X1-167 (2022/10/20)

تابش از یک استوانه یِ دایرِئی با جریانِ سمتی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

از یک استوانه یِ دایرِئی جریان ی سمتی، یکنواخت، و سینوسی-با-زمان میگذرد. میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ حاصل، و نیز نوانِ تابشی محاسبه میشوند.

0 درامد

مختصاتِ استوانِئی (ρ, ϕ, z) اند. تابعها یِ سینوسی-با-زمان را با فازُر نشان میدهم:

$$\mathfrak{X}(t) = \mathrm{Re}[\mathfrak{X}\, \exp(-\mathrm{i}\,\omega\, t)]. \tag{1}$$

که t زمان است، بستگی یِ $\mathfrak{X}(t)$ به زمان سینوسی با بسامد-ِ زاویِئی یِ ω است، و $\mathfrak{X}$ یک عددِ مختلط (فازُرِ متناظر با تابع) است. بر حسبِ فازرها، معادلاتِ برداری یِ مَکسوِل [1] (در خلئ) چنین میشوند.

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} - \mathrm{i}\,\omega\, \boldsymbol{B}. \tag{2}$$

$$\mu_0\, \boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} + c^{-2}\, \mathrm{i}\,\omega\, \boldsymbol{E}. \tag{3}$$

$\boldsymbol{E}$ میدان ِ الکتریکی، $\boldsymbol{B}$ میدان ِ مغناطیسی، و $\boldsymbol{J}$ چگالی یِ جریان است. ε_0 و μ_0 و c هم، به ترتیب، گذردهی یِ الکتریکی و تراوایی یِ مغناطیسی و سرعت ِ نور (همه در خلئ) َند:

$$c = (\varepsilon_0\,\mu_0)^{-1/2}. \tag{4}$$

جز اینها معادله یِ پیوستگی هم هست:

$$0 = -\mathrm{i}\,\omega\,\varrho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}. \tag{5}$$

که ϱ چگالی یِ بار است. دُ معادله یِ اسکالر هم برا یِ میدانها هست:

$$\varepsilon_0^{-1}\,\varrho = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}. \tag{6}$$

$$0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{7}$$

اما وقت ی ω صفر نیست، معادلات ِ (6) و (7) مستقل از معادلات ِ قبلی نیستند: معادله یِ (6) از معادله یِ (3) و معادله یِ (5) نتیجه میشود. معادله یِ (7) هم از معادله یِ (2) نتیجه میشود.

1 تقارنها

گیرم میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{\boldsymbol{z}}$ تقارن دارد. در این صورت، مئلفِها یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ در مختصات ِ استوانِئی تابع ِ فقط ρ و ϕ اند:

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathfrak{X}_\rho(\rho,\phi) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathfrak{X}_\phi(\rho,\phi) + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathfrak{X}_z(\rho,\phi). \tag{8}$$

گیرم میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ تحت ِ دَوَران حُل ِ $\hat{\boldsymbol{z}}$ تقارن دارد. در این صورت، مئلفِها یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ در مختصات ِ استوانِئی تابع ِ فقط ρ و z اند:

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathfrak{X}_\rho(\rho,z) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathfrak{X}_\phi(\rho,z) + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathfrak{X}_z(\rho,z). \tag{9}$$

پس رُشن است که اگر میدان ِ برداری یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ تحت ِ هر-دُ-عمل (انتقال در جهت ِ $\hat{\boldsymbol{z}}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{\boldsymbol{z}}$) تقارن داشته باشد، مئلفِها یِ $\boldsymbol{\mathfrak{X}}$ در مختصات ِ استوانِئی تابع ِ فقط ρ اند:

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathfrak{X}_\rho(\rho) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathfrak{X}_\phi(\rho) + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathfrak{X}_z(\rho). \tag{10}$$

گیرم میدان ِ برداری ی ِ $\mathfrak{X}_{\rm e}$ تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{z}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{z}$ تقارن دارد و تحت ِ وارونی ی ِ z زُج است. در این صورت،

