X1-155 (2021/04/24)

چگالی یِ احتمال، و تابعِ مولد I

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

چگالی یِ احتمال، مقدارِ چشمداشتی، و گشتاورها بررسی میشوند. تابعِ مولد و لگاریتمِ آن معرفی میشوند. دُ سادِترین-حالت، تُزیعِ تعینی و تُزیعِ گاؤسی، به عنوانِ مثال بررسی میشوند.

1 چگالی یِ احتمال

چگالی یِ احتمال برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با ρ_x نشان میدهم. البته ممکن است x گسسته باشد. در این صورت

$$\rho_x(\xi) = \sum_a P_a\,\delta(\xi - \xi_a). \tag{1}$$

که ξ_a ها مقدارها یِ ممکن برا یِ x یَند، و P_a احتمالِ این که x برابر با ξ_a شود. در حالتِ کلی (برا یِ x ی که پیوسته یا گسسته است)

$$\rho_x(\xi) = \langle \delta(\xi - x)\rangle. \tag{2}$$

که $\langle f(x)\rangle$، مقدارِ چشمداشتی یِ $[f(x)]$، چنین تعریف میشود.

$$\langle f(x)\rangle = \int \mathrm{d}\,\xi\,\rho_x(\xi)\,f(\xi). \tag{3}$$

از این پس فرض میکنم متغیر- ِ-تصادفیها یی که با آنها کار میکنم اسکالر َند و مقدارها یِ شان حقیقی ست. میانگینِ x را با $[\mu(x)]$ و وردایی یِ x را با $[V(x)]$ نشان میدهم:

$$\mu(x) = \langle x\rangle. \tag{4}$$

$$V(x) = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle. \tag{5}$$

یا،

$$V(x) = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2. \tag{6}$$

2 تابعِ مولد

تابعِ مولد برا یِ متغیرِ تصادفی یِ x را با Z_x نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$Z_x(u) = \langle \exp(u\,x)\rangle. \tag{7}$$

یعنی،

$$Z_x(u) = \int \mathrm{d}\,\xi\,\rho_x(\xi)\;\exp(u\,\xi). \tag{8}$$

در حالتِ کلی متغیرِ u مختلط است، و انتگرالِ طرفِ راستِ (8) به ازا یِ u در یک نوارِ عمودی در صفحه یِ مختلط همگرا ست، و Z_x درونِ این نوار تمام-ریخت است.

مبدَل- ِ-لَپلَس [1] ِ ρ_x را با $(\mathfrak{L}\,\rho_x)$، و مبدَل- ِ-فوریه [2] یِ ρ_x را با $(\mathfrak{F}\,\rho_x)$ نشان میدهم:

$$(\mathfrak{L}\,\rho_x)(u) = \int \mathrm{d}\,\xi\,\rho_x(\xi)\;\exp(-u\,\xi). \tag{9}$$

$$(\mathfrak{F}\,\rho_x)(k) = \int \mathrm{d}\,\xi\,\rho_x(\xi)\;\exp(-\mathrm{i}\,k\,\xi). \tag{10}$$

دیده میشود

$$(\mathfrak{L}\,\rho_x)(u) = Z_x(-u). \tag{11}$$

$$(\mathfrak{F}\,\rho_x)(u) = Z_x(-\mathrm{i}\,k). \tag{12}$$

البته در تعریفِ تابع- ِ-مولد و مبدَلها، قراردادها یِ مختلف ی به کار میرود. این قراردادها در بودن یا نبودنِ علامتِ منفی برا یِ متغیر، و در بودن یا نبودنِ توانها یی از $(2\,\pi)$ با هم فرق دارند.

