X1-174 (2023/08/02)

معادله یِ فُکِر-پْلانک II

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

یک معادله-یِ-تحول ِ تصادفی یِ مرتبه-یِ-یک بررسی میشود، که تُزیع ِ جا-به-جایی-یِ-کوچک-زمان ِ آن گاؤسی-خطی ست؛ و در نتیجه معادله-یِ-تحول ِ چگالی-یِ-احتمال ِ متناظر با آن یک معادله یِ فُکِر-پْلانک [1] است. تحول ِ شکلها و اجزا یِ مختلف ِ انترُپی بررسی میشود.

0 درامد

این ادامه یِ [2] است، با هم ان نماد-گذاری. یک معادله-یِ-تحول ِ تصادفی یِ مرتبه-یِ-یک بر متغیر ِ $\boldsymbol{r}$ حاکم است. به شکل ِ بسته، یا مفصل،

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}). \tag{1}$$

$$\dot{r}^i = f^i(t, \boldsymbol{r}). \tag{2}$$

$\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است. چگالی-یِ-احتمال ِ متناظر با $\boldsymbol{r}(t)$ را با $\psi(t, \cdot)$ نشان میدهم.
$(\mathrm{d}\, V)$ عنصر- ِ-حجم ِ ناوردا ست:

$$(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{x}) = (\mathrm{d}^n\, x)\, \mathfrak{v}(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

که $\mathfrak{v}$ چگالی-یِ-حجم است. معادله-یِ-تحول ِ ψ یک معادله ی ِ فُکِر-پْلانک [1] است:

$$\dot{\psi} = H\, \psi. \tag{4}$$

که،

$$H\, \psi = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{J}\, \psi). \tag{5}$$

$$\boldsymbol{J}\, \psi = \boldsymbol{X}\, \psi - \frac{1}{2}\, C\, \boldsymbol{\nabla}\, \psi. \tag{6}$$

یا،

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{X} - \frac{1}{2}\, C\, \boldsymbol{\nabla}. \tag{7}$$

مفصل،

$$H\, \psi = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\, \partial_i\, (\mathfrak{v}\, J^i\, \psi). \tag{8}$$

$$J^i\, \psi = X^i\, \psi - \frac{1}{2}\, C^{i\,j}\, \partial_j\, \psi. \tag{9}$$

یا،

$$J^i = X^i - \frac{1}{2}\, C^{i\,j}\, \partial_j. \tag{10}$$

پس معادله-یِ-تحول چنین است.

$$\dot{\psi} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{J}\, \psi). \tag{11}$$

مفصل،

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,J^i\,\psi). \tag{12}$$

که یعنی،

$$\dot{\psi} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{X}\,\psi) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(C\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi). \tag{13}$$

مفصل،

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,X^i\,\psi) + \frac{1}{2\,\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,C^{i\,j}\,\partial_j\,\psi). \tag{14}$$

1 انتروپی یِ تعمیم-یافته

F یک تابعِ کاو است:

$$F'' \le 0. \tag{15}$$

که پریم مشتق-گیری ست. انتروپی یِ تعمیم-یافته (متناظر با F و تابعِ مستقل-از-زمان و نامنفی یِ ϕ) را با S_ϕ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$S_\phi = \int(\mathrm{d}\,V)\,\phi\,F(\chi). \tag{16}$$

$$\chi = \frac{\psi}{\phi}. \tag{17}$$

مشتقِ زمانی یِ انتروپی چنین میشود

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi &= \int(\mathrm{d}\,V)\,\phi\,\dot{\chi}\,F'(\chi),\\ &= -\int(\mathrm{d}\,V)[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\,\psi)]\,F'(\chi).\end{aligned} \tag{18}$$

که نتیجه میدهد

$$\dot{S}_\phi = \int(\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\,F''(\chi). \tag{19}$$

دیده میشود

$$\boldsymbol{J}\,\psi=\chi\,\boldsymbol{J}\,\phi-\frac{\phi}{2}\,C\,\boldsymbol{\nabla}\,\chi. \tag{20}$$

پس،

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi={}&\int(\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{J}\,\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\,\chi\,F''(\chi)\\&-\int(\mathrm{d}\,V)\,\frac{\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\cdot[C\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)]}{2}\,F''(\chi).\end{aligned} \tag{21}$$

G را چنین تعریف میکنم.

$$G'(\chi)=\chi\,F''(\chi). \tag{22}$$

رابطه یِ (21) چنین میشود.

