابراین $(\mathbb{M}, g)$ همدیس-تخت است. میگویم نقشه یِ ϕ یک نقشه یِ همدیس-دِکَرتی ست، وقت ی یک ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ِ $[\exp(2\,\Sigma)]$ هست که همه یِ $\{[\exp(2\,\Sigma)]g_{i\,j}\}$ ها ثابت َند، که $g_{i\,j}$ ها مئلفِها یِ g در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با ϕ اند. نتیجه این که $(\mathbb{M}, g)$ همدیس-تخت است، اگر و تنها اگر متناظر با هر نقطه یِ x_0 یک نقشه یِ همدیس-دِکَرتی باشد که دامنه اَش شامل ِ x_0 است.

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ m بُعدی ست. متناظر با ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ِ $[\exp(\Sigma)]$، شرط ِ این که اسکالر ِ خمش (با هموستار ِ لِوی-چیویتا) صفر شود چنین است.

$$(m-1)[2\,\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma + (m-2)(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)\cdot(\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma)] = \underset{\circ}{\mathcal{R}}. \qquad (2995)$$

این شرط، در بُعد ِ 2 به این شکل ِ سادِتر در میئاید.

$$\underset{\circ}{\nabla}\cdot\underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma = \frac{1}{2}\,\underset{\circ}{\mathcal{R}}. \qquad (2997)$$

در بُعد ِ 2، با هموستار ِ لِوی-چیویتا، خمینه اگر اسکالر-تخت باشد ریمان-تخت هم هست. نتیجه این که متناظر با خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی یِ $(\mathbb{M}, g)$ خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $\{\mathbb{M}, [\exp(2\,\Sigma)]g\}$ لِوی-چیویتا-تخت است، به شرط ِ آن که Σ رابطه یِ (2997) را براورَد. پس خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی یِ $(\mathbb{M}, g)$ همدیس-تخت است، اگر (2997) برا یِ Σ جواب داشته باشد. میشود نشان داد (2997) برا یِ Σ مُضعَن جواب دارد. نتیجه میشود

هر خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی مُضعَن همدیس-تخت است، و متناظر با هر نقطه یک نقشه یِ همدیس-دِکَرتی دارد که دامنه اَش شامل ِ آن نقطه است.

ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ی که یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی را لِوی-چیویتا تخت میکند یکتا نیست. از (2997) دیده میشود اگر Σ یک جواب ِ این معادله باشد، Σ' هم یک جواب

است، اگر و تنها اگر

$$\underset{\circ}{\nabla} \cdot \underset{\circ}{\nabla}(\Sigma' - \Sigma) = 0. \tag{3442}$$

همئرز با این، اگر خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی یِ $(\mathbb{M}, g)$ لِوی-چیویتا-تخت باشد، خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ $\{\mathbb{M}, [\exp(2\,\Sigma)]g\}$ هم لِوی-چیویتا-تخت است اگر و تنها اگر

$$\underset{\circ}{\nabla} \cdot \underset{\circ}{\nabla}\,\Sigma = 0. \tag{2998}$$

به این ترتیب، در حالت ِ کلی برا یِ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ 2 بُعدی، ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ی هست که خمینه را لِوی-چیویتا-تخت میکند، و نقشه ای هست که همدیس-دِکَرتی ست، اما هیچ یک از اینها یکتا نیستند.

با استفاده از درجه-یِ-آزادی هم میشود دید هر خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی یِ m بُعدی، اگر m برابر با 2 باشد مُضعَن یک نقشه یِ همدیس-دِکَرتی دارد، اما اگر m بیش از 2 باشد نَ لزومَن. این از آنجا میئاید که اگر g یک شبه- ِ-متریک، ϕ یک نقشه، و Σ یک میدان ِ اسکالر باشد،

$$\mathsf{fdf}(g) = \frac{m(m+1)}{2}. \tag{3443}$$

$$\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi) + \mathsf{fdf}(\Sigma) = m + 1. \tag{3444}$$

پس

$$[\mathsf{fdf}(\mathbf{D}\,\phi) + \mathsf{fdf}(\Sigma)] \begin{cases} = \mathsf{fdf}(g), & m = 2 \\ < \mathsf{fdf}(g), & m > 2 \end{cases}. \tag{3445}$$

به این ترتیب با تنظیم ِ نقشه یِ ϕ و ضریب- ِ-تغییر- ِ-مقیاس ِ $\exp(\Sigma)$، اگر m برابر با 2 باشد میشود همه مئلفِها یِ شبه- ِ-متریک را (تا حد ِ حفظ ِ نشانگان) به هر شکل ِ از پیش-تعیین-شده ای دراورد (مثلَن ثابت کرد)، اما اگر m بیش از 2 باشد نَ لزومَن.