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{\rm e}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathfrak{X}_{{\rm e}\,\rho}(\rho) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathfrak{X}_{{\rm e}\,\phi}(\rho). \tag{11}$$

گیرم میدان ِ برداری ی ِ $\mathfrak{X}_{\rm o}$ تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{z}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{z}$ تقارن دارد و تحت ِ وارونی ی ِ z فرد است. در این صورت،

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{\rm o}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathfrak{X}_{{\rm o}\,z}(\rho). \tag{12}$$

گیرم میدان ِ برداری ی ِ $\mathfrak{X}_{\rm e}$ تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{z}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{z}$ تقارن دارد و تحت ِ وارونی ی ِ ϕ زُج است. در این صورت،

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{\rm e}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\,\mathfrak{X}_{{\rm e}\,\rho}(\rho) + \hat{\boldsymbol{z}}\,\mathfrak{X}_{{\rm e}\,z}(\rho). \tag{13}$$

گیرم میدان ِ برداری ی ِ $\mathfrak{X}_{\rm o}$ تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{z}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{z}$ تقارن دارد و تحت ِ وارونی ی ِ ϕ فرد است. در این صورت،

$$\boldsymbol{\mathfrak{X}}_{\rm o}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\,\mathfrak{X}_{{\rm o}\,\phi}(\rho). \tag{14}$$

2 جریان ِ سمتی و میدانها

از یک استوانه ی ِ دایرئی به شعاع ِ a جریان ی سمتی و یکنواخت میگذرد. محور ِ z را محور ِ استوانه میگیرم. این جریان (ِ سطحی) تحت ِ انتقال در جهت ِ $\hat{z}$ و دَوَران حُل ِ $\hat{z}$ تقارن دارد و تحت ِ وارونی ی ِ ϕ فرد است. پس به شکل ِ (14) است. چگالی ی ِ جریان- ِ-سطحی را با $\boldsymbol{J}_{\rm s}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{J}_{\rm s}(\phi, z)]\,\delta(\rho - a). \tag{15}$$

$$\boldsymbol{J}_{\rm s}(\phi, z) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\,J_{\rm s}. \tag{16}$$

که J_{s} مستقل از مکان است.

میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی یِ حاصل هم هم ان تقارنها یِ انتقالی و دورانی را دارند. ولی رفتارِ شان تحتِ واورنی یِ ϕ یکسان نیست. میدانِ الکتریکی مثلِ خُدِ جریان است: تحتِ واورنی یِ ϕ فرد است. اما میدانِ مغناطیسی تحتِ واورنی یِ ϕ زُج است. به این ترتیب میدانِ الکتریکی به شکلِ (14) و میدانِ مغناطیسی به شکلِ (13) است:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\phi}}\, E(\rho). \tag{17}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{\rho}}\, B_\rho(\rho) + \hat{\boldsymbol{z}}\, B_z(\rho). \tag{18}$$

البته دیورژانسِ $\boldsymbol{B}$ صفر است: معادله یِ (7). شکلِ (18) برا یِ $\boldsymbol{B}$ را در (7) میگذارم. نتیجه میشود

$$B_\rho = 0. \tag{19}$$

و (18) چنین میشود.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}}\, B(\rho). \tag{20}$$

که B_z با خُدِ B نشان داده شده.