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi={}&\int(\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{J}\,\phi)\cdot\boldsymbol{\nabla}\,[G(\chi)]\\&-\int(\mathrm{d}\,V)\,\frac{\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\cdot[C\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)]}{2}\,F''(\chi).\end{aligned} \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi={}&-\int(\mathrm{d}\,V)\,[G(\chi)]\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\,\phi)\\&-\int(\mathrm{d}\,V)\,\frac{\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\cdot[C\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)]}{2}\,F''(\chi).\end{aligned} \tag{24}$$

یا،

$$\begin{aligned}\dot{S}_\phi={}&\int(\mathrm{d}\,V)\,[G(\chi)]\,H\,\phi\\&-\int(\mathrm{d}\,V)\,\frac{\phi\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\cdot[C\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)]}{2}\,F''(\chi).\end{aligned} \tag{25}$$

گیرم چگالی یِ ψ_0 یک ویژه-بردارِ مستقل-از-زمانِ H با ویژه-مقدارِ صفر است:

$$0=H\,\psi_0. \tag{26}$$

در این صورت،

$$\dot S_{\psi_0} = -\int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{\psi_0\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)\,C\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi)}{2}\,F''(\chi). \tag{27}$$

و چون F کاو است و ψ_0 نامنفی ست،

$$\dot S_{\psi_0} \geq 0. \tag{28}$$

و با فرض ِ این که F اکیدَن کاو است (مشتق- ِ-دوم َ ش منفی ست)، و C معین-مثبت و ψ_0 مثبت است،

$$\dot S_{\psi_0} = 0. \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \psi_0. \tag{29}$$

S_{ψ_0} یک تابع ِ اکیدَن-صعودی از زمان است، مگر ψ هم ان ψ_0 باشد.

2 تعادل ِ تفصیلی

تعادل ِ تفصیلی یعنی یک Υ هست که برا یِ هر ψ_1 و ψ_2:

$$0 = \int (\mathrm{d}\,V)\,\psi_1\,H\,(\Upsilon\,\psi_2) - \int (\mathrm{d}\,V)\,\psi_2\,H\,(\Upsilon\,\psi_1). \tag{30}$$

با H به شکل ِ (5) و (6)، این رابطه چنین میشود.

$$\begin{aligned} 0 = \int (\mathrm{d}\,V)\,&(\psi_2\,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi_1 - \psi_1\,\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi_2)\,\Upsilon \\ &+ \frac{1}{2}\,\{(\boldsymbol{\nabla}\,\psi_2)\cdot[C\,\boldsymbol{\nabla}\,(\Upsilon\,\psi_1)] - (\boldsymbol{\nabla}\,\psi_1)\cdot[C\,\boldsymbol{\nabla}\,(\Upsilon\,\psi_2)]\}. \end{aligned} \tag{31}$$

یا،

$$0 = \int (\mathrm{d}\,V)\,(\psi_2\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi_1 - \psi_1\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi_2)\cdot\left(\boldsymbol{X}\,\Upsilon - \frac{1}{2}\,C\,\boldsymbol{\nabla}\,\Upsilon\right). \tag{32}$$

این، برا یِ هر ψ_1 و ψ_2، براورده میشود اگر و تنها اگر

$$0 = \boldsymbol{X}\,\Upsilon - \frac{1}{2}\,C\,\boldsymbol{\nabla}\,\Upsilon. \tag{33}$$

که یعنی،

$$0 = \boldsymbol{J}\,\Upsilon. \tag{34}$$

شرطِ این که معادله یِ (33) برا یِ Υ جواب داشته باشد این است که $(C^{-1}\,\boldsymbol{X})$ یک گرادیان باشد.، یعنی

$$0 = \partial_i\,[(C^{-1})_{j\,k}\,X^k] - \partial_j\,[(C^{-1})_{i\,k}\,X^k]. \tag{35}$$

گیرم چنین است. در این صورت،

$$\boldsymbol{J}\,\psi = -\frac{\Upsilon}{2}\,C\,\boldsymbol{\nabla}\frac{\psi}{\Upsilon}. \tag{36}$$

رُشن است که (34) نتیجه میدهد Υ یک ویژه- بردارِ H با ویژه- مقدارِ صفر است:

$$0 = H\,\Upsilon. \tag{37}$$

اما (34) بیش از (37) است: از این که Υ یک ویژه- بردارِ H با ویژه- مقدارِ صفر است، نتیجه نمیشود ($\boldsymbol{J}\,\Upsilon$)، یعنی چگالی- یِ- جریانِ متناظر با Υ، صفر است.

$\tilde{H}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}}\,H\,(\sqrt{\Upsilon}\,\boldsymbol{.}). \tag{38}$$

شرطِ (30) چنین میشود.

$$0 = \int(\mathrm{d}\,V)\,(\sqrt{\Upsilon}\,\psi_1)\,\tilde{H}\,(\sqrt{\Upsilon}\,\psi_2) - \int(\mathrm{d}\,V)\,(\sqrt{\Upsilon}\,\psi_2)\,\tilde{H}\,(\sqrt{\Upsilon}\,\psi_1). \tag{39}$$

که یعنی $\tilde{H}$ (با حجمِ V) متقارن است. دیده میشود

$$\tilde{H}\,\tilde{\psi} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot(\sqrt{\Upsilon}\,\boldsymbol{X})}{2\,\sqrt{\Upsilon}}\,\tilde{\psi} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot(C\,\boldsymbol{\nabla}\,\tilde{\psi})}{2}. \tag{40}$$

یا،

$$\tilde{H}\,\tilde{\psi} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\cdot(C^{-1}\,\boldsymbol{X})}{2}\,\tilde{\psi} + \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot(C\,\boldsymbol{\nabla}\,\tilde{\psi})}{2}. \tag{41}$$

