X1-172 (2023/05/16)

اثرِ لبه

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

یک خازنِ با-الکترُدها-یِ-موازی بررسی میشود؛ که هر یک از الکترُدها یَ ش یک نیم-صفحه است، و از لبِها یَ ش یک صفحه میگذرد که بر الکترُدها عمود است. برا یِ این خازن، شکلِ دقیقِ پتانسیلِ الکتریکی به دست میئاید و اثرِ لبه بررسی میشود.

0 درامد

خازن ی را بررسی میکنم که دُ الکترُد دارد و هر یک از الکترُدها یَ ش یک نیم-صفحه است. این نیم-صفحِها با هم موازی یَند. لبِها یِ خازن (لبِها یِ نیم-صفحِها) هم با هم موازی یَند. به این ترتیب مسئله در راستا یِ موازی با لبِها تقارنِ انتقالی دارد. همچنین، صفحه یِ شاملِ لبِها بر الکترُدها عمود است. مختصاتِ دِکَرتی یِ (x, y, ζ) را چنان میگیرم که الکترُدِ j به شکلِ $(\mathbb{E}_j \times \mathbb{A}_3)$ است، که

$$\mathbb{E}_j = \{(x, y_j) \mid x \le 0\}. \qquad (1)$$

$$y_j = (-1)^j\, \ell. \qquad (2)$$

j مقدارها یِ 1 یا 2 را میگیرد و $\mathbb{A}_3$ محورِ ζ است. به $\mathbb{E}_j$ خط- ِ-الکترُدِ j میگویم. درونِ خازن $(\mathbb{V} \times \mathbb{A}_3)$ است:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2). \tag{3}$$

$\mathbb{R}^2$ هم ان صفحه یِ $(\zeta = 0)$ است. به خاطرِ تقارنِ انتقالی در راستا یِ محورِ ζ، مسئله عملَن دُ-بُعدی ست. این متن در ادامه یِ [1] است. (تقریبَن) هم ان نمادگذاریها یِ آنجا را به کار میبَرم: متغیر- ِ-مختلطِ متناظر با (x, y) را با z نشان میدهم:

$$z = x + \mathrm{i}\, y. \tag{4}$$

لَپلَسی را با $\triangle$ نشان میدهم. پتانسیل (ϕ) درونِ خازن همساز است:

$$(\triangle\, \phi)(z) = 0, \qquad z \in \mathbb{V}. \tag{5}$$

همچنین، ϕ بر هر یک از الکترُدها ثابت است:

$$\phi(z) = \phi_j, \qquad z \in \mathbb{E}_j. \tag{6}$$

و بدونِ کاستن از کلیت، ϕ_j ها را چنین میگیرم.

$$\phi_j = (-1)^j\, b. \tag{7}$$

1 نگاشتِ ساده- کننده

نگاشتِ $\tilde{f}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{f}(w) = 1 + w + \exp w. \tag{8}$$

w یک متغیرِ مختلط است. $\tilde{f}$ یک شکلِ بی-بُعد-شده یِ f است:

$$f = \frac{\ell}{\pi}\, \tilde{f}. \tag{9}$$

$$w = u + \mathrm{i}\, v. \tag{10}$$

که u و v حقیقی یَند. دیده میشود

$$\mathbb{E}_j = f(\mathbb{B}_j). \tag{11}$$

که $\mathbb{B}_j$ یک خطِ افقی ست:

$$\mathbb{B}_j = \{(u, v_j) \mid u\}. \tag{12}$$

$$v_j = (-1)^j\,\pi. \tag{13}$$

و البته،

$$\mathbb{V} = f(\mathbb{U}). \tag{14}$$

که $\mathbb{U}$ یک نوارِ افقی ست:

$$\mathbb{U} = \{(u, v) \mid u \in \mathbb{R}, v \in (-\pi, \pi)\}. \tag{15}$$

که $\mathbb{R}$ مجموعه یِ عددها یِ حقیقی ست. پتانسیل چنین میشود.

