X1-178 (2024/02/12)

چندقطبیها یِ مغناطیسی، و شمارش

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

چندقطبیها یِ مغناطیسی بر اساسِ مختصاتِ دِکَرتی تعریف میشوند. تعدادِ مثلفهِ-یِ-مستقلها یِ اینها، بر حسبِ بُعدِ فضا و رتبه یِ چندقطبی به دست میئاید.

1 بسطِ چندقطبی-یِ-مغناطیسی

این در ادامه یِ [1] هست و نماد-گذاریها یِ [1] اینجا هم به کار میرود.

پتانسیلِ برداری یِ مغناطیسی برا یِ یک تُزیع-ِ-جریانِ ایستا یِ جای-گزیده چنین میشود.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \int (\mathrm{d}\,V')\,[G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}'). \tag{1}$$

$\boldsymbol{A}$ پتانسیلِ برداری، $\boldsymbol{J}$ چگالی-یِ-جریان، $\boldsymbol{r}$ مکان، و $(\mathrm{d}\,V)$ عنصر-ِ-حجم است. G هم تابع-ِ-گرین [2] است. دور از تُزیع-ِ-جریان، $[G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]$ را بر حسبِ مختصاتِ دِکَرتی یِ $\boldsymbol{r}'$ بسط میدهم:

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \sum_{\ell=0}^{\infty} [G_{(\ell)\,i_1\cdots i_l}(\boldsymbol{r})]\, r'^{i_1}\cdots r'^{i_\ell}. \tag{2}$$

که $G_{(\ell)}$ به مشتقِ ℓ اُمِ G مربوط است:

$$G_{(\ell)\, i_1\cdots i_\ell} = \frac{(-1)^l\, \partial_{i_1}\cdots\partial_{i_\ell}\, G}{\ell!}. \tag{3}$$

و ∂_i مشتق-گیری نسبت به مختصه یِ دِکَرتی یِ i است. از (1) و (2) نتیجه میشود

$$A^j(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{j\, i_1\cdots i_\ell}\, G_{(\ell)\, i_1\cdots i_\ell}(\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

که،

$$\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{j\, i_1\cdots i_\ell} = \int (\mathrm{d}\, V)\, [J^j(\boldsymbol{r})]\, r^{i_1}\cdots r^{i_\ell}. \tag{5}$$

به $\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}$ پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ میگویم. در $\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{j\, i_1\cdots i_\ell}$، به j شاخصِ صفرم و به $i_{\mathfrak{a}}$ شاخصِ $\mathfrak{a}$ اُم میگویم. رُشن است که پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی نسبت به شاخصها یِ نا-صفرمَ ش متقارن است.

بسطِ (2) برا یِ دور از تُزیع-ِ-بار نوشته شده، جا یی که r (طولِ بردارِ $\boldsymbol{r}$) بزرگ است، از جمله $\boldsymbol{r}$ صفر نیست:

$$\boldsymbol{r} \neq 0. \tag{6}$$

از این پس (6) را برقرار میگیرم.

تابعِ گرین (جز در مبدئ) معادله یِ لَپلَس [3] را بر میئاورَد:

$$\delta^{i\,j}\,(\partial_i\,\partial_j\, G)(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{7}$$

که δ دلتا یِ کْرُنِکِر [4] است، و شاخصها با آن بالا-و-پایین میروند:

$$\mathfrak{X}_i = \delta_{i\,j}\,\mathfrak{X}^j. \tag{8}$$

$$\mathfrak{X}^i = \delta^{j\,i}\,\mathfrak{X}_j. \tag{9}$$

از (3) و (7) نتیجه میشود

$$\delta^{i_a\, i_b}\, G_{(\ell)\, i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_\ell} = 0. \tag{10}$$

این یعنی ردِ $G_{(\ell)}$ بر هر دُ-شاخص َش صفر است. نتیجه این که میشود به پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی چیز ی افزود که در دُ تا از شاخصها یَ ش که هیچ کدام شاخصِ صفرم نیستند با δ متناسب است: با این کار پتانسیلِ برداری عوض نمیشود. همچنین، دیده میشود اگر ℓ صفر نباشد،

$$\delta^{j\,i_1}\,G_{(\ell)\,i_1\cdots i_\ell}(\boldsymbol{r})=\partial^j\,\left[\frac{(-1)^l\,\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_\ell}\,G}{\ell!}\right]. \tag{11}$$

و رُشن است که مانسته یِ این برا یِ هر شاخصِ نا-صفرمِ دیگر به جا یِ شاخصِ اول هم برقرار است. پس اگر به پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی با رتبه یِ ناصفر چیز ی افزوده شود که در دُ تا از شاخصها یَ ش که یک ی از آنها شاخصِ صفرم است با δ متناسب باشد، به پتانسیلِ برداری گرادیانِ یک میدانِ اسکالر اصافه میشود. با این کار، میدانِ مغناطیسی عوض نمیشود. پس میشود به پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی چیز ی افزود که در دُ تا از شاخصها یَ ش (هر دُ-شاخص ی) با δ متناسب باشد.

