X1-173 (2023/07/12)

معادله یِ فُکِر-پْلانک I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

یک معادله-یِ-تحول ِ تصادفی یِ مرتبه-یِ-یک بررسی میشود، که تُزیع ِ جا-به-جایی-یِ-کوچک-زمان ِ آن گاؤسی-خطی ست. نشان داده میشود معادله-یِ-تحول ِ چگالی-یِ-احتمال ِ متناظر یک معادله یِ فُکِر-پْلانک [1] است.

1 تحول

یک معادله-یِ-تحول ِ مرتبه-یِ-یک برا یِ متغیر ِ $\boldsymbol{r}$ چنین است.

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}). \tag{1}$$

مفصلتر،

$$\dot{r}^i = f^i(t, \boldsymbol{r}). \tag{2}$$

$\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است. معادله-ی ِ-تحول ِ (1) تصادفی ست، وقت ی $\boldsymbol{f}$ تصادفی باشد. از این پس چنین گرفته میشود. در نتیجه خُد ِ $\boldsymbol{r}$ هم یک متغیر ِ تصادفی میشود. چگالی-ی ِ-احتمال ِ متناظر با $\boldsymbol{r}(t)$ را با $\psi(t, \centerdot)$ نشان میدهم. معادله-ی ِ-تحول ِ (1) به یک معادله-ی ِ-تحول برا ی ِ ψ مینجامد:

$$\psi(t, \boldsymbol{y}) = \int [(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{x})]\, [U(t, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x})]\, \psi(s, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

$(\mathrm{d}\, V)$ عنصر- ِ-حجم ِ ناوردا ست:

$$(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{x}) = (\mathrm{d}^n\, x)\, \mathfrak{v}(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

که $\mathfrak{v}$ چگالی-ی ِ-حجم است. U چگالی-ی ِ-احتمال ِ شرطی ست: $U(t, \centerdot, s, \boldsymbol{x})$ چگالی-ی ِ-احتمال برا ی ِ $\boldsymbol{r}(t)$ است، به شرط ی که $\boldsymbol{r}(s)$ برابر با $\boldsymbol{x}$ باشد. از تعریف ِ ψ و U نتیجه میشود

$$1 = \int [(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{x})]\, \psi(s, \boldsymbol{x}). \tag{5}$$

$$1 = \int [(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{y})]\, U(t, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x}). \tag{6}$$

اگر t هم ان s باشد، چگالی-ی ِ-احتمال ِ شرطی دلتا ی ِ دیرَک [2] میشود:

$$U(s, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}). \tag{7}$$

که دلتا-ی ِ-دیرَک [2] چنان است که برا ی ِ هر $\mathfrak{f}$،

$$\mathfrak{f}(\boldsymbol{y}) = \int [(\mathrm{d}\, V)(\boldsymbol{x})]\, [\delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})]\, \mathfrak{f}(\boldsymbol{x}). \tag{8}$$

از جمله، با گذاشتن ِ $\delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x})$ به جا ی ِ $\mathfrak{f}(\boldsymbol{x})$، دیده میشود

$$\delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}). \tag{9}$$

2 معادله ی ِ دیفرانسیل

اگر t نزدیک به s باشد، چگالی-ی ِ-احتمال- ِ-شرطی هم نزدیک به دلتا-ی ِ-دیرَک [2] میشود: $U(t, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x})$ فقط وقت ی چشمگیر است که $\boldsymbol{y}$ و $\boldsymbol{x}$ به هم نزدیک باشند. در این حالت چگالی-ی ِ-

احتمال-ِ-شرطی را میشود بر حسبِ جا-به-جاییها نوشت. $\tilde{U}$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})]\, U(t, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x}) = \tilde{U}[t - s, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), s, \boldsymbol{x}]. \tag{10}$$

که $\tilde{\boldsymbol{u}}$ چنان تعریف شده که

$$\tilde{u}^i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = y^i - x^i. \tag{11}$$

