

## ظرفیت، دُ بعد

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

ظرفیت در دُ-بعد بررسی میشود. برای این کار متغیرها ی مختلط به کنار میروند، که ابزار ی قدرتمند در دُ-بعد نَد.

### 1 درآمد

این متن را میشود ادامه ای بر [1] و [2] تلقی کرد. خازن را شامل دُ الکتَرِدِ  $\mathbb{E}_1$  و  $\mathbb{E}_2$ ، و دُ کنار  $\mathbb{S}_1$  و  $\mathbb{S}_2$  تعریف میکنم، چنان که هر یک از الکتَرِدِها و کنارها یکپارچه است، بر هر یک از الکتَرِدِها پتانسیل  $(u)$  ثابت است، و بر هر یک از کنارها مشتق پتانسیل در راستای عمود بر کنار صفر است:

$$u(z) = u_j, \quad z \in \mathbb{E}_j. \quad (1)$$

$$(\partial_m u)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{S}_j. \quad (2)$$

ظرفیت، دُ بُعد

$(\partial_m \mathfrak{X})$  مشتقِ سوییِ  $\mathfrak{X}$  با  $m$  است، و  $m$  (در یک نقطه ی  $z$  از  $S_j$ ) بر  $S_j$  عمود است. پتانسیل درونِ خازن همساز است، یعنی معادله ی لپلس [3] را برمیثاورد:

$$(\Delta u)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{V}. \quad (3)$$

$\Delta$  لپلسی ست.  $\mathbb{V}$  درونِ خازن است، و مرزِ آن اجتماعِ الکتُردها و کنارها ست. مرزِ  $\mathbb{V}$  را با  $\mathbf{b}(\mathbb{V})$  نشان میدهم:

$$\mathbf{b}(\mathbb{V}) = \mathbb{E}_1 \cup \mathbb{E}_2 \cup S_1 \cup S_2. \quad (4)$$

## 2 - دُ-بُعد، و نمایشِ مختلط

در دُ-بُعد، مختصاتِ دِکرتی ی متناظر با  $z$  را با  $(x, y)$  نشان میدهم:

$$z = x + iy. \quad (5)$$

مزدوج - مختلطِ  $\bar{z}$  را هم با  $\bar{z}$  نشان میدهم. از جمله،

$$\bar{z} = x - iy. \quad (6)$$

نمایشِ مختلط برای بردار چنین است.

$$\hat{x} \rightarrow 1. \quad (7)$$

$$\hat{y} \rightarrow i. \quad (8)$$

از جمله،

$$\partial_m = \frac{m + \bar{m}}{2} \partial_{\hat{x}} + \frac{m - \bar{m}}{2i} \partial_{\hat{y}}. \quad (9)$$

یا،

$$\partial_m = m \partial + \bar{m} \bar{\partial}. \quad (10)$$

که

$$\partial = \frac{1}{2} (\partial_{\bar{x}} - i \partial_{\bar{y}}). \quad (11)$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} (\partial_{\bar{x}} + i \partial_{\bar{y}}). \quad (12)$$

و البته،

$$\partial_{\bar{x}} = \partial + \bar{\partial}. \quad (13)$$

$$-i \partial_{\bar{y}} = \partial - \bar{\partial}. \quad (14)$$

به این ترتیب، یک نمایش لیلسی چنین است.

$$\Delta = 4 \partial \bar{\partial}. \quad (15)$$

$\partial$  مشتق-گیری نسبت به  $z$  (در  $\bar{z}$  ثابت)، و  $\bar{\partial}$  مشتق-گیری نسبت به  $\bar{z}$  (در  $z$  ثابت) است. متناظر با تابع همساز  $u$ ، تابع همساز  $v$  تعریف میشود، که به آن مزدوج همساز  $u$  میگویند:

$$\partial_{\bar{x}} u = \partial_{\bar{y}} v. \quad (16)$$

$$-\partial_{\bar{y}} u = \partial_{\bar{x}} v. \quad (17)$$

اینها معادلات کُشی-ریمان [4] اند. بر حسب  $\partial$  و  $\bar{\partial}$ ،

$$\partial u = i \partial v. \quad (18)$$

$$-\bar{\partial} u = i \bar{\partial} v. \quad (19)$$

تابع  $w$  را چنین تعریف میکنم.

$$w = u + i v. \quad (20)$$

معادلات کُشی-ریمان [4] چنین میشوند.