سرانجام، دیده میشود

$$0=\int(\mathrm{d}\,V)\,\frac{\partial\,\{[J^k(\boldsymbol{r})]\,r^{i_1}\cdots r^{i_\ell}\,r^j\}}{\partial\,r^k}. \tag{12}$$

این از آنجا میئاید که انتگرالده دیورژانسِ یک میدانِ برداری ست، پس میشود انتگرال بر حجم را به یک انتگرال بر سطح در حدِ ناحیه-یِ-انتگرال-گیری-به-بینهایت-دور تبدیل کرد. و چون چشمه (چگالی-یِ-جریان) جای-گزیده است، این انتگرال صفر میشود. همچنین، چون چشمه ایستا ست،

$$\partial_k\,J^k=0. \tag{13}$$

از (12) و (13) نتیجه میشود

$$0=\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{j\,i_1\cdots i_\ell}+\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\ell}\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{i_\mathfrak{a}\,i_1\cdots i_{\mathfrak{a}-1}\,j\,i_{\mathfrak{a}+1}\cdots i_\ell}. \tag{14}$$

این یعنی بخشِ کاملَن-متقارنِ $\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}$ صفر است. از (14) نتیجه میشود

$$\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}=\tilde{\mathcal{M}}_{(\ell)}. \tag{15}$$

که،

$$(\ell+1)\,\tilde{\mathcal{M}}_{(\ell)}{}^{j\,i_1\cdots i_\ell} = \ell\,\tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{j\,i_1\cdots i_\ell} - \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\ell} \tilde{\tilde{\mathcal{M}}}_{(\ell)}{}^{i_\mathfrak{a}\,i_1\cdots i_{\mathfrak{a}-1}\,j\,i_{\mathfrak{a}+1}\cdots i_\ell}. \tag{16}$$

به $\tilde{\mathcal{M}}_{(\ell)}$ پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی از رتبه یِ ℓ میگویم. از جمله دیده میشود پیش-چند-قطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ صفر صفر است:

$$\tilde{\mathcal{M}}_{(0)} = 0. \tag{17}$$

چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ را بخش ِ بی-رد ِ پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ تعریف میکنم. چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\mathcal{M}_{(\ell)}$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{M}_{(\ell)} = \mathsf{S}\left[\sum_{\mathfrak{a}=0}^{[\ell/2]} c_\mathfrak{a}\,\mathbf{1}\otimes\delta^{\otimes\mathfrak{a}}\otimes\tilde{\mathcal{M}}_{(\ell,\mathfrak{a})} + d_\mathfrak{a}\,\delta^{\otimes\mathfrak{a}}\otimes\tilde{\mathcal{N}}_{(\ell,\mathfrak{a})}\right]. \tag{18}$$

$[\mathfrak{x}]$ بخش- ِ-صحیح ِ $\mathfrak{x}$ است: بزرگترین عدد- ِ-صحیح یِ که از $\mathfrak{x}$ بزرگتر نیست. $\mathbf{1}$ همانی ست:

$$\mathbf{1}^i{}_j = \delta^i_j. \tag{19}$$

همچنین،

$$\tilde{\mathcal{M}}_{(\ell,\mathfrak{a})}{}^{i_0\,i_1\cdots i_{l-2\,\mathfrak{a}}} = \tilde{\mathcal{M}}_{(\ell)}{}^{i_0\,j_1\cdots j_\mathfrak{a}}{}_{j_1\cdots j_\mathfrak{a}}{}^{i_1\cdots i_{\ell-2\,\mathfrak{a}}}. \tag{20}$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{(\ell,\mathfrak{a})}{}^{i_1\cdots i_{l-2\,\mathfrak{a}+1}} = \tilde{\mathcal{M}}_{(\ell)}{}^{j_1\cdots j_\mathfrak{a}}{}_{j_1\cdots j_\mathfrak{a}}{}^{i_1\cdots i_{l-2\,\mathfrak{a}+1}}. \tag{21}$$

$\otimes$ ضرب ِ تانسُری ست:

$$(\mathfrak{X}\otimes\mathfrak{Y})^{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}} = \mathfrak{X}^{\mathfrak{A}}\,\mathfrak{Y}^{\mathfrak{B}}. \tag{22}$$

S متقارن-گر بر شاخصها یِ ناصفرم است:

$$(\mathsf{S}\,\mathfrak{X})^{i_0\,i_1\cdots i_\ell} = \frac{1}{\ell!}\,\sum_\sigma \mathfrak{X}^{i_0\,i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(\ell)}}. \tag{23}$$