3 جوابِ معادلات

معادلاتِ مَکسولِ [1] (نسبت به میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی) از مرتبه یِ یک َند. با حذفِ هر یک از این میدانها یک معادله به دست میئاید که شاملِ فقط میدانِ دیگر، و (نسبت به میدانِ باقی-مانده) از مرتبه یِ دُ است:

$$\varepsilon_0^{-1}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varrho - \mu_0\,\mathrm{i}\,\omega\,\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + k^2)\,\boldsymbol{E}. \tag{21}$$

$$-\mu_0\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + k^2)\,\boldsymbol{B}. \tag{22}$$

که k عدد- ِ-مُج است:

$$k = c^{-1}\,\omega. \tag{23}$$

از جمله، معادلات ِ بی-چشمه چنین میشوند.

$$0 = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + k^2)\,\boldsymbol{E}. \tag{24}$$

$$0 = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} + k^2)\,\boldsymbol{B}. \tag{25}$$

برا یِ جریان ی که به شکل ِ (15) و (16) است، میدان ِ مغناطیسی به شکل ِ (20) است. پس (25) چنین میشود.

$$0 = \frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\rho}\,\left(\rho\,\frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,\rho}\right) + k^2\,B, \quad \rho \neq a. \tag{26}$$

این معادله یِ بِسِل [2] از مرتبه یِ صفر، با متغیر ِ $(k\,\rho)$، است. یک شرط ِ مرزی این است که جواب در $\rho = 0$ تکین نیست. نتیجه میشود

$$B(\rho) = C\,\mathsf{J}_0(k\,\rho), \qquad \rho < a. \tag{27}$$

که C یک ثابت، و J_m تابع ِ بِسِل [2] از مرتبه یِ m است. یک شرط- ِ-مرزی یِ دیگر هم این است که جواب در $\rho \to \infty$ مثل ِ یک مُج ِ بیرون-رونده است. از این نتیجه میشود

$$B(\rho) = D\,\mathsf{H}_0^{(1)}(k\,\rho), \qquad \rho > a. \tag{28}$$

که D یک ثابت، و $H_m^{(1)}$ تابع ِ هانکِل [3] از نُع ِ اول و از مرتبه یِ m است.

از شکل ِ بی-چشمه یِ معادله یِ (3)، همراه با شکلها یِ (17) و (20) برا یِ میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی، نتیجه میشود

$$E(\rho) = c^2\,(\mathrm{i}\,\omega)^{-1}\,B'(\rho), \qquad \rho \neq a. \tag{29}$$

که $\mathfrak{X}'$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ است. به این ترتیب،

$$E(\rho) = -\mathrm{i}\,c\,C\,\mathsf{J}_0'(k\,\rho), \qquad \rho < a. \tag{30}$$

$$E(\rho) = -\mathrm{i}\,c\,D\,\mathsf{H}_0^{(1)\,\prime}(k\,\rho), \qquad \rho > a. \tag{31}$$

بر پوسته ی ِ حامل- ِ-جریان، این شرطها برقرار است.

$$0 = \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{E}_{+} - \boldsymbol{E}_{-}). \tag{32}$$

$$\mu_0\, \boldsymbol{J}_{\rm s} = \hat{\boldsymbol{n}} \times (\boldsymbol{B}_{+} - \boldsymbol{B}_{-}). \tag{33}$$

که $\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه ی ِ عمود بر سطح است و

$$\mathfrak{X}_{\pm}(\boldsymbol{r}) = \lim_{s\to 0^{+}} \mathfrak{X}(\boldsymbol{r} \pm\, s\,\hat{\boldsymbol{n}}). \tag{34}$$

از روابط ِ (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = D\, \mathsf{H}_0^{(1)\,\prime}(k\,a) - C\, \mathsf{J}_0'(k\,a). \tag{35}$$

$$\mu_0\, J_{\rm s} = -[D\, \mathsf{H}_0^{(1)}(k\,a) - C\, \mathsf{J}_0(k\,a)]. \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$C = \frac{\mathsf{H}_0^{(1)\,\prime}(k\,a)}{\mathrm{i}\,W(k\,a)}\,(\mu_0\, J_{\rm s}). \tag{37}$$

$$D = \frac{\mathsf{J}_0'(k\,a)}{\mathrm{i}\,W(k\,a)}\,(\mu_0\, J_{\rm s}). \tag{38}$$