81 رابطِها یِ مستقل-از-پایه بر اساس ِ نقشِها یِ ویژه

اگر مئلفِها یِ یک تانسر (یا میدان ِ تانسری) در پایه یِ خاص ی صفر باشند، آن تانسر (میدان ِ تانسری) صفر است. همئرز با آن، اگر مئلفِها یِ متناظر ِ دُ تانسر (یا میدان ِ تانسری) در پایه یِ خاص ی یکسان باشند، آن دُ تانسر (میدان ِ تانسری) با هم برابر َند. گاه ی استفاده از نقشِها (پایِها) یِ ویژه اثبات ِ بعض ی برابریها را ساده میکند. مثلَن گیرم u یک میدان ِ برداری ست. میدان ِ تانسری یِ T را چنین تعریف میکنم

$$T^i{}_{k\,l} = (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_{k\,l} - (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_{l\,k}, \tag{3446}$$

که هموستار متقارن است. متناظر با هر x، یک نقشه هست که در x هموستار-دِکَرتی ست. در میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با این نقشه،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_{k\,l}(x) &= [\mathbf{D}_k(\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_l](x),\\ &= [\mathbf{D}_k(\mathbf{D}_l\,u^i + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,j}\,u^j)](x),\\ &= (\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_l\,u^i)(x) + [(\mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,j})u^j](x).\end{aligned} \tag{3447}$$

جمله یِ اول، نسبت به k و l متقارن است. به این ترتیب،

$$T^i{}_{k\,l}(x) = [(\mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,j} - \mathbf{D}_l\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j})u^j](x). \tag{3448}$$

ضمنَن

$$Rb^i{}_{j\,k\,l} = \mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,j} - \mathbf{D}_l\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j} + \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,p}\,\boldsymbol{\Gamma}^p{}_{l\,j} - \boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,p}\,\boldsymbol{\Gamma}^p{}_{k\,j}. \tag{2035}$$

پس،

$$\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}(x) = (\mathbf{D}_k\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{l\,j} - \mathbf{D}_l\,\boldsymbol{\Gamma}^i{}_{k\,j})(x). \tag{3449}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$T^i{}_{k\,l}(x) = (\boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,u^l)(x). \tag{3450}$$

از برابری یِ مئلفِها یِ متناظر ِ دُ-طرف در یک پایه یِ خاص، نتیجه میشود این رابطه مستقل از پایه درست است. همچنین، استدلال را میشود برا یِ هر x به کار برد (با استفاده از نقشه ای که در آن x هموستار-دِکَرتی ست). پس این رابطه همه-جا درست است:

$$T^i{}_{k\,l} = \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,u^l, \tag{3451}$$

یا،

$$(\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_{k\,l} - (\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\,u)^i{}_{l\,k} = \boldsymbol{R}^i{}_{j\,k\,l}\,u^l. \tag{3452}$$

مثالها یی دیگر در بخشها یِ بعد بررسی میشوند.

82 خمش ِ لِوی-چیویتا و نقشه یِ شبه- ِ-متریک-دِکَرتی

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. e را میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با یک نقشه میگیرم که در x شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست. دیده میشود

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_{j\,k\,l}(x) = (\mathbf{D}_k\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_{l\,j})(x) - (\mathbf{D}_l\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_{k\,j})(x). \tag{3453}$$

همچنین،

$$(\mathbf{D}_p\,\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}{}^i{}_{q\,j})(x) = \frac{1}{2}[g^{r\,i}(\mathbf{D}_p\,\mathbf{D}_j\,g_{r\,q} + \mathbf{D}_p\,\mathbf{D}_q\,g_{r\,j} - \mathbf{D}_p\,\mathbf{D}_r\,g_{j\,q})](x). \tag{3454}$$