$$\bar{\partial} w = 0. \quad (21)$$

$$\partial \bar{w} = 0. \quad (22)$$

از معادلات کُشی-ریمان [4] نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
 (\partial_{\hat{x}} u)^2 + (\partial_{\hat{y}} u)^2 &= (\partial_{\hat{x}} u)^2 + (\partial_{\hat{x}} v)^2, \\
 &= (\partial_{\hat{x}} w) (\partial_{\hat{x}} \bar{w}), \\
 &= (\partial w + \bar{\partial} w) (\partial \bar{w} + \bar{\partial} \bar{w}), \\
 &= (\partial w) (\bar{\partial} \bar{w}).
 \end{aligned} \tag{23}$$

پس،

$$(\partial_{\hat{x}} u)^2 + (\partial_{\hat{y}} u)^2 = |\partial w|^2. \tag{24}$$

به هم ین ترتیب،

$$(\partial_{\hat{x}} v)^2 + (\partial_{\hat{y}} v)^2 = |\partial w|^2. \tag{25}$$

اینها را میشود چنین نوشت.

$$|\nabla u| = |\partial w|. \tag{26}$$

$$|\nabla v| = |\partial w|. \tag{27}$$

که،

$$\nabla = \hat{x} \partial_{\hat{x}} + \hat{y} \partial_{\hat{y}}. \tag{28}$$

همچنین،

$$\det \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = (\partial_{\hat{x}} u) (\partial_{\hat{y}} v) - (\partial_{\hat{x}} v) (\partial_{\hat{y}} u). \tag{29}$$

که، با استفاده از معادلات کُشی-ریمان [4]، نتیجه میدهد.

$$\det \frac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = |\partial w|^2. \tag{30}$$

عنصرِ مساحت را با  $(da)$  نشان می‌دهم:

$$da = (dx)(dy). \quad (31)$$

دیده میشود

$$(du)(dv) = \left| \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| (dx)(dy). \quad (32)$$

پس،

$$(du)(dv) = |\partial w|^2 (dx)(dy). \quad (33)$$

که یعنی،

$$da = \frac{(du)(dv)}{|\partial w|^2}. \quad (34)$$

با استفاده از معادلات کُشی-ریمان [4] مشتق  $w$  و  $\bar{w}$  را هم میشود چنین نوشت.

$$\partial w = \frac{dw}{dz}. \quad (35)$$

$$\bar{\partial} \bar{w} = \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}. \quad (36)$$

و البته،

$$\bar{\partial} \bar{w} = \overline{(\partial w)}. \quad (37)$$

عنصرِ طول را با  $(d\ell)$  نشان می‌دهم:

$$d\ell = |dz|. \quad (38)$$

دیده میشود

$$|dw| = |\partial w| |dz|. \quad (39)$$

که یعنی،

$$d\ell = \frac{|dw|}{|\partial w|}. \quad (40)$$

### 3 معادله و شرایطِ مرزی

شرط - مرزی ی (2) چنین است.

$$(m \partial u + \bar{m} \bar{\partial} u)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{S}_j. \quad (41)$$

معادله ی (3) این است که  $u$  (درون  $\mathbb{V}$ ) همساز است. پس  $u$  یک مزدوج - همساز دارد. مزدوج - همساز  $u$  را با  $v$  نشان میدهم. با استفاده از معادلات گُشی-ریمان [4]، شرط - مرزی ی (41) چنین میشود.

$$(n \partial v + \bar{n} \bar{\partial} v)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{S}_j. \quad (42)$$

که،

$$n = i m. \quad (43)$$

رابطه ی (42) یعنی

$$(\partial_n v)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{S}_j. \quad (44)$$

رابطه ی (43) هم یعنی  $n$  بر  $m$  عمود است، پس  $n$  بر  $\mathbb{S}_j$  مماس است. به این ترتیب، (44) یعنی  $v$  بر  $\mathbb{S}_j$  ثابت است. پس شرط - مرزی ی (2) همثرز است با این که  $v$  بر هر یک از کنارها ثابت است:

$$v(z) = v_j, \quad z \in \mathbb{S}_j. \quad (45)$$

معادله ی (3) هم چنین میشود.

$$(\partial \bar{\partial} u)(z) = 0, \quad z \in \mathbb{V}. \quad (46)$$

## 4 بار و ظرفیت

(اندازه ی) بار-بر-طول بر الکترو دِ  $z$  را با  $q_j$  نشان می‌دهم.  $q_j$  تقسیم بر  $\varepsilon$  (پذیرفتاری) انتگرالِ اندازه ی میدانِ الکتریکی بر  $\mathbb{E}_j$  است:

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{E}_j} (d\ell) |\nabla u|. \quad (47)$$

که، با استفاده از (26)، چنین میشود.