$$\phi = \frac{b}{\pi}\,v. \tag{16}$$

این ϕ همساز است، چون v همساز است. پس معادله یِ (5) براورده میشود. و رُشن است که ϕ به شکلِ (16) شرط-ِ-مرزیها یِ (6)، همراه با (7)، را هم بر میئاورَد. مفصل-شده یِ (8) چنین است.

$$\tilde{x} = 1 + u + (\exp u)\,\cos v. \tag{17}$$

$$\tilde{y} = v + (\exp u)\,\sin v. \tag{18}$$

که $\tilde{z}$ بی-بُعد-شده یِ z است:

$$z = \frac{\ell}{\pi}\,\tilde{z}. \tag{19}$$

از (17) و (18) نتیجه میشود

$$\tilde{x} = 1 + \ln\frac{\tilde{y}-v}{\sin v} + \frac{\tilde{y}-v}{\sin v}\,\cos v. \tag{20}$$

$$|\tilde{y}| = \cos^{-1}[(\tilde{x}-1-u)\,\exp(-u)] + [\exp(2\,u) - (\tilde{x}-1-u)^2]^{1/2}. \tag{21}$$

رابطه یِ (20) یک معادله برا یِ v، بر حسبِ $(\tilde{x},\tilde{y})$ است. به این ترتیب بستگی یِ ϕ به (x,y) به دست میئاید.

درون و بیرونِ خازن دقیقَن خُش-تعریف نیست: $\mathbb{V}$ تقریبَن همه یِ صفحه است. اما برا یِ x ها یِ منفی با قدر- ِ-مطلقِ بزرگ، میشود ناحیه یِ بینِ دُ-الکترُد ($|y|$ کوچکتر از ℓ) را درون و ناحیه یِ بیرونِ دُ-الکترُد ($|y|$ بزرگتر از ℓ) را بیرون تعریف کرد. یک راه برا یِ دقیق-کردنِ تعریفِ درون و بیرون این است: لبها با یک سطح به هم وصل شوند، چنان که اجتماعِ این سطح و الکترُدها مرزِ دُ مجموعه یِ بی-اشتراکِ فضا شود. به طُرِ خاص، یک تعریفِ دقیق (و البته قراردادی) برا یِ درون و بیرون چنین است. $\mathbb{V}_-$ را درون و $\mathbb{V}_+$ را بیرون تعریف میکنم:

$$\mathbb{V}_\alpha = f(\mathbb{U}_\alpha). \tag{22}$$

که α مقدارها یِ $-$ و 0 و $+$ را میگیرد و

$$\mathbb{U}_\alpha = \{(u,v)\mid u\in\mathbb{R}_\alpha, v\in(-\pi,\pi)\}. \tag{23}$$

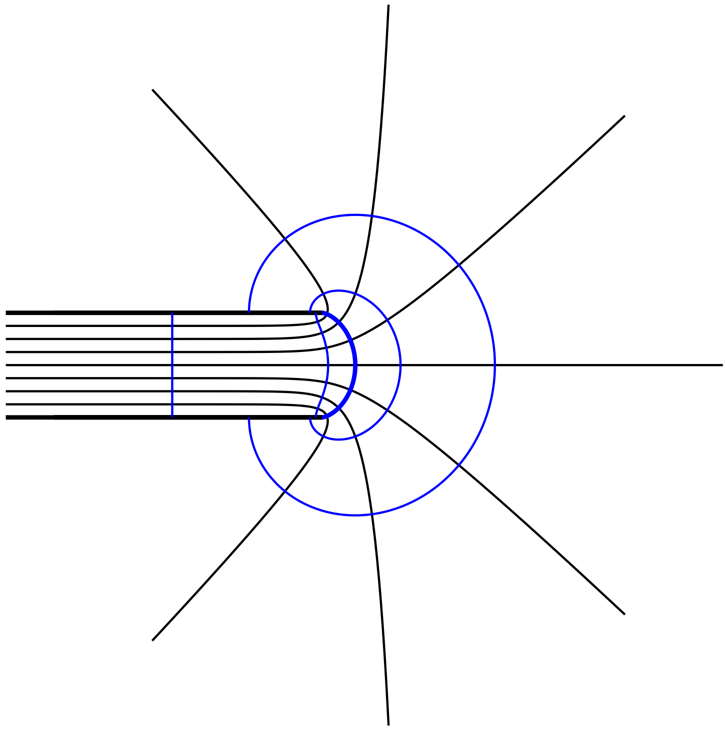
$\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_+$) مجموعه یِ عددها یِ حقیقی یِ منفی (مثبت) است، و $\mathbb{R}_0$ هم ان $\{0\}$ است. $\mathbb{V}_0$، همراه با تصویرِ الکترُدها بر صفحه یِ ($z=0$)، درون-و-بیرونِ (قراردادی یِ) $\mathbb{V}$ را از هم جدا میکند. معادله یِ پارامتری برا یِ $\mathbb{V}_0$ چنین است.