چگالی-یِ-احتمال نامنفی ست، و

$$\int \mathrm{d}\xi\,\rho_x(\xi) = 1. \tag{13}$$

از اینها نتیجه میشود محورِ مُهومی در ناحیه یِ همگرایی تابع- ِ-مولد است. پس مبدل- ِ-فوریه [2] یِ چگالی-یِ-احتمال خُش-تعریف است. از جمله، چگالی-یِ-احتمال بر حسبِ تابع- ِ-مولد چنین میشود.

$$\rho_x(\xi) = \int \frac{\mathrm{d}\,k}{2\,\pi}\,Z_x(-\mathrm{i}\,k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x). \tag{14}$$

دیده میشود

$$(\mathrm{D}^m\,Z_x)(0) = \mu_m(x). \tag{15}$$

که $\mu_m(x)$ گشتاورِ m اُمِ x است:

$$\mu_m(x) = \langle x^m\rangle. \tag{16}$$

از جمله،

$$\mu_0 = 1. \tag{17}$$

$$\mu_1 = \mu. \tag{18}$$

$$\mu_2 = V + \mu^2. \tag{19}$$

لگاریتمِ تابع- ِ-مولد را با W نشان میدهم:

$$W_x = \ln\, Z_x. \tag{20}$$

به W_x همبند-مولدِ x میگویم. مشتقِ mاُمِ W_x در 0 را با $c_m(x)$ نشان میدهم:

$$(\mathrm{D}^m\, W_x)(0) = c_m(x). \tag{21}$$

به $c_m(x)$ همبند-گشتاورِ mاُمِ x میگویم. رُشن است که $[c_1(x), \ldots, c_m(x)]$ تابع ی وارون-پذیر از $[\mu_1(x), \ldots, \mu_m(x)]$ است. از جمله دیده میشود

$$c_0 = 0. \tag{22}$$

$$c_1 = \mu. \tag{23}$$

$$c_2 = V. \tag{24}$$

یک انگیزه برا یِ اسمِ همبند، این نمایش برا یِ گشتاورها ست. c_m را با چیز ی یک-پارچه (همبند) با m پا یِ یکسان نظیر میکنم. یعنی به یک-پارچه ای با m پا عددِ c_m را نسبت میدهم. به یک بسته یِ $\mathfrak{b}$ شاملِ تعداد ی از این یک-پارچِها عددِ $\nu_{\mathfrak{b}}$ را نسبت میدهم، که برابر است با حاصل- ِ-ضربِ عددها یِ متناظر با اجزا یِ بسته. یک بسته ممکن است از یک ی از یک-پارچِها بیش از یک تا داشته باشد، یا اصلَن نداشته باشد:

$$\nu_{\mathfrak{b}} = \prod_m (c_m)^{\mathfrak{b}_m}. \tag{25}$$

که $\mathfrak{b}_m$ تعدادِ یک-پارچِها یِ m پایی در بسته یِ $\mathfrak{b}$ است. تعدادِ پاها یِ بسته یِ $\mathfrak{b}$ را با $\mathfrak{l}_{\mathfrak{b}}$ نشان میدهم. رُشن است که

$$\mathfrak{l}_{\mathfrak{b}} = \sum_m m\, \mathfrak{b}_m. \tag{26}$$

مجموعه یِ بستِها یی که j پا دارند را با $\mathbb{B}_j$ نشان میدهم:

$$\mathbb{B}_j = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{l}_{\mathfrak{b}} = j\}. \tag{27}$$

$\mathfrak{z}_j$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathfrak{z}_j = \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\in\mathbb{B}_j} \mathfrak{n}_{\mathfrak{b}}\, \nu_{\mathfrak{b}}. \tag{28}$$

جمع-بندی بر $\mathbb{B}_j$ است، و $\mathfrak{n}_{\mathfrak{b}}$ تعدادِ حالتها یی ست که پاها یِ بسته یِ $\mathfrak{b}$ بینِ یک-پارچها یِ سازنده یِ آن تُزیع شده اند؛ به این شکل که پاها یِ درونِ یک یک-پارچه از-هم-تشخیص-ناپذیر َند، و یک-پارچها یِ با تعداد-ِ-پا-یِ-یکسان هم از-هم-تشخیص-ناپذیر َند. به این ترتیب،

$$\mathfrak{n}_{\mathfrak{b}} = (\mathfrak{l}_{\mathfrak{b}})! \prod_m \frac{1}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{29}$$

