X1-153 (2021/01/27)

زمانِ پویشِ آزادِ میانگین، طولِ پویشِ آزادِ میانگین

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

میانگین-گیریها یِ لازم برا یِ محاسبه یِ زمان و طولِ پویشِ آزادِ میانگین در گازها یِ نزدیک-به-کامل دقیقتر بررسی میشوند و ضریبها یِ عددی یِ بی-بُعد ی که در عبارتها ظاهر میشوند محاسبه میشوند.

0 درامد

τ (زمانِ پویشِ آزادِ میانگین) میانگینِ زمانِ بینِ دُ برخُردِ متوالی یِ یک ذره است. λ (طولِ پویشِ آزادِ میانگین) میانگینِ مسافت ی ست که یک ذره بینِ دُ برخُردِ متوالی میپیماید. کمیتها یی که انتظار میرود بر زمان و طولِ پویشِ آزادِ میانگین مئثر باشند چگالی (تعدادِ ذرات بر حجم)، مقطعِ برخُرد، و یک سرعت-ِ نُعی یَند. چگالی را با n، مقطعِ برخُرد را با σ، و سرعتِ نُعی را با $\mathfrak{v}$ نشان میدهم. با این کمیتها و با استفاده از تحلیلِ بُعدی، میشود تخمینها یی برا یِ زمان و طولِ پویشِ آزادِ میانگین به

دست آورد:

$$\tau = \frac{c_1}{n\,\sigma\,\mathfrak{v}}. \tag{1}$$

$$\lambda = \frac{c_2}{n\,\sigma}. \tag{2}$$

c_1 و c_2 ثابتها یی بی-بُعد، و لابد از مرتبه یِ یک‌َند. (نَ خیلی کوچک‌َند و نَ خیلی بزرگ‌َند.) میمانَد تعیینِ $\mathfrak{v}$ و محاسبه یِ c_1 و c_2. البته رُشن است که $\mathfrak{v}$ و c_1 دُ پارامترِ مستقل نیستند. میشود یک ی را انتخاب و دیگری را محاسبه کرد. مثلَن میشود $\mathfrak{v}$ را میانگینِ اندازه یِ سرعتِ ذرات انتخاب کرد.

1 برخُرد با ذراتِ ساکن

گیرم یک ذره با سرعتِ $\boldsymbol{v}$ حرکت میکند و بقیه یِ ذرات ساکن‌َند. طیِ زمانِ t، ذره یِ متحرک با ذرات ی برخُرد میکند که درونِ یک استوانه اند که مساحتِ قاعده اَ ش σ و ارتفاعَ ش $(|\boldsymbol{v}|\,t)$ است. تعدادِ برخُردها یِ این ذره طیِ زمانِ t را با $N(t)$ نشان میدهم. $N(t)$ برابر است با تعدادِ ذرات ی که درونِ این استوانه اند:

$$N(t) = n\,\sigma\,|\boldsymbol{v}|\,t. \tag{3}$$

τ (میانگینِ زمانِ بینِ دُ برخُردِ متوالی) چنین میشود

$$\tau = \frac{t}{N(t)}. \tag{4}$$

یعنی،

$$\tau = \frac{1}{n\,\sigma\,|\boldsymbol{v}|}. \tag{5}$$

مسافت ی که ذره طیِ زمانِ t میپیماید را با $L(t)$ نشان میدهم. دیده میشود

$$L(t) = |\boldsymbol{v}|\,t. \tag{6}$$

λ (میانگینِ مسافت ی که ذره بینِ دُ برخُردِ متوالی میپیماید) چنین میشود

$$\lambda = \frac{L(t)}{N(t)}. \tag{7}$$

یا،

$$\lambda = |\boldsymbol{v}|\, \tau. \tag{8}$$

به این ترتیب،

$$\lambda = \frac{1}{n\, \sigma}. \tag{9}$$

2 برخُرد با ذراتِ متحرک

در واقعیت چنین نیست که یک ذره متحرک و بقیه یِ ذرات ساکن باشند. بردارِ سرعتِ ذره یِ برخُرد-کننده را با $\boldsymbol{v}_1$، بردارِ سرعتِ یک ذره یِ هدف را با $\boldsymbol{v}_2$، و بردارِ سرعتِ ذره یِ برخُرد-کننده نسبت به ذره یِ هدف را با $\boldsymbol{v}_{\rm rel}$ نشان میدهم:

$$\boldsymbol{v}_{\rm rel} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2. \tag{10}$$