و در (23)، جمع-بندی رو یِ همه یِ جایگشتها یِ ℓ تایی ست. c_{a} ها و d_{a}ثابتها یی یَند که چنین تعیین میشوند که ردِ $\mathcal{M}_{(\ell)}$ بر هر-دُ-شاخصَ ش صفر باشد:

$$\delta_{i_a\, i_b}\, \mathcal{M}_{(\ell)}{}^{i_1\cdots i_a\cdots i_b\cdots i_\ell} = 0. \tag{24}$$

البته چون $\mathcal{M}_{(\ell)}$ نسبت به شاخصها یِ ناصفرمَ ش متقارن است، کافی ست رد بر شاخصِ اول و دوم، و رد بر شاخصُ صفرم و اول صفر باشد:

$$\mathcal{M}_{(\ell)}{}^{i_0\, j}{}_{j}{}^{i_3\cdots i_\ell} = 0. \tag{25}$$

$$\mathcal{M}_{(\ell)}{}^{j}{}_{j}{}^{i_2\cdots i_\ell} = 0. \tag{26}$$

2 تعدادِ مئلفه-یِ-مستقلها

تعدادِ پارامترها یِ مستقل در پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ، بدونِ در-نظر-گرفتنِ این قید که بخشِ کاملَن-متقارنِ پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی صفر است، را با $\tilde{\tilde{\mathsf{B}}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. پیش-پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell+1)$ است، که در ℓ شاخصَ ش متقارن است. تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ ℓ را با $\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. چنان که در [1] آمده، در یک تانسُرِ متقارنِ از رتبه یِ ℓ، مقدارِ هر مئلفه به فقط ν بستگی دارد، که

$$\nu = [\nu_{(1)}, \cdots \nu_{(\mathsf{n})}]. \tag{27}$$

که n بُعدِ فضا ست، $\nu_{(i)}$ تعدادِ شاخصها یی ست که برابر با i اند، و البته

$$\sum_{i=1}^{\mathsf{n}} \nu_{(i)} = \ell. \tag{28}$$

یک تناظرِ یک-به-یک هست بینِ حالتها یِ ممکن برا یِ ν، با حالتها یِ ممکن برا یِ آرایشها یی از ℓ دایره و $(\mathsf{n}-1)$ خط : آرایشِ متناظر با ν میشود $\nu_{(1)}$ دایره بعد یک خط، بعد $\nu_{(2)}$ دایره، بعد یک خط، ...، بعد یک خط، بعد $\nu_{(\mathsf{n})}$ دایره. تعدادِ آرایشها یِ ممکن برا یِ این ℓ دایره و $(\mathsf{n}-1)$ خط هم انتخابِ $(\mathsf{n}-1)$ جا (جا یِ خطها) از $(\ell+\mathsf{n}-1)$ جا یِ ممکن است. پس تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ ℓ هم ان انتخابِ $(\mathsf{n}-1)$ از $(\ell+\mathsf{n}-1)$ میشود:

$$\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1}. \tag{29}$$

پس،

$$\tilde{\tilde{\mathsf{B}}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \mathsf{n}\,\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)}. \tag{30}$$

یعنی،

$$\tilde{\tilde{\mathsf{B}}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \mathsf{n}\binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1}. \tag{31}$$

تعدادِ پارامترها یِ مستقل در پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. پیش-چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ هم یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell+1)$ است، که در ℓ شاخص َش متقارن است، اما با این قید که بخشِ کاملَن-متقارن َش صفر است. پس $\tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ میشود تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell+1)$ که در ℓ شاخص َش متقارن است، منها یِ تعدادِ قیدها. اولی هم ان $\tilde{\tilde{\mathsf{B}}}_{(\mathsf{n},\ell)}$ است. دومی هم تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ کاملَن-متقارنِ از رتبه یِ $(\ell+1)$ است. به این ترتیب،

$$\tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \mathsf{n}\,\tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} - \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell+1)}. \tag{32}$$

یعنی،

$$\tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell)} = \mathsf{n}\binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1} - \binom{\ell+\mathsf{n}}{\mathsf{n}-1}. \tag{33}$$