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{E}_j} (d\ell) |\partial w|. \quad (48)$$

یا، با استفاده از (40)،

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\tilde{\mathbb{E}}_j} |dw|. \quad (49)$$

$\tilde{\mathbb{E}}_j$  تصویرِ  $\mathbb{E}_j$  در صفحه ی  $w$  است.  $u$  بر  $\mathbb{E}_j$  (یا تصویرِ  $\tilde{\mathbb{E}}_j$ ) ثابت است. پس،

$$dw = i dv, \quad z \in \mathbb{E}_j. \quad (50)$$

و (49) چنین میشود.

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \int_{\tilde{\mathbb{E}}_j} |dv|. \quad (51)$$

$v$  بر  $\mathbb{E}_j$ ، از یک سر تا سرِ دیگر، یکنوا تغییر میکند. پس

$$\frac{q_j}{\varepsilon} = \Delta v. \quad (52)$$

که  $(\Delta v)$  اختلافِ مقادارها ی  $v$  در دُ-سرِ  $\mathbb{E}_j$  است، که هم ان اختلافِ مقادارها ی  $v$  در  $\mathbb{S}_1$  و  $\mathbb{S}_2$  است:

$$\Delta v = |v_2 - v_1|. \quad (53)$$

از جمله دیده میشود اندازه ی بار-بر-طول، در الکتُردها ی 1 و 2 یکسان است:

$$q_2 = q_1. \quad (54)$$

این مقدارِ مشترک را با  $q$  نشان میدهیم:

$$\frac{q}{\varepsilon} = \Delta v. \quad (55)$$

به  $q$  بار-بر-طولِ خازن میگوییم. ظرفیت-بر-طولِ خازن را با  $c$  نشان میدهیم. ظرفیت-بر-طولِ خازن برابر است با بار-بر-طولِ خازن تقسیم بر اختلاف-پتانسیلِ الکتُردها ی خازن:

$$c = \frac{q}{\Delta u}. \quad (56)$$

که،

$$\Delta u = |u_2 - u_1|. \quad (57)$$

به این ترتیب،

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{\Delta v}{\Delta u}. \quad (58)$$

## 5 انرژی و ظرفیت

انرژی-بر-طول را با  $h$  نشان میدهیم.  $h$  تقسیم بر  $(\varepsilon/2)$  انتگرالِ مجذورِ اندازه ی میدانِ الکتریکی بر  $\mathbb{V}$  است:

$$\frac{2h}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{V}} (da) |\nabla u|^2. \quad (59)$$

که، با استفاده از (26)، چنین میشود.

$$\frac{2h}{\varepsilon} = \int_{\mathbb{V}} (da) |\partial w|^2. \quad (60)$$



یا، با استفاده از (34)،

$$\frac{2h}{\varepsilon} = \int_{\tilde{V}} (du)(dv). \quad (61)$$

$\tilde{V}$  تصویر  $\mathbb{V}$  در صفحه  $w$  است. و (61) چنین میشود.

$$\frac{2h}{\varepsilon} = (\Delta u)(\Delta v). \quad (62)$$

ظرفیت - بر - طول خازن برابر است با  $\Delta$  - برابر انرژی - بر - طول خازن تقسیم بر مجذور اختلاف - پتانسیل الکترونها  $\Delta$  خازن:

$$c = \frac{2h}{(\Delta u)^2}. \quad (63)$$

به این ترتیب،

$$\frac{c}{\varepsilon} = \frac{(\Delta u)(\Delta v)}{(\Delta u)^2}. \quad (64)$$

که هم ان (58) است.

## 6 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «نگاشت همدیس و مسئله ی پُوسُن در دو بُعد» (2010/05/27) X1-068

[2] محمد خرمی؛ «مسئله ی دیریکله برا ی قرص، با استفاده از نگاشت همدیس»

X1-143 (2019/10/21)

[3] Laplace

[4] Cauchy-Riemann