به این ترتیب،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}^i{}_{j\,k\,l}(x) = \frac{1}{2}[g^{r\,i}(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,g_{r\,l} - \mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_r\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,g_{r\,k} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_r\,g_{j\,k})](x). \tag{3455}$$

و البته،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}{}_{i\,j\,k\,l}(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_j\,g_{i\,l} - \mathbf{D}_k\,\mathbf{D}_i\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,g_{i\,k} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_i\,g_{j\,k})(x). \tag{3456}$$

پس،

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}{}_{j\,l}(x) = \frac{1}{2}[g^{r\,i}(\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,g_{r\,l} - \mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_r\,g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_j\,g_{r\,i} + \mathbf{D}_l\,\mathbf{D}_r\,g_{j\,i})](x). \tag{3457}$$

$$\underset{\circ}{\mathcal{R}}(x) = [g^{p\,q}\, g^{r\,i}(\mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_p\, g_{r\,q} - \mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_r\, g_{p\,q})](x). \tag{3458}$$

$$\begin{aligned}\underset{\circ}{\mathsf{G}}_{j\,l}(x) = {}& \frac{1}{2}[g^{r\,i}(\mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_j\, g_{r\,l} - \mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_r\, g_{j\,l} - \mathbf{D}_l\, \mathbf{D}_j\, g_{r\,i} + \mathbf{D}_l\, \mathbf{D}_r\, g_{j\,i})](x) \\ & - \frac{1}{2}[g_{j\,l}\, g^{p\,q}\, g^{r\,i}(\mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_p\, g_{r\,q} - \mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_r\, g_{p\,q})](x).\end{aligned} \tag{3459}$$

متناظر با هر x یک نقشه هست که در x شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست. پس متناظر با هر x میشود نقشه ای یافت که در آن مئلفِها یِ خمش ِ لِوی-چیویتا به شکل ِ رابطِها یِ بالا باشند. از (3456) به سادِگی دیده میشود در میدان-پایه یِ متناظر با آن نقشه،

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,l\,k}(x) = -\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}(x). \tag{3460}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{j\,i\,k\,l}(x) = -\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}(x). \tag{3461}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{k\,l\,i\,j}(x) = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}(x). \tag{3462}$$

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,k\,l\,j} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,l\,j\,k})(x) = 0. \tag{3463}$$

اما این رابطِها اگر در یک پایه یِ خاص برقرار باشند، در هر پایه ای برقرار َند. پس این رابطِها در هر x درست َند:

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,l\,k} = -\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}. \tag{3464}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{j\,i\,k\,l} = -\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}. \tag{3465}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{k\,l\,i\,j} = \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l}. \tag{3466}$$

$$\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,j\,k\,l} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,k\,l\,j} + \underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_{i\,l\,j\,k} = 0. \tag{3467}$$

اینها هم ان تقارنها یِ نقطِئی یِ خمش- ِ-لِوی-چیوتا یَند. این که متناظر با هر x یک نقشه هست که در x شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست، یک راه ِ ساده برا یِ اثبات ِ این نقارنها ست. هم ین روش یک راه ِ ساده برا یِ اثبات ِ تقارن ِ تانسر- ِ-ریچی یِ لِوی-چیویتا:

$$\underset{\circ}{\mathsf{R}}_{l\,j} = \underset{\circ}{\mathsf{R}}_{j\,l} \tag{3468}$$

است.

83 لَپلَسی و سیلَپلَسی در خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی

$(\mathbb{M}, g)$ یک خمینه یِ شبه- ِ-ریمانی ست. لَپلَسی و سیلَپلَسی در حالت ِ کلی با هم برابر نیستند. میخاهم اختلاف ِ اینها را حساب کنم. e را میدان-پایه یِ مختصاتی یِ متناظر با یک نقشه میگیرم که در x شبه- ِ-متریک-دِکَرتی ست. هممشتق ِ برونی (و در نتیجه لَپلَسی) را با شبه- ِ-متریک تعریف میکنم. اگر σ یک یک-فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma = -\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}}\,\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}\,g^{j\,i}\,\sigma_j]. \tag{3469}$$

به این ترتیب،

$$(-\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)_k = \mathbf{D}_k\left\{\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}}\,\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}\,g^{j\,i}\,\sigma_j]\right\}. \tag{3470}$$