که،

$$W = \mathsf{J}_0\, \mathsf{N}_0' - \mathsf{J}_0'\, \mathsf{N}_0. \tag{39}$$

و N_m تابع ِ نُیمان [4] از مرتبه ی ِ m است:

$$\mathsf{H}_m^{(1)} = \mathsf{J}_m + \mathrm{i}\, \mathsf{N}_m. \tag{40}$$

از تعریف ِ J_0 و N_0 نتیجه میشود

$$W(\mathfrak{x}) = \frac{2}{\pi\, \mathfrak{x}}. \tag{41}$$

پس،

$$C = \frac{\pi\, k\, a\, \mathsf{H}_0^{(1)}{}'(k\, a)}{2\, \mathrm{i}}\, (\mu_0\, J_\mathrm{s}). \tag{42}$$

$$D = \frac{\pi\, k\, a\, \mathsf{J}_0'(k\, a)}{2\, \mathrm{i}}\, (\mu_0\, J_\mathrm{s}). \tag{43}$$

4 توان ِ تابشی

شدت ِ تابش (چگالی یِ سطحی یِ توان ِ تابشی) بردار ِ پُینتینگ [5] است، که آن را با $\boldsymbol{S}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2\, \mu_0}\, \mathsf{Re}(\boldsymbol{E} \times \overline{\boldsymbol{B}}). \tag{44}$$

$\overline{\mathfrak{X}}$ مزدوج- ِ-مختلط ِ $\mathfrak{X}$ است. درون ِ استوانه بردار ِ پُینتینگ [5] صفر است. بیرون ِ استوانه،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \frac{-\mathrm{i}\, c\, |D|^2\, \hat{\boldsymbol{\rho}}}{4\, \mu_0}\, \{[\mathsf{H}_0^{(1)}{}'(k\, \rho)]\, \overline{[\mathsf{H}_0^{(1)}(k\, \rho)]} - \overline{[\mathsf{H}_0^{(1)}{}'(k\, \rho)]}\, [\mathsf{H}_0^{(1)}(k\, \rho)]\},\\ &= \frac{c\, |D|^2\, \hat{\boldsymbol{\rho}}}{2\, \mu_0}\, W(k\, \rho).\end{aligned} \tag{45}$$

پس،

$$\boldsymbol{S} = \frac{c\, |D|^2}{\pi\, \mu_0\, k\, \rho}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{46}$$

که میشود

$$\boldsymbol{S} = \frac{\pi\, \mu_0\, c\, |k\, a\, \mathsf{J}_0'(k\, a)|^2}{4\, k\, \rho}\, |J_\mathrm{s}|^2\, \hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{47}$$

توان ی که از یک سطح میگذرد انتگرال ِ بردار ِ پُینتینگ [5] بر این سطح است. توان-بر-طول ی که از یک استوانه میگذرد انتگرال ِ بردار ِ پُینتینگ [5] بر محیط ِ این استوانه است. برا یِ یک استوانه یِ دایرِئی که محور َ ش محور ِ z است و شعاع ِ قاعده اَ ش ρ است، این توان-بر-طول را با P' نشان میدهم. دیده میشود

$$P' = \frac{\pi^2\, \mu_0\, c\, |k\, a\, \mathsf{J}_0'(k\, a)|^2}{2\, k}\, |J_\mathrm{s}|^2. \tag{48}$$

5 حالتها یِ خاص

چند حالت ِ خاص را بررسی میکنم:

5.1 بسامد ِ کم

در این حالت،

$$k\,a \ll 1. \tag{49}$$

از شکلها یِ مجانبی یِ توابع ِ بسِل [2] و هانکِل [3] برا یِ متغیرها یِ کوچک نتیجه میشود

$$C = (1 + \cdots)\,(\mu_0\,J_{\rm s}). \tag{50}$$

$$D = \frac{{\rm i}\,\pi}{4}\,(k\,a)^2\,(1 + \cdots)\,(\mu_0\,J_{\rm s}). \tag{51}$$

$$P' = \frac{\pi^2\,\mu_0\,c}{8\,k}\,(k\,a)^4\,(1 + \cdots)\,|J_{\rm s}|^2. \tag{52}$$

از جمله؛ در بسامد ِ صفر میدان ِ الکتریکی صفر است، میدان ِ مغناطیسی بیرون ِ استوانه صفر است و درون ِ استوانه هم ان است که در حالت ِ ایستا به دست میئاید (چنان که انتظار میرود)، و توان ِ تابشی هم صفر است.