$$\tilde{x}(0,v) = 1 + \cos v. \tag{24}$$

$$\tilde{y}(0,v) = v + \sin v. \tag{25}$$

اینها معادله یِ یک چرخه از یک چرخزادَند. کلیتر، معادلات- ِ-پارامتری یِ هر خط- ِ-میدان هم ان روابطِ (17) و (18) با یک u یِ ثابت (و البته یک z ِ ثابت)َند، و معادلات- ِ-پارامتری یِ هر سطح- ِ-هم-پتانسیل هم ان روابطِ (17) و (18) با یک v یِ ثابتَند.

شکلِ 1 سطحها یِ هم-پتانسیل (سیاه) و خط-ِ-میدانها (آبی) را نشان میدهد. خطها یِ کلفت درون-و-بیرونِ (قراردادی یِ) $\mathbb{V}$ را از هم جدا میکنند.



شکلِ 1

خطها یِ سیاه سطحها یِ همپتانسیل‌َند. خطها یِ سیاهِ کلفت الکترُدها یَند. سطحها یِ هم-پتانسیل برا یِ v برابر با $(v = -\pi)$ تا $(v = \pi)$ نشان داده شده اند. جهتِ افزایشِ v (در طرفِ چپ) عمودی رو-به-بالا ست. اختلافِ مقدارها یِ v برا یِ دُ سطح-ِ-همپتانسیلِ مجاور $(\pi/4)$ است. خطها یِ آبی خط-ِ-میدانها یَند. خطِ آبی یِ کلفت $(u = 0)$ است.

2 چگالی یِ بار

چگالی یِ سطحی یِ بار بر الکترُدِ 2 را با σ نشان میدهم:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, \phi. \tag{26}$$

ε گذردهی-یِ-الکتریکی یِ محیط و $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار-ِ-یکه یِ عمود-بر-سطح است، و طرفِ راست (و عبارتها یِ بعدی) بر الکترُدِ 2 محاسبه میشود. سطحها یِ u-ثابت بر الکترُد عمودَند. پس،

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\, u = 0. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \left(\frac{\partial\, s}{\partial\, v}\right)^{-1}\, \frac{\mathrm{d}\, \phi}{\mathrm{d}\, v}. \tag{28}$$

که s طول-ِ-قُس است:

$$(\mathrm{d}\, s)_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \left|\frac{\partial\, z}{\partial\, v}\right|\, (\mathrm{d}\, v). \tag{29}$$

پس،

$$(\mathrm{d}\, s)_{\hat{\boldsymbol{n}}} = \frac{\ell}{\pi}\, |1 - \exp u|\, (\mathrm{d}\, v). \tag{30}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{b}{\ell\, |1 - \exp u|}. \tag{31}$$