مشتق ِ مئلفِها یِ g در نقطه یِ x صفر است. به این ترتیب در x طرف ِ راست ِ عبارت ِ بالا بر حسب ِ مئلفِها یک جمله دارد که شامل ِ g و مشتق ِ دوم ِ σ است، و یک جمله که شامل ِ g و مشتق ِ دوم ِ آن و خُد ِ σ (مشتق ِ صفر ُم آن) است. در $(\mathbf{d}\,\sigma)_{p\,q}$ شبه- ِ-متریک ظاهر نمیشود. به این ترتیب، $(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma)$ شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا اول ِ g است. چون در x مشتق ِ اول ِ مئلفِها یِ g صفر است، $(\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\mathbf{d}\,\sigma)$ در x شامل ِ فقط مشتق ِ دوم ِ مئلفِها یِ σ و خُد ِ g (مشتق ِ صفرُم ِ آن) است. پس،

$$[-(\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}} + \mathbf{d}^{t}\,\mathbf{d})\sigma]_k = g^{j\,i}\,\mathbf{D}_i\,\mathbf{D}_j\,\sigma_k + \mathfrak{a}_k, \tag{3471}$$

که $\mathfrak{a}$ شامل ِ مشتقها یِ دست- ِ-بالا اول ِ σ است (و البته در x شامل ِ فقط خُد ِ σ است). با استدلالها یِ بالا دیده میشود $\mathfrak{a}$ در x از فقط $(-\mathbf{d}\,\mathbf{d}^{\mathrm{t}}\,\sigma)$ سهم میگیرد، و در واقع،

$$(\mathfrak{a}_k)(x) = \left[\left(\mathbf{D}_k\left\{\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}}\,\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\,g)|}\,g^{j\,i}]\right\}\right)\sigma_j\right](x). \tag{3472}$$

دیده میشود

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}}\, \mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}\, g^{j\,i}],$$
$$= \frac{1}{\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}}\{\mathbf{D}_i[\sqrt{|\mathsf{det}(\delta_e\, g)|}]\}g^{j\,i} + \mathbf{D}_i\, g^{j\,i}, \tag{3473}$$
$$= \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_{i\,l}\, g^{j\,i} - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^j{}_i{}^i - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^i{}_i{}^j,$$
$$= -\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^j{}_i{}^i. \tag{3474}$$

به این ترتیب،

$$(\underset{\circ}{\triangle}\, \sigma)_k(x) = (g^{j\,i}\, \mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_j\, \sigma_k)(x) - [(\mathbf{D}_k\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^j{}_i{}^i)\sigma_j](x), \tag{3475}$$

که $\triangle$ لَپلَسی بی ست که با شبه- ِ-متریک تعریف میشود. به هم ین ترتیب،

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)_k = \mathbf{D}_i\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)^i{}_k + \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^i{}_{i\,j}\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)^j{}_k - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^j{}_{i\,k}\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)^i{}_j. \tag{3476}$$

$\underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}$ در x صفر است. پس در x جملِها یِ دوم و سوم ِ طرف ِ راست صفر َند. از اینجا،

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)_k(x) = [\mathbf{D}_i\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)^i{}_k](x),$$
$$= \{\mathbf{D}_i[g^{j\,i}\, (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)_{j\,k}]\}(x),$$
$$= [g^{j\,i}\, \mathbf{D}_i(\mathbf{D}_j\, \sigma_k - \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_{j\,k}\, \sigma_l)](x), \tag{3477}$$

که نتیجه میدهد

$$(\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)_k(x) = (g^{j\,i}\, \mathbf{D}_i\, \mathbf{D}_j\, \sigma_k)(x) - [(\mathbf{D}^j\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_{j\,k})\sigma_l](x). \tag{3478}$$