روابطِ (4) و (7) تغییر نمیکنند. برا یِ بقیه یِ روابطِ از (3) تا (9)،

$$N(t) = n\, \sigma\, |\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\, t. \tag{11}$$

$$\tau = \frac{1}{n\, \sigma\, |\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}. \tag{12}$$

$$L(t) = |\boldsymbol{v}_1|\, t. \tag{13}$$

$$\lambda = |\boldsymbol{v}_1|\, \tau. \tag{14}$$

به این ترتیب،

$$\lambda = \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{n\, \sigma\, |\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}. \tag{15}$$

روابط ِ (12) و (15) را میشود چنین نوشت.

$$\tau = \frac{1}{n\,\sigma\,|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}. \tag{16}$$

$$\lambda = \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{n\,\sigma\,|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}. \tag{17}$$

3 تُزیع ِ سرعت

سرعت ِ ذرات یکسان نیست. پس شکل ِ درست ِ روابط ِ (12) و (16)، و (15) و (17) چنین است.

$$\tau = \frac{1}{n\,\sigma}\,\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle. \tag{18}$$

$$\tau = \frac{1}{n\,\sigma}\,\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\right\rangle. \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{1}{n\,\sigma}\,\left\langle\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle. \tag{20}$$

$$\lambda = \frac{1}{n\,\sigma}\,\left\langle\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\right\rangle. \tag{21}$$

چگالی یِ احتمال برا یِ سرعت ِ یک ذره را با ρ نشان میدهم. برا یِ یک گاز ِ کامل در دما یِ معین و با ذرات یِ نانسبیتی،

$$\rho(\boldsymbol{u}) = (2\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}{2\,s^2}\right). \tag{22}$$

دیده میشود

$$3\,s^2 = \langle\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\rangle. \tag{23}$$

همچنین،

$$s = \sqrt{\frac{k_{\rm B}\,T}{m}}. \tag{24}$$

که m جرم ِ هر ذره است و T دما ست.

سرعتها یِ دُ ذره مستقل از همَند. یعنی

$$\rho_{1\,2}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \rho_1(\boldsymbol{u}_1)\,\rho_2(\boldsymbol{u}_2). \tag{25}$$

که $\rho_{1\,2}$ چگالی یِ احتمال برا یِ سرعتها یِ ذرات ِ 1 و 2، و ρ_j چگالی یِ احتمال برا یِ سرعت ِ ذره یِ j است. البته

$$\rho_j = \rho. \tag{26}$$

پس،

$$\rho_{1\,2}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \rho(\boldsymbol{u}_1)\,\rho(\boldsymbol{u}_2). \tag{27}$$

چگالی یِ احتمال برا یِ سرعت ِ ذره یِ 1 و سرعت ِ نسبی (سرعت ِ ذره یِ 1 نسبت به ذره یِ 2) را با $\rho_{1\,\mathrm{rel}}$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})\,\mathrm{d}^3\,u_1\,\mathrm{d}^3\,u_{\mathrm{rel}} = \rho_{1\,2}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)\,\mathrm{d}^3\,u_1\,\mathrm{d}^3\,u_2. \tag{28}$$

اما،

$$\left|\det\frac{\partial\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})}{\partial\,(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)}\right| = 1. \tag{29}$$

پس،

$$\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) = \rho_{1\,2}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2). \tag{30}$$

یعنی،

$$\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) = (2\,\pi\,s^2)^{-3}\,\exp\left[-\frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})\cdot(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})}{2\,s^2}\right]. \tag{31}$$