5.2 سیم

سیم حالت ِ حدی یِ استوانه است، وقت ی شعاع ِ استوانه به صفر میگراید. شرط ِ (49) با کاهش ِ شعاع ِ استوانه هم براورده میشود. شعاع ِ استوانه را به صفر میگرایانم. در این حالت C مهم نیست، چون درون ِ استوانه وجود ندارد. D هم (با جریان- ِ-سطحی یِ محدود) صفر میشود، چون دُ-قطبی-یِ-مغناطیسی-بر-طول صفر میشود. در نتیجه میدانها بیرون ِ استوانه صفر میشوند، و توان ِ تابشی هم صفر میشود. اما میشود جریان- ِ-سطحی را چنان مقیاس کرد که دُ-قطبی-یِ-مغناطیسی-بر-طول به مقدار ی ناصفر بگراید. دُ-قطبی-یِ-مغناطیسی-بر-طول را با m' نشان میدهم:

$$m' = \pi\,a^2\,J_{\rm s}. \tag{53}$$

m' را ثابت میگیرم و a را به صفر میگرایانم. نتیجه میشود

$$D = \frac{\mathrm{i}}{4}\, k^2\, (1 + \cdots)\, (\mu_0\, m'). \tag{54}$$

$$P' = \frac{\mu_0\, c}{8}\, k^3\, (1 + \cdots)\, |m'|^2. \tag{55}$$

5.3 بسامد ِ زیاد

در این حالت،

$$k\, a \gg 1. \tag{56}$$

از شکلها یِ مجانبی یِ توابع ِ بسِل [2] و هانکِل [3] برا یِ متغیرها یِ بزرگ نتیجه میشود

$$C = \left\{ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \exp\left[\mathrm{i}\, \left(k\, a - \frac{\pi}{4}\right)\right] \right\}\, (k\, a)^{1/2}\, (1 + \cdots)\, (\mu_0\, J_{\mathrm{s}}). \tag{57}$$

$$D = \left[\mathrm{i}\, \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \sin\left(k\, a - \frac{\pi}{4}\right)\right]\, (k\, a)^{1/2}\, (1 + \cdots)\, (\mu_0\, J_{\mathrm{s}}). \tag{58}$$

$$P' = \left[\frac{\pi\, \mu_0\, c}{k}\, \sin^2\left(k\, a - \frac{\pi}{4}\right)\right]\, (k\, a)\, (1 + \cdots)\, |J_{\mathrm{s}}|^2. \tag{59}$$

5.4 صفحه

صفحه حالت ِ حدی یِ استوانه است، وقت ی شعاع ِ استوانه به بینهایت میگراید. شرط ِ (56) با افزایش ِ شعاع ِ استوانه هم براورده میشود. شعاع ِ استوانه را به بینهایت میگرایانم. در این حالت C و D به حد ِ معین ی نمیگرایند: با دامنه یِ فزاینده نوسان میکنند. P' هم با دامنه یِ فزاینده نوسان میکند، اما بر خلاف ِ C و D یک میانگین ِ ناصفر دارد، که آن میانگین به بینهایت میگراید. البته این که توان-بر-طول بینهایت شود عجیب نیست: مقطع ِ استوانه بینهایت شده. اما توان-بر-مساحت (توان-بر-طول تقسیم بر محیط ِ استوانه) بینهایت نمیشود. توان-بر-مساحت را با P'' نشان میدهم:

$$P'' = \frac{P'}{2\, \pi\, a}. \tag{60}$$

از (59) دیده میشود

$$P'' = \left[\frac{\mu_0\, c}{2}\, \sin^2\left(k\, a - \frac{\pi}{4}\right)\right]\, (1 + \cdots)\, |J_{\mathrm{s}}|^2. \tag{61}$$