از ترکیب ِ این با (3475) نتیجه میشود

$$(\underset{\circ}{\triangle}\, \sigma)_k(x) - (\underset{\circ}{\boldsymbol{\nabla}}\, \sigma)_k(x) = [(\mathbf{D}^i\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_{i\,k})\sigma_l](x) - [(\mathbf{D}_k\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_i{}^i)\sigma_l](x),$$
$$= [(\mathbf{D}^i\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^l{}_{k\,i})\sigma_l](x) - [(\mathbf{D}_k\, \underset{\circ}{\boldsymbol{\Gamma}}^{l\,i}{}_i)\sigma_l](x),$$
$$= (\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}^l{}_i{}^i{}_k\, \sigma_l)(x),$$
$$= (-\underset{\circ}{\boldsymbol{R}}_i{}^{l\,i}{}_k\, \sigma_l)(x). \tag{3479}$$

به این ترتیب،

$$[(\underset{\circ}{\triangle} - \underset{\circ}{\nabla}\underset{\circ}{\nabla})\sigma]_k = -\underset{\circ}{\mathsf{R}}^l{}_k\,\sigma_l. \tag{3480}$$

گسترش ِ این رابطه به میدانها یِ s-فرم- ِ-دیفرانسیل هم ساده است. با استدلالها یی مشابه دیده میشود اگر ω یک s-فرم- ِ-دیفرانسیل باشد،

$$[(\underset{\circ}{\triangle} - \underset{\circ}{\nabla}\underset{\circ}{\nabla})\omega]_{1_1\cdots i_s} = -\sum_{k=1}^{s}\underset{\circ}{\mathsf{R}}^j{}_{i_k}\,\omega_{i_1\cdots i_{k-1}\,j\,i_{k+1}\cdots i_s}. \tag{3481}$$

و البته برا یِ یک میدان ِ اسکالر ِ Σ،

$$(\underset{\circ}{\triangle} - \underset{\circ}{\nabla}\underset{\circ}{\nabla})\Sigma = 0. \tag{3482}$$

قبلَن دیده شد شرط ِ برقراری یِ این رابطه آن است که هموستار متقارن و با عنصر- ِ-حجم سازگار باشد. هموستار ِ لِوی-چیویتا چنین است و در نتیجه با آن،

$$\nabla\nabla\,\Sigma = \triangle\,\Sigma. \tag{2623}$$

9

پیوست

84 چند مرجع

در این بخش، [0] یعنی هم ین کتاب.

[1] یک کتاب ِ نَ-چندان-استاندارد ِ جبر ِ خطی ست. نمادگذاری یِ [0] بر اساس ِ [1] است.

[2] یک کتاب ِ درسی یِ استاندارد ِ جبر ِ خطی ست.

[3] یک کتاب ِ درسی یِ حسابان است.

[4] یک کتاب ِ تپُلژی ست. از جمله شامل ِ تپُلژی و فشرده-بودن است.

[5] یک کتاب ِ درسی یِ آنالیز ِ ریاضی ست. از جمله شامل ِ قضیِها یِ تابع- ِ-واورن و رتبه است.

[6] یک کتاب ِ هندسه-یِ-خمینه است. از جمله چیزها یی در باره یِ تار و هموستار دارد.

[7] چنان که از اسم َش بر میئاید، هندسه و تپُلژی برا یِ فیزیک-پیشِها ست.

[1] محمد خرمی؛ «جبر ِ خطی»، ویراست ِ سوم (2016/05/10) XB-001

[2] Kenneth Hoffman & Ray Kunze; “Linear Algebra”, 2nd edition (Prentice Hall, 1971)

[3] Tom, M. Apostol; “Calculus”, 2nd edition (John Wiley & Sons, 1967)

[4] George F. Simmons; “Introduction to toplogy and modern analysis”, (McGraw-Hill, 1963)

[5] Walter Rudin; “Principles of mathematical analysis”, 3rd edition (McGraw-Hill, 1984)

[6] Serge Lang; “Differential and Riemannian Manifolds”, (Springer, 1995)

[7] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, 2nd edition (Institute of Physics Publishing, 2003)

85 اسمها یِ خاص

اِرمیت (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

شَرل اِرمیت (1822 تا 1901) Charles Hermite

اَینشْتَین (فیزیک- پیشه یِ سویسی- آلمانی- امریکایی)

آلبِرت اَینشْتَین (1879 تا 1955) Albert Einstein

بیانکی (ریاضی- پیشه یِ ایتالیایی)

لویجی بیانکی (1856 تا 1928) Luigi Bianchi

دِکَرت (ریاضی- پیشه یِ فرانسوی)