یا،

$$\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) = (2\,\pi\,s^2)^{-3}\,\exp\left(-\frac{2\,\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1 - 2\,\boldsymbol{u}_1\cdot\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}} + \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}}{2\,s^2}\right). \tag{32}$$

با انتگرال-گیری از $\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})$ بر $\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}$ چگالی یِ احتمال برا یِ سرعت ِ ذره یِ 1 به دست میئاید:

$$\rho_1(\boldsymbol{u}_1) = \int \mathrm{d}^3\,u_{\mathrm{rel}}\,\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}). \tag{33}$$

که، با استفاده از (32) یا (31)، نتیجه میدهد

$$\rho_1(\boldsymbol{u}_1) = (2\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}{2\,s^2}\right). \tag{34}$$

این یعنی

$$\rho_1 = \rho. \tag{35}$$

که البته عجیب نیست: هم ان (26) است. با انتگرال-گیری از $\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})$ بر $\boldsymbol{u}_1$ هم چگالی یِ احتمال برا یِ سرعتِ نسبی به دست میئاید:

$$\rho_{\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) = \int \mathrm{d}^3\,u_1\,\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}). \tag{36}$$

که، با استفاده از (32)، نتیجه میدهد

$$\rho_{\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) = (4\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}}{4\,s^2}\right). \tag{37}$$

دیده میشود

$$\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}) \neq \rho_1(\boldsymbol{u}_1)\,\rho_{\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}). \tag{38}$$

سرعتِ ذره یِ 1 و (سرعتِ ذره یِ 1 نسبت به ذره یِ 2) مستقل از هم نیستند.

4 میانگینها

زمانِ پویش-ِ-آزاد-ِ-میانگین از (18) به دست میئاید. متناظر با زمانِ پویشِ آزادِ میانگین، $\tilde{\tau}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{n\,\sigma}\,\frac{1}{\langle|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|\rangle}. \tag{39}$$

فرقِ این با (18) از فرقِ مقدار-ِ-چشمداشتی یِ $\langle\mathfrak{X}\rangle^{-1}$ با $\langle\mathfrak{X}^{-1}\rangle$ میئاید، که حالتِ خاص ی از فرقِ $\mathfrak{f}(\langle\mathfrak{X}\rangle)$ با $\langle\mathfrak{f}(\mathfrak{X})\rangle$ است.

$$\langle|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|\rangle = \int \mathrm{d}^3\,u_{\mathrm{rel}}\,\rho_{\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})\,|\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}|. \tag{40}$$

که، با استفاده از (37)، میشود

$$\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle = (4\,\pi\,s^2)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3\,u_{\rm rel}\,|\boldsymbol{u}_{\rm rel}|\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{u}_{\rm rel}}{4\,s^2}\right). \tag{41}$$

به این ترتیب،

$$\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle = (4\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,(4\,\pi)\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}^3\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{u}^2}{4\,s^2}\right). \tag{42}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,s. \tag{43}$$

به هم ین ترتیب،

$$\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle = (4\,\pi\,s^2)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3\,u_{\rm rel}\,\frac{1}{|\boldsymbol{u}_{\rm rel}|}\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}_{\rm rel}\cdot\boldsymbol{u}_{\rm rel}}{4\,s^2}\right). \tag{44}$$

پس،

$$\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle = (4\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,(4\,\pi)\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{u}^2}{4\,s^2}\right). \tag{45}$$

که نتیجه میدهد

$$\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{s}. \tag{46}$$

از جمله،

$$\frac{1}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} = \frac{\pi}{4}\,\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle. \tag{47}$$

دیده میشود

$$\frac{1}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} \neq \left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|}\right\rangle. \tag{48}$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{n\,\sigma\,s}. \tag{49}$$

$$\tilde{\tau} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{1}{n\,\sigma\,s}. \tag{50}$$

طولِ پویش- ِ-آزاد- ِ-میانگین از (20) به دست میئاید. متناظر با طولِ پویشِ آزادِ میانگین، λ' و $\tilde{\lambda}'$ را چنین تعریف میکنم.