این را میشد مستقیمَن هم حساب کرد: از یک صفحه یک جریان ِ سطحی میگذرد. مختصات ِ دِکَرتی یِ (x, y, z) را چنان میگیرم که صفحه $x = 0$ است و

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = [\boldsymbol{J}_{\rm s}(y, z)]\, \delta(x). \tag{62}$$

$$\boldsymbol{J}_{\rm s}(y, z) = \hat{\boldsymbol{y}}\, J_{\rm s}. \tag{63}$$

این جریان تحت ِ انتقال در هر جهت ی موازی با صفحه تقارن دارد، و تحت ِ وارونی یِ y فرد است. با فرض ِ این که میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی هم مانسته یِ این تقارنها را دارند،

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{y}}\, E(x). \tag{64}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{x}}\, B_x(x) + \hat{\boldsymbol{z}}\, B_z(x). \tag{65}$$

مانسته یِ فرد-بودن تحت ِ وارونی یِ y، برا یِ میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی این است که تحت ِ وارونی یِ y، میدان ِ الکتریکی فرد و میدان ِ مغناطیسی زُج است. از این که دیورژانس ِ $\boldsymbol{B}$ صفر است، از (65) نتیجه میشود

$$B_x = 0. \tag{66}$$

و (65) چنین میشود.

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \hat{\boldsymbol{z}}\, B(x). \tag{67}$$

که B_z با خُد ِ B نشان داده شده.

معادله یِ میدان برا یِ B میشود

$$0 = \frac{{\rm d}^2 B}{{\rm d}\, x^2} + k^2\, B, \qquad x \neq 0. \tag{68}$$

این معادله یک جواب دارد که به شکل ِ مُج ی بیرون-رونده است. این جواب را با $\tilde{B}$ نشان میدهم:

$$\tilde{B}(x) = \tilde{C}\, \exp(-{\rm i}\, k\, x), \qquad x < 0. \tag{69}$$

$$\tilde{B}(x) = \tilde{D}\, \exp({\rm i}\, k\, x), \qquad x > 0. \tag{70}$$

که $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ ثابت َند.

$\tilde{E}$ (جواب ِ متناظر برا یِ میدان ِ الکتریکی) هم چنین میشود.

$$\tilde{E}(x) = c^2\,(\mathrm{i}\,\omega)^{-1}\,\tilde{B}'(x). \tag{71}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{E}(x) = -c\,\tilde{C}\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x), \quad x < 0. \tag{72}$$

$$\tilde{E}(x) = c\,\tilde{D}\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \qquad x > 0. \tag{73}$$

از روابط ِ (32) و (33)، به ترتیب، نتیجه میشود

$$0 = \tilde{D} + \tilde{C}. \tag{74}$$

$$\mu_0\,J_\mathrm{s} = -(\tilde{D} - \tilde{C}). \tag{75}$$

به این ترتیب،

$$\tilde{C} = \frac{\mu_0\,J_\mathrm{s}}{2}. \tag{76}$$

$$\tilde{D} = -\frac{\mu_0\,J_\mathrm{s}}{2}. \tag{77}$$

اینها با حالت ِ حدی یِ جواب ِ متناظر با استوانه فرق دارند: در جواب ِ متناظر با استوانه، درون ِ استوانه مُج منتشر نمیشود. اما در جواب ی که برا یِ صفحه به دست آمد هر-دو-سو یِ صفحه انتشار- ِ-مُج هست: در $x < 0$ انتشار- ِ-مُج به چپ، و در $x > 0$ انتشار- ِ-مُج به راست. برا یِ این که جواب ِ متناظر با صفحه حالت ِ حدی یِ جواب ِ متناظر با استوانه باشد، باید در آن-سو یِ صفحه که متناظر با درون ِ استوانه (در حالت ِ حدی) است انتشار- ِ-مُج ی نباشد. برا یِ ساختن ِ جواب ی برا یِ مسئله یِ صفحه که چنین باشد، به جواب ی که در بالا به دست آمد یک مُج ِ تخت میفزایم که در جهت ِ x منتشر

