

## نسبت حجم گوی به حجم مکعب

حجم یک گوی  $n$  بُعدی به شعاع 1 را با  $B_n$ ، و حجم یک مکعب  $n$  بُعدی به ضلع 2 را با  $C_n$  نشان می‌دهم:

$$B_n = \frac{2 \pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

$$C_n = 2^n.$$

نسبت این دو چنین میشود

$$\frac{B_n}{C_n} = \frac{2 \pi^{n/2}}{2^n (n/2)!}$$

این نسبت را با  $D_n$  نشان می‌دهم.  $D_n$  نسبت به  $n$  نزولی است و

$$\frac{1}{n} \ln D_n = \frac{1}{2} \ln \frac{e \pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

نسبت حجم گوی به حجم مکعب، با افزایش بُعد کم میشود و در بُعد به بینهایت به صفر میگراید. در  $n$  های بزرگ، حجم یک گوی به شعاع 1 برابر با حجم یک مکعب به طول  $(2 \ell_n)$  است، که

$$\ell_n \sim \sqrt{\frac{e \pi}{2n}}.$$