$$\lambda' = \frac{1}{n\,\sigma}\,\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle\,\left\langle\frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}\right\rangle. \tag{51}$$

$$\tilde{\lambda}' = \frac{1}{n\,\sigma}\,\frac{\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle}{\langle|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|\rangle}. \tag{52}$$

فرقِ (51) با (20) از فرقِ مقدار- ِ-چشمداشتی یِ $[\langle\mathfrak{f}(\mathfrak{X})\rangle\langle\mathfrak{g}(\mathfrak{Y})\rangle]$ با $\langle[\mathfrak{f}(\mathfrak{X})]\,[\mathfrak{g}(\mathfrak{Y})]\rangle$ میئاید. فرقِ (52) با (20) هم، علاوه بر این از فرقِ $\langle\mathfrak{X}\rangle^{-1}$ با $\langle\mathfrak{X}^{-1}\rangle$ میئاید.

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle = \int \mathrm{d}^3\,u_1\,\rho_1(\boldsymbol{u}_1)\,|\boldsymbol{u}_1|. \tag{53}$$

که، با استفاده از (34)، میشود

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle = (2\,\pi\,s^2)^{-3/2}\int \mathrm{d}^3\,u_1\,|\boldsymbol{u}_1|\,\exp\left(-\frac{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}{2\,s^2}\right). \tag{54}$$

به این ترتیب،

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle = (2\,\pi\,s^2)^{-3/2}\,(4\,\pi)\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}^3\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{w}^2}{2\,s^2}\right). \tag{55}$$

که نتیجه میدهد

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\pi}}\,s. \tag{56}$$

همچنین،

$$\left\langle\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}\right\rangle = \int \mathrm{d}^3\,u_1\,\mathrm{d}^3\,u_{\mathrm{rel}}\,\rho_{1\,\mathrm{rel}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}})\,\frac{|\boldsymbol{u}_1|}{|\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}|}. \tag{57}$$

که، با استفاده از (32)، میشود

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|}\right\rangle &= (2\,\pi\,s^2)^{-3}\int \mathrm{d}^3\,u_1\,\mathrm{d}^3\,u_{\mathrm{rel}}\,\frac{|\boldsymbol{u}_1|}{|\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}|}\\ &\quad\exp\left(-\frac{2\,\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1-2\,\boldsymbol{u}_1\cdot\,\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}+\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}\cdot\boldsymbol{u}_{\mathrm{rel}}}{2\,s^2}\right).\end{aligned} \tag{58}$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}|} \right\rangle &= (2\,\pi\,s^2)^{-3}\,(4\,\pi)\,(2\,\pi)\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{w}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{u}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}\,\zeta\,\mathfrak{w}^3\,\mathfrak{u} \\
&\quad \exp\left(-\frac{2\,\mathfrak{w}^2-2\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}\,\zeta+\mathfrak{u}^2}{2\,s^2}\right), \\
&= \frac{1}{\pi\,s^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{w}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{w}^2\,\exp\left(-\frac{2\,\mathfrak{w}^2+\mathfrak{u}^2}{2\,s^2}\right) \\
&\quad \left[\exp\left(\frac{\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}}{s^2}\right)-\exp\left(-\frac{\mathfrak{w}\,\mathfrak{u}}{s^2}\right)\right], \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi\,s^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{w}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{w}^2\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{w}^2+\mathfrak{x}^2}{s^2}\right) \\
&\quad \left[\exp\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}}{s^2}\right)-\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}}{s^2}\right)\right], \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi\,s^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{w}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{x}\,\frac{\mathfrak{w}^2+\mathfrak{x}^2}{2}\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{w}^2+\mathfrak{x}^2}{s^2}\right) \\
&\quad \left[\exp\left(\frac{\sqrt{2}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}}{s^2}\right)-\exp\left(-\frac{\sqrt{2}\,\mathfrak{w}\,\mathfrak{x}}{s^2}\right)\right], \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\pi\,s^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{r}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\,\frac{\mathfrak{r}^3}{2}\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{r}^2}{s^2}\right) \\
&\quad \left\{\exp\left[\frac{\mathfrak{r}^2\,\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}\,s^2}\right]-\exp\left[-\frac{\mathfrak{r}^2\,\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}\,s^2}\right]\right\}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}\,\pi\,s^4}\int_0^\infty \mathrm{d}\,\mathfrak{y}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\,\mathfrak{y}\,\exp\left(-\frac{\mathfrak{y}}{s^2}\right) \\
&\quad \left\{\exp\left[\frac{\mathfrak{y}\,\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}\,s^2}\right]-\exp\left[-\frac{\mathfrak{y}\,\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}\,s^2}\right]\right\}, \\
&= \frac{1}{\sqrt{8}\,\pi}\left\{\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\,\left[1-\frac{\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}}\right]^{-2}\right. \\
&\quad \left.-\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\,\left[1+\frac{\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}}\right]^{-2}\right\}. \qquad (59)
\end{aligned}
$$