دیده میشود

$$1 = \int (\mathrm{d}^n\, \tilde{\xi})\, \tilde{U}(\tilde{\tau}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, s, \boldsymbol{x}). \tag{12}$$

همچنین،

$$\tilde{U}(0, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, s, \boldsymbol{x}) = \tilde{\delta}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}). \tag{13}$$

و البته،

$$\tilde{\delta}[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})] = [\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})]\, \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}). \tag{14}$$

$$\tilde{\delta}[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})] = [\mathfrak{v}(\boldsymbol{x})]\, \delta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}). \tag{15}$$

$$\mathsf{f}(\boldsymbol{y}) = \int (\mathrm{d}^n\, x)\, \{\tilde{\delta}[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})]\}\, \mathsf{f}(\boldsymbol{x}). \tag{16}$$

معادله-یِ-تحولِ (3) را چنین مینویسم.

$$\psi(t, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})} \int (\mathrm{d}^n\, x)]\, [\mathfrak{v}(\boldsymbol{x})]\, [\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})]\, [U(t, \boldsymbol{y}, s, \boldsymbol{x})]\, \psi(s, \boldsymbol{x}). \tag{17}$$

گیرم t نزدیک به s است. رابطه یِ بالا چنین میشود.

$$\psi(t, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})} \int (\mathrm{d}^n\, x)\, \mathfrak{F}[t - s, \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), s, \boldsymbol{x}]. \tag{18}$$

که،

$$\mathfrak{F}(\tilde{\tau}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, s, \boldsymbol{x}) = [\tilde{U}(\tilde{\tau}, \tilde{\boldsymbol{\xi}}, s, \boldsymbol{x})]\, [\mathfrak{v}(\boldsymbol{x})]\, \psi(s, \boldsymbol{x}). \tag{19}$$

با تغییرِ متغیرِ انتگرال-گیری،

$$\psi(t,\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})}\int (\mathrm{d}^n\,\tilde{\xi})\,\mathfrak{F}[t-s,\tilde{\boldsymbol{\xi}},s,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{\xi}})]. \tag{20}$$

که $\boldsymbol{u}$ چنان تعریف شده که

$$u^i(\boldsymbol{y},\tilde{\boldsymbol{\xi}}) = y^i - \tilde{\xi}^i. \tag{21}$$

در (20)، انتگرالده یِ طرف-ِ-راست فقط وقت ی چشمگیر است که $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ کوچک باشد. بستگی یِ این انتگرالده به $\boldsymbol{u}$ را حُلِ $\boldsymbol{y}$ بسط میدهم:

$$\psi(t,\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})}\int (\mathrm{d}^n\,\tilde{\xi})\,\sum_m \frac{\{(-\tilde{\xi}^i\,\partial_i)^m\,[\mathfrak{F}(t-s,\tilde{\boldsymbol{\xi}},s,\boldsymbol{.})]\}(\boldsymbol{y})}{m!}. \tag{22}$$

به این ترتیب،

$$\psi(t,\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})}\sum_m \frac{(-1)^m\,[\partial_{i_1}\cdots\partial_{i_m}\,(A_m)^{i_1\cdots i_m}](t-s,s,\boldsymbol{y})}{m!}. \tag{23}$$

که،

$$(A_m)^{i_1\cdots i_m}(\tilde{t},s,\boldsymbol{y}) = [(M_m)^{i_1\cdots i_m}(\tilde{t},s,\boldsymbol{y})]\,[\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})]\,\psi(s,\boldsymbol{y}). \tag{24}$$

$$(M_m)^{i_1\cdots i_m}(\tilde{t},s,\boldsymbol{y}) = \int (\mathrm{d}^n\,\tilde{\xi})\,\tilde{y}^{i_1}\cdots\tilde{y}^{i_m}\,\tilde{U}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{\xi}},s,\boldsymbol{y}). \tag{25}$$