رُنه دِکَرت (1596 تا 1650) René Descartes

ریچی- کورباسترُ (ریاضی- پیشه یِ ایتالیایی)

گِرِگُریُ ریچی- کورباسترُ (1853 تا 1925) Gregorio Ricci-Curbastro

ریمان (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

گِئُرگ فْریدریش برنهارد ریمان (1826 تا 1866) Georg Friedrich Bernhard Riemann

سْتُکس (فیزیک- پیشه- ریاضی- پیشه یِ ایرلندی)

جرِج گابریِل سْتُکس (1819 تا 1903) George Gabriel Stokes

شْمیت (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

اِرهارد شْمیت (1876 تا 1959) Erhard Schmidt

فْرُبِنیوس (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

فِردیناند گِئُرگ فْرُبِنیوس (1849 تا 1917) Ferdinand Georg Frobenius

کْرُنِکِر (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

لِئُپُلد کْرُنِکِر (1823 تا 1891) Leopold Kronecker

گاؤس (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ آلمانی)

کارل فْریدریش گاؤس (1777 تا 1855) Karl Friedrich Gauss

گْرام (ریاضی- پیشه یِ دانمارکی)

یُرگِن پِدِرسِن گْرام (1850 تا 1916) Jørgen Pedersen Gram

لَپلَس (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ فرانسوی)

پیِر- سیمُن دُ لَپلَس (1749 تا 1827) Pierre-Simon de Laplace

لَگرانژ (ریاضی- پیشه- فیزیک- پیشه یِ ایتالیایی- فرانسوی)

ژُزِف- لویی لَگرانژ (1736 تا 1813) Joseph-Louis Lagrange

لِوی- چیویتا (ریاضی- پیشه یِ ایتالیایی)

تولیُ لِوی- چیویتا (1873 تا 1941) Tullio Levi-Civita

لی (ریاضی- پیشه یِ نروژی)

ماریوس سُفوس لی (1842 تا 1899) Marius Sophus Lie

لَیبنیتس (ریاضی- پیشه یِ آلمانی)

گُتفرید ویلهِلم لَیبنیتس (1646 تا 1716) Gottfried Wilhelm Leibniz

نیوتُن (فیزیک-پیشه-ریاضی-پیشه یِ بریتانیایی)
آیزاک نیوتُن (1642 تا 1727) Isaac Newton

وَیل (ریاضی-پیشه یِ آلمانی)
هِرمان کْلاؤس هوگُ وَیل (1885 تا 1955) Hermann Klaus Hugo Weyl

هاج (ریاضی-پیشه یِ سْکاتلندی)
ویلیام والانس داگلاس هاج (1903 تا 1975) William Vallance Douglas Hodge

هاؤسدُرف (ریاضی-پیشه یِ آلمانی)
فِلیکس هاؤسدُرف (1868 تا 1942) Felix Hausdorff

یاکُبی (ریاضی-پیشه یِ آلمانی)
کارل گوستاو یاکُب یاکُبی (1804 تا 1851) Carl Gustav Jacob Jacobi

86 واژه-نامه یِ فارسی به انگلیسی

⊙ یعنی واژه یِ انگلیسی من-دراوردی ست.

آفین	affine
اتحاد	identity
اتلس	atlas
اثبات	proof
اجتماع	union
ادغام	contraction
اسکالر	scalar
اِرمیت	Hermite
اِرمیتی	Hermitian
اشتراک	intersection
افقی	horizontal

افقی- افکنده	horizontally-projected ◎
افکنش	projection
افکنده	projected
القاییده	induced
انتقال	translation
انتقال	transport
انتقال- یافته	translated
انتقال- یافته	transported
انتگرال	integral
انتگرالپذیر	integrable
انتگرالگیری	integration
اَینشتَین	Einstein

باپایان	finite
باز	open
بازپارامترش	reparametrization
بازپارامتریده	reparametrized ◎
بازه	interval
بالا- برده	elevated ◎
بدیهی	trivial
بدیهیت	trivialness ◎
بدیهیگر	trivialization
بردار	vector
برداری	vector
برش	section

برونی	exterior
بسته	closed
بُعد	dimension
بُعدی	dimensional
بهنجار	normal
بیانکی	Bianchi
بیپایان	infinite
بیمرز	boundaryless