3 انتروپی یِ فزونور

F_{ex} را چنین تعریف میکنم.

$$F_{\mathrm{ex}}(x) = -x\,\ln x. \tag{42}$$

انتروپی-یِ-تعمیم-یافته یِ متناظر با F_{ex} (و ϕ) را با $S_{\mathrm{ex},\phi}$ نشان میدهم:

$$S_{\mathrm{ex},\phi} = -\int (\mathrm{d}\,V)\,\psi\,\ln\frac{\psi}{\phi}. \tag{43}$$

$S_{\mathrm{ex},\phi}$ فزونور است: گیرم یک سیستم از 2 بخشِ مستقل-از-هم ساخته شده. چگالی-یِ-احتمالِ متناظر با بخشِ i را با ψ_i نشان میدهم. چگالی-یِ-احتمالِ متناظر با کلِ سیستم ψ میشود، که

$$\psi = \psi_1\,\psi_2. \tag{44}$$

ϕ_i را یک تابعِ نامنفی در بخشِ i میگیرم، و ϕ را چنین تعریف میکنم.

$$\phi = \phi_1\,\phi_2. \tag{45}$$

دیده میشود

$$S_{\mathrm{ex},\phi} = -\int (\mathrm{d}\,V_1)\,(\mathrm{d}\,V_2)\,\psi_1\,\psi_2\,\ln\frac{\psi_1\,\psi_2}{\phi_1\,\phi_2}. \tag{46}$$

که نتیجه میدهد

$$S_{\mathrm{ex},\phi} = -\int (\mathrm{d}\,V_1)\,(\mathrm{d}\,V_2)\,\psi_1\,\psi_2\,\left(\ln\frac{\psi_1}{\phi_1} + \ln\frac{\psi_2}{\phi_2}\right). \tag{47}$$

این که ψ_i چگالی-یِ-احتمال (ِ متناظر با بخشِ i) است، نتیجه میدهد

$$\int (\mathrm{d}\,V_i)\,\psi_i = 1. \tag{48}$$

به این ترتیب (47) چنین میشود.

$$S_{\mathrm{ex},\phi} = S_{1,\mathrm{ex},\phi_1} + S_{2,\mathrm{ex},\phi_2}. \tag{49}$$

که S_{i,ex,ϕ_i} برا ی ِ بخش ِ i و با ϕ_i تعریف شده:

$$S_{i,\mathrm{ex},\phi_i} = -\int (\mathrm{d}\,V_i)\,\psi_i\,\ln\frac{\psi_i}{\phi_i}. \tag{50}$$

به $S_{\mathrm{ex},\phi}$ انترُپی ی ِ فزونور (ِ متناظر با ϕ) میگوییم.

از (19) دیده میشود

$$\dot S_{\mathrm{ex},\phi} = -\int (\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot\frac{\boldsymbol{\nabla}\,\chi}{\chi}. \tag{51}$$

یا،

$$\dot S_{\mathrm{ex},\phi} = -\int (\mathrm{d}\,V)\,(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\,\psi}{\psi}-\frac{\boldsymbol{\nabla}\,\phi}{\phi}\right). \tag{52}$$

این هم، با استفاده از (6)، چنین میشود.

$$\begin{aligned}\dot S_{\mathrm{ex},\phi} = {}& 2\int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot[C^{-1}\,(\boldsymbol{J}\,\psi)]}{\psi}\\ &-2\int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot[C^{-1}\,(\boldsymbol{J}\,\phi)]}{\phi}.\end{aligned} \tag{53}$$

$\dot S_{\mathrm{env},\phi}$ و Π را چنین تعریف میکنم.

$$\dot S_{\mathrm{env},\phi} = 2\int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot[C^{-1}\,(\boldsymbol{J}\,\phi)]}{\phi}. \tag{54}$$

$$\Pi = \dot S_{\mathrm{ex},\phi} + \dot S_{\mathrm{env},\phi}. \tag{55}$$

به $\dot S_{\mathrm{env},\phi}$ آهنگ ِ افزایش ِ انترُپی ی ِ محیط (ِ متناظر با ϕ)، و به Π اهنگ ِ ساخته-شدن ِ انترپی میگوییم.

دیده میشود Π مستقل از ϕ است، و

$$\Pi = 2\int (\mathrm{d}\,V)\,\frac{(\boldsymbol{J}\,\psi)\cdot[C^{-1}\,(\boldsymbol{J}\,\psi)]}{\psi}. \tag{56}$$

که نشان میدهد

$$\Pi \geq 0. \tag{57}$$

و با فرضِ این که C معین-مثبت است،

$$\Pi = 0. \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{J}\,\psi = 0. \tag{58}$$

یعنی Π صفر است، اگر و تنها اگر تعادل- ِ-تفصیلی برقرار باشد و چگالی-یِ-جریانِ متناظر با ψ صفر باشد.

4 پانوشتها

[1] Fokker-Planck

[2] محمد خرمی؛ «معادله یِ فُکِر-پْلانک I» X1-173 (2023/07/12)