از جمله،

$$M_0(\tilde{t},s,\boldsymbol{y}) = 1. \tag{26}$$

$$(M_1)^i(\tilde{t},s,\boldsymbol{y}) = \int (\mathrm{d}^n\,\tilde{\xi})\,\tilde{\xi}^i\,\tilde{U}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{y}},s,\boldsymbol{y}). \tag{27}$$

$$(M_2)^{ij}(\tilde{t},s,\boldsymbol{y}) = \int (\mathrm{d}^n\,\tilde{\xi})\,\tilde{\xi}^i\,\tilde{\xi}^j\,\tilde{U}(\tilde{t},\tilde{\boldsymbol{y}},s,\boldsymbol{y}). \tag{28}$$

میگویم تُزیعِ جا-به-جایی-یِ-کوچک-زمان گاؤسی-خطی ست، وقت ی (برا یِ زمان-ِ-تحولِ کوچک) گشتاورها یِ مرتبه-یِ-یک و مرتبه-یِ-دُ یِ آن از مرتبه یِ زمان-ِ-تحول باشند و گشتاورها یِ

مرتبِها-یِ-بیشترِ آن سریعتر از زمان-ِ-تحول صفر شوند. این یعنی

$$(M_1)^i(\tilde{t}, s, \boldsymbol{y}) = \tilde{t}\,(B_1)^i(s, \boldsymbol{y}) + o(\tilde{t}). \tag{29}$$

$$(M_2)^{i\,j}(\tilde{t}, s, \boldsymbol{y}) = \tilde{t}\,(B_1)^{i\,j}(s, \boldsymbol{y}) + o(\tilde{t}). \tag{30}$$

$$(M_m)^{1\cdots i_m}i(\tilde{t}, s, \boldsymbol{y}) = o(\tilde{t}), \qquad\qquad m > 2. \tag{31}$$

گیرم تُزیعِ جا-به-جایی-یِ-کوچک-زمان گاؤسی-خطی ست. معادله یِ (23) چنین میشود.

$$\psi(t, \boldsymbol{y}) = \psi(s, \boldsymbol{y}) + \frac{\tilde{t}}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})}\biggl(-\partial_i\,\{[(B_1)^i(s, \boldsymbol{.})]\,[\mathfrak{v}(\boldsymbol{.})]\,\psi(s, \boldsymbol{.})\} + \frac{1}{2}\,\partial_i\,\partial_j\{[(B_2)^{i\,j}(s, \boldsymbol{.})]\,[\mathfrak{v}(\boldsymbol{.})]\,\psi(s, \boldsymbol{.})\}\biggr)(\boldsymbol{y}) + o(\tilde{t}). \tag{32}$$

که نتیجه میدهد

$$\dot{\psi}(t, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\mathfrak{v}(\boldsymbol{y})}\biggl(-\partial_i\,\{[(B_1)^i(s, \boldsymbol{.})]\,[\mathfrak{v}(\boldsymbol{.})]\,\psi(s, \boldsymbol{.})\} + \frac{1}{2}\,\partial_i\,\partial_j\{[(B_2)^{i\,j}(s, \boldsymbol{.})]\,[\mathfrak{v}(\boldsymbol{.})]\,\psi(s, \boldsymbol{.})\}\biggr)(\boldsymbol{y}). \tag{33}$$

سادِتر،

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,[(B_1)^i\,\mathfrak{v}\,\psi] + \frac{1}{2\,\mathfrak{v}}\,\partial_i\,\partial_j\,[(B_2)^{i\,j}\,\mathfrak{v}\,\psi]. \tag{34}$$

3 هموردایی

رُشن است که $(B_1)^i$ ها و $(B_2)^{i\,j}$ ها به مختصات بستگی دارند. یک سئال این است که آیا اینها مئلفِها یِ یک تانسُرِ مستقل-از-پایه یِ از مرتبه یِ، به ترتیب، 1 و 2 اند؟