تعریف میکنم

$$
I(a)=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\,\theta\,\left[\frac{\sin(2\,\theta)}{\sqrt{2}}-a\right]^{-1}. \qquad (60)
$$

به این ترتیب،

$$\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}\,\pi}\,[I'(1) - I'(-1)]. \tag{61}$$

که $\mathfrak{X}'$ مشتقِ $\mathfrak{X}$ است. دیده میشود

$$\begin{aligned} I(a) &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sin(2\,\theta) - \sqrt{2}\,a},\\ &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\,\theta\,(1+\tan^2\theta)}{a\,(1+\tan^2\theta) - \sqrt{2}\,\tan\theta},\\ &= -\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,\mathfrak{s}}{a\,(1+\mathfrak{s}^2) - \sqrt{2}\,\mathfrak{s}},\\ &= -\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2\,a^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\pi}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\,a}\right). \end{aligned} \tag{62}$$

به این ترتیب،

$$I = J + K. \tag{63}$$

که

$$J(a) = -\frac{\pi}{2\,a}\left(1 - \frac{1}{2\,a^2}\right)^{-1/2}. \tag{64}$$

$$K(a) = -\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{2\,a^2}\right)^{-1/2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\,a}. \tag{65}$$

J فرد است. پس J' زُج است و اثرَش در طرفِ راستِ (61) حذف میشود. K زُج است. پس K' فرد است. به این ترتیب،

$$\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\,K'(1). \tag{66}$$

وقتیِ a بزرگتر از $2^{-1/2}$ باشد، $K(a)$ را میشود چنین ساده کرد.

$$K(a) = -\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\,a}, \qquad\qquad a > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{67}$$

پس

$$K'(a) = a\,\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^{-3/2}\,\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}\,a} + \frac{1}{\sqrt{2}\,a^2}\,\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2\,a^2}\right)^{-1/2}, \quad a > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{68}$$

به این ترتیب،

$$K'(1) = \sqrt{8}\,\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}. \tag{69}$$

که نتیجه میدهد

$$\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}. \tag{70}$$

از (56) و (46) دیده میشود

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle\,\left\langle \frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle = \frac{\sqrt{8}}{\pi}. \tag{71}$$

از (56) و (43) هم دیده میشود

$$\frac{\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{72}$$

از جمله،

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle\,\left\langle \frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle = \frac{\sqrt{32}}{\pi + 2}\,\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle. \tag{73}$$

$$\frac{\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\pi + 2}\,\left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle. \tag{74}$$

دیده میشود

$$\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle\,\left\langle \frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle \neq \left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle. \tag{75}$$

$$\frac{\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} \neq \left\langle \frac{|\boldsymbol{v}_1|}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle. \tag{76}$$

$$\frac{\langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle}{\langle|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|\rangle} \neq \langle|\boldsymbol{v}_1|\rangle\,\left\langle \frac{1}{|\boldsymbol{v}_{\rm rel}|} \right\rangle. \tag{77}$$

$$\lambda = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right) \frac{1}{n\,\sigma}. \tag{78}$$

$$\lambda' = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \frac{1}{n\,\sigma}. \tag{79}$$

$$\tilde{\lambda}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n\,\sigma}. \tag{80}$$