از اینجا،

$$\frac{\mathfrak{z}_j}{j!} = \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\in\mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{30}$$

دُ-طرف را در u^j ضرب میکنم. با استفاده از (26) و (27)، نتیجه میشود

$$\frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\in\mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m\, u^m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{31}$$

این هم نتیجه میدهد

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \sum_j \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\in\mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m\, u^m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{32}$$

یا،

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \sum_{\mathfrak{b}} \prod_m \frac{(c_m\, u^m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{33}$$

هر $\mathfrak{b}$ با $\mathfrak{b}_m$ ها مشخص میشود. جمع-بندی یِ طرف-ِ-راست بر $\mathfrak{b}$ نامقید است. پس میشود در آن جمع-بندی بر $\mathfrak{b}_m$ ها را مستقل از هم انجام داد. و رابطه یِ (33) چنین میشود.

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \prod_m \sum_{\mathfrak{b}_m} \frac{(c_m\, u^m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{34}$$

به این ترتیب،

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \prod_m \exp\left(\frac{c_m\, u^m}{m!}\right). \tag{35}$$

یا،

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \exp\left(\sum_m \frac{c_m\, u^m}{m!}\right). \tag{36}$$

از (21) دیده میشود

$$W(u) = \sum_m \frac{c_m\, u^m}{m!}. \tag{37}$$

پس،

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = \exp[W(u)]. \tag{38}$$

یعنی،

$$\sum_j \frac{\mathfrak{z}_j\, u^j}{j!} = Z(u). \tag{39}$$

از (15) دیده میشود

$$Z(u) = \sum_m \frac{\mu_m\, u^m}{m!}. \tag{40}$$

پس،

$$\mathfrak{z}_j = \mu_j. \tag{41}$$

یعنی $\mathfrak{z}$ هم ان μ است. و رابطه یِ (30) هم ان رابطه یِ μ_j بر حسبِ c_m ها ست:

$$\frac{\mu_j}{j!} = \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{b}\in\mathbb{B}_j} \prod_m \frac{(c_m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{42}$$

و البته بزرگترین m ی که در طرفِ راست ظاهر میشود هم ان j است: μ_j تابع ی از c_1 تا c_j است.

3 انتقالِ متغیر- ِ-تصادفی

انتقال به اندازه یِ a را با T_a نشان میدهم:

$$\mathsf{T}_a(x) = x + a. \tag{43}$$

از (2) دیده میشود

$$\rho_{\mathsf{T}_a(x)}(\xi) = \langle \delta(x + a - \xi) \rangle. \tag{44}$$

که نتیجه میدهد

$$\rho_{\mathsf{T}_a(x)}(\xi) = \rho(x - a). \tag{45}$$

از (7) هم نتیجه میشود

$$Z_{\mathsf{T}_a(x)}(u) = \exp(a\,u)\, Z_x(u). \tag{46}$$

و از این، همراه با (20)،

$$W_{\mathsf{T}_a(x)}(u) = a\,u + W_x(u). \tag{47}$$

یک حالتِ خاص، انتقال به اندازه یِ $(-\langle x \rangle)$ است. کمیتها یِ متناظر با متغیر- ِ-تصادفی یِ $(x - \langle x \rangle)$ را با پریم نشان میدهم:

$$\rho'_x(\xi) = \rho_x(\xi + \langle x \rangle). \tag{48}$$

$$Z'_x(u) = \exp(-\langle x \rangle\, u)\, Z_x(u). \tag{49}$$

$$W'_x(u) = -\langle x \rangle\, u + W_x(u). \tag{50}$$

$$\mu'_m(x) = \mu_m(x - \langle x \rangle). \tag{51}$$

$$c'_m(x) = c_m(x - \langle x \rangle). \tag{52}$$

رُشن است که

$$(x+a)-\langle x+a\rangle = x-\langle x\rangle. \tag{53}$$

پس کمیتها یِ پریم-دار، برا یِ یک متغیر و انتقال-یافته یِ آن یکسان‌َند.