برا یِ جواب-دادن به این سئال، اثرِ تغییر-ِ-مختصات بر اینها را بررسی میکنم. از تعریفِ $\tilde{\boldsymbol{u}}$ دیده میشود با تغییر-ِ-مختصات از بی-پریم به پریم-دار،

$$\tilde{u}'^i = \Lambda^{i'}{}_k\,\tilde{u}^k + \frac{1}{2}\,\Xi^{i'}{}_{k\,l}\,\tilde{u}^k\,\tilde{u}^l + o[(\tilde{\boldsymbol{u}})^2]. \tag{35}$$

که

$$\Lambda^{i'}{}_{k} = \frac{\partial\, y'^{i}}{\partial\, y^{k}}. \tag{36}$$

$$\Xi^{i'}{}_{k\,l} = \frac{\partial^2\, y'^{i}}{\partial\, y^{k}\,\partial\, y^{l}}. \tag{37}$$

به این ترتیب،

$$(B'_1)^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{k}\,(B_1)^{k} + \frac{1}{2}\,\Xi^{i'}{}_{k\,l}\,(B_2)^{k\,l}. \tag{38}$$

$$(B'_2)^{i'\,j'} = \Lambda^{i'}{}_{k}\,\Lambda^{j'}{}_{l}\,(B_2)^{k\,l}. \tag{39}$$

دیده میشود با تغییر-ِ-مختصات، مئلفِها یِ B_2 مثلِ مئلفِها یِ یک تانسُرِ مستقل-از-پایه تبدیل میشوند، اما مئلِفها یِ B_1 نَ. مئلِفها یِ X را چنین تعریف میکنم.

$$X^{i} = (B_1)^{i} - \frac{1}{2\,\mathfrak{v}}\,\partial_j\,[(B_2)^{i\,j}\,\mathfrak{v}]. \tag{40}$$

به این ترتیب،

$$X'^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{k}\,(B_1)^{k} + \frac{1}{2}\,\Xi^{i'}{}_{k\,l}\,(B_2)^{k\,l} - \frac{1}{2\,\mathfrak{v}'}\,\partial_{j'}\,[\Lambda^{i'}{}_{k}\,\Lambda^{j'}{}_{l}\,(B_2)^{k\,l}\,\mathfrak{v}']. \tag{41}$$

یا،

$$X'^{i'} = \Lambda^{i'}{}_{k}\,X^{k} + \frac{1}{2}\,\mathfrak{V}^{i'}. \tag{42}$$

که،

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}^{i'} &= \Lambda^{i'}{}_{k}\,\left\{\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\,[(B_2)^{k\,l}\,\mathfrak{v}]\right\} + \Xi^{i'}{}_{k\,l}\,(B_2)^{k\,l}\\ &\quad - \frac{1}{\mathfrak{v}'}\,\partial_{j'}\,[\Lambda^{i'}{}_{k}\,\Lambda^{j'}{}_{l}\,(B_2)^{k\,l}\,\mathfrak{v}'].\end{aligned} \tag{43}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{V}^{i'} = \mathfrak{W}^{i'}{}_{k\,l}\,(B_2)^{k\,l}. \tag{44}$$

که

$$\mathfrak{W}^{i'}{}_{k\,l} = \Xi^{i'}{}_{k\,l} + \Lambda^{i'}{}_k\,\frac{\partial_l\,\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}} - \frac{\partial_{j'}\,(\Lambda^{i'}{}_k\,\Lambda^{j'}{}_l\,\mathfrak{v}')}{\mathfrak{v}'}. \tag{45}$$

یا،

$$\mathfrak{W}^{i'}{}_{k\,l} = \mathfrak{X}^{i'}{}_{k\,l} + \Lambda^{i'}{}_k\,\mathfrak{Y}_l. \tag{46}$$