تعدادِ پارامترها یِ مستقل در چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ را با $\mathsf{B}_{(\mathsf{n},\ell)}$ نشان میدهم. چندقطبی-یِ-مغناطیسی یِ از رتبه یِ ℓ هم یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell+1)$ است، که در ℓ شاخصَ ش متقارن است و بخشِ کاملَن-متقارنَ ش صفر است، اما با دُ دسته قید: این که ردِ آن بر شاخصِ اول و دوم صفر است، و ردِ آن بر شاخصها یِ صفرم و اول صفر است. ردِ چندقطبی-یِ-مغناطیسی از رتبه یِ ℓ بر شاخصِ اول و دوم یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell-1)$ است، که در $(\ell-2)$ شاخصَ ش متقارن است، و بخشِ کاملَن-متقارنَ ش صفر است. پس تعدادِ قیدها یِ متناظر با صفر-شدنِ رد بر شاخصِ اول و دوم برابر با تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُر از رتبه یِ $(\ell-1)$ میشود که در $(\ell-2)$ شاخصَ ش متقارن است، و بخشِ کاملَن-متقارنَ ش صفر است. این تعداد هم ان $\tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell-2)}$ است. ردِ چندقطبی-یِ-مغناطیسی از رتبه یِ ℓ بر شاخصِ صفرم و اول یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ $(\ell-1)$ میشود. پس تعدادِ قیدها یِ متناظر با صفر-شدنِ رد بر شاخصِ صفرم و اول برابر با تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارنِ از رتبه یِ $(\ell-1)$ میشود.

اما این دُ-دسته قید مستقل از هم نیستند: از دسته یِ اول نتیجه میشود رد بر شاخصها یِ دوم و سوم و بعد بر شاخصها یِ صفرم و اول صفر است. و این نتیجه بخش ی از دسته یِ دوم است. پس تعدادِ قیدها یِ مستقل برابر است با جمعِ تعدادِ قیدها یِ متناظر با هر دسته، منها یِ تعدادِ قیدها یِ مشترک. ردِ چندقطبی-یِ-مغناطیسی از رتبه یِ ℓ، بر شاخصها یِ دوم و سوم و بعد بر شاخصها یِ صفرم و اول یک تانسُرِ متقارن از رتبه یِ $(\ell-3)$ است. پس تعدادِ قیدها یِ متناظر با صفر-شدنِ رد دوم و سوم و بعد بر شاخصِ صفرم و اول برابر با تعدادِ پارامترها یِ مستقل در یک تانسُرِ متقارنِ از رتبه یِ $(\ell-3)$ است. نتیجه این که

$$\mathsf{B}_{(\mathsf{n},\ell)} \overset{\mathrm{g}}{=} \tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell)} - \tilde{\mathsf{B}}_{(\mathsf{n},\ell-2)} - \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-1)} + \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-3)}. \tag{34}$$

منظورَم از $\overset{\mathrm{g}}{=}$ این است که یعنی دُ-طرفِ این علامت با هم برابرَند، در حالتها یِ نُعی. اینجا حالتها یِ نُعی متناظرَند با

$$\mathsf{n}+\ell > 3. \tag{35}$$

اگر (35) براورده نشود، تعدادِ قیدها را باید جداگانه حساب کرد. از (29) و (32) و (34) نتیجه میشود

$$\mathsf{B}_{(\mathsf{n},\ell)} \overset{\mathrm{g}}{=} \mathsf{n}\left[\binom{\ell+\mathsf{n}-1}{\mathsf{n}-1}-\binom{\ell+\mathsf{n}-3}{\mathsf{n}-1}\right]-\binom{\ell+\mathsf{n}}{\mathsf{n}-1}+\binom{\ell+\mathsf{n}-4}{\mathsf{n}-1}. \tag{36}$$

حالتها یِ نانُعی و چند حالتِ خاصِ (36) اینها یَند.

$$\mathsf{B}_{(1,\ell)} = 0. \tag{37}$$

$$\mathsf{B}_{(2,\ell)} = 0. \tag{38}$$

$$\mathsf{B}_{(3,\ell)} = 1 + 2\,\ell - \delta_\ell^0. \tag{39}$$

$$\mathsf{B}_{(4,\ell)} = 2\,\ell\,(2+\ell)^2. \tag{40}$$

E را مثلِ [1] تعریف میکنم:

$$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} \overset{\mathrm{g}}{=} \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell)} - \tilde{\mathsf{E}}_{(\mathsf{n},\ell-2)}. \tag{41}$$

$\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)}$ تعدادِ پارامترها یِ مستقل در چندقطبی-یِ-الکتریکی یِ از رتبه یِ ℓ است (وقت یِ بُعدِ فضا n است). نتیجه میشود

$$\mathsf{B}_{(\mathsf{n},\ell)} \overset{\mathrm{g}}{=} \mathsf{n}\,\mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell)} - \mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell+1)} - \mathsf{E}_{(\mathsf{n},\ell-1)}. \tag{42}$$

3 پانوشتها

محمد خرمی؛ «چندقطبیها یِ الکتریکی، و شمارش» (2024/01/20) X1-177

[2] Green

[3] Laplace

[4] Kronecker