میشود. جواب ِ متناظر (برا یِ، به ترتیب، میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی) را با $\breve{E}$ و $\breve{B}$ نشان میدهم:

$$\breve{B}(x) = \tilde{C}\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x) + F\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \qquad x < 0. \tag{78}$$

$$\breve{B}(x) = (\tilde{D} + F)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \qquad x > 0. \tag{79}$$

$$\breve{E}(x) = -c\,\tilde{C}\,\exp(-\mathrm{i}\,k\,x) + c\,F\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \quad x < 0. \tag{80}$$

$$\breve{E}(x) = c\,(\tilde{D} + F)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \qquad x > 0. \tag{81}$$

F ثابت است. چیز ی که به جواب اضافه شده معادلات ِ (2) و (3) در حالت ِ بی-چشمه را بر میئاورَد. پس $\breve{E}$ و $\breve{B}$ معادله-یِ-دیفرانسیلها یِ لازم را بر میئاورند. اما جواب ِ متناظر با $\breve{E}$ و $\breve{B}$ همه یِ تقارنها یِ چشمه را ندارد: جریان تحت ِ وارونی یِ x زُج است. مانسته یِ این تقارن در جواب ِ متناظر با $\breve{E}$ و $\breve{B}$ نیست. البته این تقارن حالت ِ حدی یِ یک تقارن ِ مسئله یِ استوانه هم نیست: این تقارن در حالت ِ حدی به مسئله اضافه میشود.

با جواب ِ جدید (که حالت ِ کلی یِ جواب ِ قبلی برا یِ صفحه است)، توان-بر-مساحت ِ بیرون-رونده چنین میشود.

$$\breve{P}'' = \frac{\mu_0\,c}{8}\,\left(1 - \frac{|F|^2}{|\tilde{C}|^2}\right)\,|J_\mathrm{s}|^2, \quad x < 0. \tag{82}$$

$$\breve{P}'' = \frac{\mu_0\,c}{8}\,\left|1 + \frac{F}{\tilde{D}}\right|^2\,|J_\mathrm{s}|^2, \qquad x > 0. \tag{83}$$

این که در $x < 0$ انتشار-ِ-مُج نباشد، یعنی $\breve{P}''$ در $x < 0$ صفر باشد، که همئرز است با

$$|F| = |\tilde{C}|. \tag{84}$$

از (76) و (77) و (84) نتیجه میشود

$$F = \tilde{D}\,\exp(\mathrm{i}\,\alpha). \tag{85}$$

که α ثابت یِ حقیقی ست. به این ترتیب،

$$\breve{P}'' = \left(\frac{\mu_0\,c}{2}\,\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\,|J_\mathrm{s}|^2, \qquad x > 0. \tag{86}$$

این هم ان 61 است، در حد ی که $(k\,a)$ به بینهایت بگراید، و البته با یک تناظر ِ مناسب که بین ِ α و $(k\,a)$ برقرار شود.

5.5 تشدید

در این حالت،

$$\mathsf{J}_0'(k\,a)=0. \tag{87}$$

و نتیجه میشود

$$C=\frac{\pi\,k\,a\,\mathsf{N}_0'(k\,a)}{2}\,(\mu_0\,J_\mathrm{s}). \tag{88}$$

$$D=0. \tag{89}$$

$$P'=0. \tag{90}$$

میدانها بیرون ِ استوانه صفر َند. پس توان ِ تابشی هم صفر است.

6 پانوشتها

[1] Maxwell

[2] Bessel

[3] Hankel

[4] Neumann

[5] Poynting