که

$$\mathfrak{X}^{i'}{}_{k\,l} = \Xi^{i'}{}_{k\,l} - \Lambda^{j'}{}_l\,\partial_{j'}\,\Lambda^{i'}{}_k. \tag{47}$$

$$\mathfrak{Y}_l = \frac{\partial_l\,\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}} - \Lambda^{j'}{}_l\,\frac{\partial_{j'}\,\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}'} - \partial_{j'}\,\Lambda^{j'}{}_l. \tag{48}$$

دیده میشود

$$\partial_l = \Lambda^{j'}{}_l\,\partial_{j'}. \tag{49}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{X}^{i'}{}_{k\,l} = \Xi^{i'}{}_{k\,l} - \partial_l\,\Lambda^{i'}{}_k. \tag{50}$$

$$\mathfrak{Y}_l = \frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\,\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'}\right) - \partial_{j'}\,\Lambda^{j'}{}_l. \tag{51}$$

با استفاده از تعریفِ Λ و Ξ، از رابطه یِ (50) دیده میشود

$$\mathfrak{X} = 0. \tag{52}$$

از قضیه یِ تغییر- ِ-متغیرِ در انتگرال-گیری هم دیده میشود

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'} = |\det\Lambda|. \tag{53}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\,\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'}\right) = (\Lambda^{-1})^k{}_{j'}\,\partial_l\,\Lambda^{j'}{}_k. \tag{54}$$

یا،

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\,\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'}\right)=(\Lambda^{-1})^k{}_{j'}\,\partial_k\,\Lambda^{j'}{}_l. \tag{55}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{v}}\,\partial_l\,\left(\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}'}\right)=\partial_{j'}\,\Lambda^{j'}{}_l. \tag{56}$$

از (51) و (56) نتیجه میشود

$$\mathfrak{Y}=0. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{V}=0. \tag{58}$$

که این یعنی با تغییر- ِ-مختصات، مئلفِها ی ِ V مثل ِ مئلفِها ی ِیک تانسُر ِ مستقل-از-پایه تبدیل میشوند.

B_2 را هم با C نشان میدهم:

$$C=B_2. \tag{59}$$

معادله-یِ-تحول ِ (34) چنین میشود.

$$\dot{\psi}=H\,\psi. \tag{60}$$

که،

$$H\,\psi=-\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,J^i\,\psi). \tag{61}$$

$$J^i\,\psi=X^i\,\psi-\frac{1}{2}\,C^{i\,j}\,\partial_j\,\psi. \tag{62}$$

بسته یِ رابطه یِ اخیر میشود

$$J^i=X^i-\frac{1}{2}\,C^{i\,j}\,\partial_j. \tag{63}$$

یا،

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{X} - \frac{1}{2}\, C\, \boldsymbol{\nabla}. \tag{64}$$

با تغییر-ِ-مختصات، مئلفِها یِ J مثل ِ مئلفِها یِ یک تانسُر (بردار) ِ مستقل-از-پایه تبدیل میشوند. معادله یِ (61) را هم میشود چنین نوشت.

$$H\,\psi = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\,\psi). \tag{65}$$

که یعنی معادله-یِ-تحول چنین است.

$$\dot{\psi} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{J}\,\psi). \tag{66}$$

مفصلتر،

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,J^i\,\psi). \tag{67}$$

یا،

$$\dot{\psi} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{X}\,\psi) + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(C\,\boldsymbol{\nabla}\,\psi). \tag{68}$$

مفصلتر،

$$\dot{\psi} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,X^i\,\psi) + \frac{1}{2\,\mathfrak{v}}\,\partial_i\,(\mathfrak{v}\,C^{i\,j}\,\partial_j\,\psi). \tag{69}$$

به H همیلتنی، و به $\boldsymbol{J}$ (عملگر ِ) چگالی-یِ-جریان میگوییم.

4 پانوشتها

[1] Fokker-Planck

[2] Dirac