چگالی-بر-u را با σ_u نشان میدهم:

$$\sigma_u = \sigma\, \left|\frac{\partial\, x}{\partial\, u}\right|. \tag{32}$$

دیده میشود

$$\frac{\sigma_u}{\varepsilon} = \frac{b}{\pi}. \tag{33}$$

بخش ِ درون- ِ-خارن ِ (بیرون- ِ-خازن ِ) هر الکترُد با u های ِ منفی (مثبت) متناظر است. اگر اثر ِ لبه نبود، چگالی-ی ِ-بار بر هر الکترُد؛ بر بخش ِ درون- ِ-خارن یکنواخت و بر بخش ِ بیرون- ِ-خازن صفر میشد. این چگالی-ی ِ-بار برا ی ِ الکترُد ِ 2 را با $\sigma_\circ$ نشان میدهم:

$$\frac{\sigma_\circ}{\varepsilon} = \frac{b}{\ell}\,\Theta(-u). \tag{34}$$

که Θ تابع ِ هِویساید [2] است. انحراف ِ σ از $\sigma_\circ$ را با $(\delta\,\sigma)$ نشان میدهم:

$$\delta\,\sigma = \sigma - \sigma_\circ. \tag{35}$$

دیده میشود

$$\frac{\delta\,\sigma}{\varepsilon} = \left[\frac{b}{\ell\,(1-\exp u)} - \frac{b}{\ell}\right]\,\Theta(-u) + \frac{b}{\ell\,(-1+\exp u)}\,\Theta(u). \tag{36}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\delta\,\sigma}{\varepsilon} = \frac{b}{\ell\,(-1+\exp\,|u|)}. \tag{37}$$

همچنین،

$$\delta\,\sigma_u = (\delta\,\sigma)\,\left|\frac{\partial\,x}{\partial\,u}\right|. \tag{38}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\delta\,\sigma_u}{\varepsilon} = \frac{b\,|1-\exp\,u|}{\pi\,(-1+\exp\,|u|)}. \tag{39}$$

یا،

$$\frac{\delta\,\sigma_u}{\varepsilon} = \frac{b}{\pi}\,\exp[u\,\Theta(-u)]. \tag{40}$$

بار-بر-طول ِ اضافی را با $(\delta\,\lambda)$ نشان میدهم. $(\delta\,\lambda)$ انتگرال ِ $(\delta\,\sigma)$ است. بار-بر-طول ِ اضافی بر درون ِ الکترُد از لبه تا x را با $(\delta\,\lambda_-)(x)$، و بار-بر-طول ِ اضافی بر بیرون ِ الکترُد از لبه تا x را با $(\delta\,\lambda_+)(x)$ نشان میدهم:

$$(\delta\,\lambda_\iota)(x) = \iota\,\int_0^{u_\iota}(\mathrm{d}\,u)\,\delta\,\sigma_u. \tag{41}$$

که ι مقدارها یِ $-$ و $+$ را میگیرد، u_- منفی است و u_+ مثبت است، و

$$\tilde{x} = 1 + u_\iota - \exp u_\iota. \tag{42}$$

دیده میشود

$$\frac{\delta\,\lambda_\iota}{\varepsilon} = \frac{b}{\pi}\,[(1-\exp u_\iota)\,\Theta(-u_\iota) + u_\iota\,\Theta(u_\iota)]. \tag{43}$$

از جمله،

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\delta\,\lambda_-}{\varepsilon} = \frac{b}{\pi}. \tag{44}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\delta\,\lambda_+}{\varepsilon} = \infty. \tag{45}$$

بار-بر-طول- ِ-اضافی یِ کل، بر سطحِ درونی یِ الکترُد محدود ولی بر سطحِ بیرونی یِ الکترُد بینهایت است. اما،

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\delta\,\lambda_+}{|x|} = 0. \tag{46}$$

که این یعنی میانگینِ چگالی-یِ-بارِ اضافی بر سطحِ بیرونی یِ الکترُد صفر است. البته از (44) رُشن است که میانگینِ چگالی-یِ-بارِ اضافی بر سطحِ درونی یِ الکترُد هم صفر است.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «ظرفیت، دُ بُعد» (2022/01/20) X1-161

[2] Heaviside