به (همبند-)گشتاورِ m اُم ِ $(x-\langle x\rangle)$ (همبند-)انحرافِ m اُم ِ x میگویم. از (21) و (50) دیده میشود

$$c_m = c'_m + \mu\,\delta^1_m. \tag{54}$$

به این ترتیب همبند-گشتاورها یِ x هم ان همبند-انحرافها یِ x اند، جز همبند-گشتاورِ اول. از جمله،

$$c'_1 = 0. \tag{55}$$

$$V' = V. \tag{56}$$

انحرافها یِ x هم، مثلِ (42)، بر حسبِ همبند-انحرافها یِ x چنین میشوند.

$$\frac{\mu'_j}{j!} = \sum_{\mathfrak{b}}^{\mathbb{B}_j}\prod_m \frac{(c'_m)^{\mathfrak{b}_m}}{\mathfrak{b}_m!\,(m!)^{\mathfrak{b}_m}}. \tag{57}$$

4 حالتها یِ خاص

رابطه یِ گشتاورها بر حسبِ همبند-گشتاورها، (42) یا (57)، هر چه تعدادِ همبند-گشتاورها یِ ناصفر کمتر باشد سادِتر میشود.

4.1 تُزیعِ تعینی

سادِترین حالت این است که همه یِ همبند-انحرافها یِ x صفرَند:

$$c'_m = 0. \tag{58}$$

$$W'(u) = 0. \tag{59}$$

$$Z'(u) = 1. \tag{60}$$

$$\mu'_m = \delta^0_m. \tag{61}$$

$$\rho'(\xi) = \delta(\xi). \tag{62}$$

همچنین،

$$c_m = \mu\,\delta^1_m. \tag{63}$$

$$W(u) = \mu\,u. \tag{64}$$

$$Z(u) = \exp(\mu\,u). \tag{65}$$

$$\mu_m = \mu^m. \tag{66}$$

$$\rho(\xi) = \delta(\xi - \mu). \tag{67}$$

این حالت متناظر با یک تُزیعِ تعینی ست: مقدارِ متغیرِ تصادفی μ است، که هم ان میانگینِ متغیر-ِ-تصادفی ست. و البته همه یِ انحرافها صفرَند.

4.2 تُزیعِ گاؤسی

همبند-انحرافِ اولِ هر متغیر-ِ-تصادفی یی صفر است. سادِترین حالت بعد از تُزیعِ تعینی این است که همبند-انحرافِ دوم ناصفر است، و بقیه یِ همبند-انحرافها صفرَند:

$$c'_m = V\,\delta^2_m. \tag{68}$$

$$W'(u) = \frac{V\,u^2}{2}. \tag{69}$$

$$Z'(u) = \exp\left(\frac{V\,u^2}{2}\right). \tag{70}$$

$$\mu'_{2\,\ell} = \frac{(2\,\ell)!\,V^\ell}{2^\ell\,\ell!}. \tag{71}$$

$$\mu'_{2\,\ell+1} = 0. \tag{72}$$

$$\rho'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\,V}\right). \tag{73}$$

همچنین،

$$c_m = \mu\,\delta^1_m + V\,\delta^2_m. \tag{74}$$

$$W(u) = \mu\,u + \frac{V\,u^2}{2}. \tag{75}$$

$$Z(u) = \exp\left(\mu\,u + \frac{V\,u^2}{2}\right). \tag{76}$$

$$\mu_m = \sum_{\ell}^{m/2} \frac{m!}{2^\ell\,\ell!\,(m-2\,\ell)!}\,V^\ell\,\mu^{m-2\,\ell}. \tag{77}$$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,V}}\,\exp\left[-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\,V}\right]. \tag{78}$$

این حالت متناظر با یک تُزیعِ گاؤسی ست.

5 پانوشتها

[1] Laplace

[2] Fourier