پادتقارن	antisymmetry
پاددستیده	antihanded ⊚
پادمتقارن	antisymmetric
پادمتقارنگر	antisymmetrizer
پارامتر	parameter
پارامترش	parameterization
پارِئی	partial
پارش	partition
پارش ِ یک	partition of unity
پایه	basis
پرش	jump
پسار	pullback
پوچ	null
پوشا	onto, surjective
پوشش	cover
پهنه	span

پیچش	torsion
پیشران	pushforward
پیوستِگی	continuity
پیوسته	continuous

تابع	function
تابع- ِ-جایگشت	permutation function ◎
تابع- ِ-جایگشت ِ علامتدار	signed permutation function ◎
تابع- ِ-مشتق	derivative function ◎
تار	fiber
تاری	fiber
تارَد	fiber-trace ◎
تانسر	tensor
تانسری	tensor
-تایی	-tuple
تبدیل	transformation
تبدیل- ِ-تشابهی-یافته	similarity-transformed ◎
تپُلژی	topology
تپُلژیدار	topology-ful ◎
تپُلژیک	topological
تحدید	restriction
تخت	flat
تختیت	flatness ◎
ترانهاده	transpose
ترکیب	combination

تشابهی	similarity
تصویر	image
تغییر	change
تقارن	symmetry
تقارنی	symmetricity ◎
تکدست	handed ◎
تک-علامت	isosigned ◎
تکین	singular
تناظر	correspondence
توده	bulk ◎
تهی	empty
تیکِر	t-cur ◎
تیکرل	t-curl ◎
ثابت	constant
جابِجاگر	commutator
جایگشت	permutation
جبر	algebra
جبری	algebraic
جمع	summation
چپدست	left-handed ◎
چگالی	density
چندخطی	multilinear

حاصل- ِ-جمع	sum
حاصل- ِ-ضرب	product
حجم	volume
حسابان	calculus
حقیقی	real
خارج- ِ-قسمت	quotient
خارجی	cross
خُش-تعریف	well-defined
خطی	linear
خطی-مستقل	linearly-independent
خطی-وابسته	linearly-dependent
خم	curve
خمش	curvature
خمینه	manifold
خمینه-یِ-پایه	base manifold
دامنه	domain
دایره	circle
دترمینان	determinant
دُ-خطی	bilinear
درجه-یِ-آزادی	degree-of-freedom
درون	interior
درونی	inner
دستیدِگی	handedness ◎

دستیده	handed ◎
دی-طول	di-length ◎
دفاع	apology
دُ-فرمدار	two-form-ful ◎
دقیق	exact
دقیق-ساز	exactifier ◎
دِکَرت	Descartes
دِکَرتی	Cartesian
دُگان	dual
دُگانی	duality
دلبخاه	arbitrary
دیفرانسیل	differential
دیورِژانس	divergence
ذاتی	intensive
رابطه	relation
راستدست	right-handed ◎
رئس	vertex
رتبه	rank
رد	trace
رده	class
ریچی	Ricci
ریمان	Riemann
ریمانی	Riemannian

زاویه	angle
زنجیرِئی	chain
زیر-	sub-
ژئُدزیک	geodesic
سازگار	consistent
سْتُکس	Stokes
ستون	column
ستونی	column
سراسری	global
سطر	row
سمتپذیر	orientable
سویی	directional
سیلَپلَسی	c-Laplacian ⊚
شاخص	index
شارش	flow
شبه- ِ-	pseudo-
شبه- ِ-ضرب ِ درونی	pseudoinner product
شبه- ِ-معین-مثبت	positive semidefinite
شبه- ِ-معین-منفی	negative semidefinite
شعاع	radius
شْمیت	Schmidt

صفر	zero
ضرب ِ درونی	inner product
ضربگر	productor ⊚
طبیعی	natural
طول	length
طول- ِ-جبری یِ نامعین	indefinite algebraic length ⊚
عدد	number
عدد ِ صحیح	integer
عضو	member
علامت	sign
عمل	operation
عملگر	operator
عنصر	element
عنصر ِ ماتریسی	matrix element
فْرُبِنیوس	Frobenius
فرم	form
فروکاستگرایانه	reductionistic
فروکاستگرایی	reductionism
فزونوَر	extensive
فشرده	compact
فضا	space

فیزیک	physics
قائم	vertical
قائم-افکنده	vertically-projected ◎
قاعده	rule
قرارداد	convention
قضیه	theorem
قطری	diagonal
کاهش	reduction
کاهش ِ درونی	inner reduction ◎
کِر	cur ◎
کرل	curl
کْرُنِکِر	Kronecker
کلاف	bundle
کلی	general
کنج	frame
گاؤس	Gauss
گاؤسی	Gaussian
گاؤسی-بهنجار	Gaussian normal
گرادیان	gradient
گذار	transition
گْرام	Gram
گسترش-یافته	extended

گُوِئی	wedge
گونه	type
گوی	ball
لَپلَس	Laplace
لَپلَسی	Laplacian
لَگرانژ	Lagrange
لِوی-چیویتا	Levi-Civita
لی	Lie
لَیبنیتس	Leibniz
لَیبنیتسی	Leibnizian ◎
ماتریس	matrix
مئلفه	component
مبنا	base
مبنا-نگهدار	base-preserving ◎
متریک	metric
متعامد	orthogonal
متقارن	symmetric
متقارنگر	symmetrizer
متوازی‌السطوح	parallelepiped
مثبت	positive
مجموعه	set
مختصات	coordinates
مختصاتی	coordinate

مختصه	coordinate
مرز	boundary
مرزدار	boundary-ful ◎
مساحت	area
مستقل-از-	-independent
مستقیم	direct
مشتق	derivative
مشتقپذیر	differentiable
مشتقگیری	differentiation
مُضعَن	locally
معادله	equation
معین	definite
معین-مثبت	positive definite
معین-منفی	negative definite
مکعب	cube
مماس	tangent
منفی	negative
موازی	parallel
میانگین	mean
میدان	field
میدان-پایه	basis-field ◎
میدان-کنج	frame-field ◎
ناپیوستِگی	discontinuity
ناپیوسته	discontinuous

ناتکین	nonsingular
ناتهی	nonempty
نامعین	indefinite
ناوردا	invariant
ناوردا-توده	invariant-bulk ◎
ناوردا-چگالی	invariant-density ◎
نشانگان	signature
نُع	type
نُعی	typical
نقشه	chart
نقطِئی	pointwise ◎
نقطه	point
نگاشت	mapping
نگاشت ِ افقی	horizontal mapping ◎
نگاشت ِ موازی	parallel mapping ◎
نیوتُن	Newton

وابسته-به-	-dependent
وابسته یِ	associated ◎
وابرریختی	diffeomorphism
واحد	unit
وارون	inverse
وارونپذیر	invertible
وارون ِ راست	right inverse
وجه	face

ویژه	special
ویژه- بردار	eigenvector
ویژه- مقدار	eigenvalue
وَیل	Weyl
هاج	Hodge
هاؤسدُرف	Hausdorff
هسته	kernel
هُلُنُمی	holonomy
همئرز	equivalent
همئرزی	equivalence
همانریخت	homeomorphic
همانریختی	homeomorphism
همانی	identity
همبردار	covector
همبسته	coclosed ◎
همبند	connected
همپیچش	contorsion
همخمش	cocurvature ◎
همدستیده	cohanded ◎
همدقیق	coexact ◎
همدیس	conformal
همدیس- دِکَرتی	conformally Cartesian ◎
همسایِگی	neighborhood
همضرب	coproduct ◎

همکاهش	coreduction ◎
همکاهش ِ درونی	inner coreduction ◎
همگونه	cotype ◎
هممشتق	coderivative ◎
هممماس	cotangent
هموار	smooth
هموردا	covariant
هموستار	connection
هندسه	geometry
هیئت	field

یاکُبی	Jacobi
یال	edge
یالدار	edge-ful ◎
یالی	edgity ◎
یک-به-یک	one-to-one, injective
یکریخت	isomorphic
یکریختی	isomorphism
یکنواخت	uniform
یکه	unit
یکه	unimodular
یکه-متعامد	orthonormal

XB-002 (2016/08/20)

Geometry

Mohammad Khorrami mamwad@mailaps.org

Using, printing, and publishing this text for non-commercial purposes is free, provided it is not altered in any sense (including text, style, and orthography). For any other use, author's permission is needed.

XB-002

Geometry

Mohammad Khorrami