

X1-150 (2020/08/26)

نوسانها ي غير - خطي، اختلال، بازبهنجارش II

mamwad@mailaps.org

محمد خرمي

بازبهنجارش و پارامترها ي مثير در حل اختلال ي حرکت نوساني با جملات غير - خطي، وقت ي جملات غير - خطي ي شامل سرعت ند بررسی ميشود.

0 درآمد

اين ادامه ي [1] است، برا ي حالت ي که جملات غير - خطي به سرعت هم وابسته اند. معادله ي حرکت برا ي يک نوسانگر هماهنگ ساده با ميرايي ي خطي چنين است.

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} + kx = 0, \quad (1)$$

که \ddot{x} مشتق \dot{x} نسبت به پارامتر (t) است، و k و η ثابتها ي مثبت ند. اسم t را زمان ميگذارم، هر چند رُشن است که اين اسم - گذاري اثر ي در نتايج ندارد. جمله ي متناسب - با - سرعت، مثل يک اصطکاک است، اصطکاک ي که نسبت به سرعت خطي ست. جواب اين معادله ميشود

$$x(t) = b_1 \exp(z_1 t) + b_2 \exp(z_2 t), \quad (2)$$

که b_j ها ثابتها بی دلخواه اند و z_j ها جوابها ی این معادله اند.

$$z^2 + \eta z + k = 0. \quad (3)$$

البته میشود این جواب را چنین نوشت.

$$x(t) = b [\exp(-\gamma t)] \cos(\omega' t - \phi), \quad (4)$$

که

$$\gamma = \frac{\eta}{2}. \quad (5)$$

$$\omega' = \sqrt{k - \gamma^2}. \quad (6)$$

$$b \exp(-i\phi) = 2b_1. \quad (7)$$

$$b \exp(i\phi) = 2b_2. \quad (8)$$

ω' ممکن است موهومی باشد. در حالت خاص ی که ω' صفر است، که یعنی z_2 با z_1 برابر است، جواب (1) میشود

$$x(t) = (c_0 + c_1 t) \exp(-\gamma t), \quad (9)$$

که c_0 و c_1 ثابت اند. این جواب را میشود با یک حد-گیری از مثلن (4) هم به دست آورد. c_1 و c_0 را چنین تعریف میکنم.

$$c_0 = b \cos \phi. \quad (10)$$

$$c_1 = b \omega' \sin \phi. \quad (11)$$

جواب (4) میشود

$$x(t) = \left[c_0 \cos(\omega' t) + c_1 \frac{\sin(\omega' t)}{\omega'} \right] \exp(-\gamma t) \quad (12)$$

که در حد $(\omega' \rightarrow 0)$ هم ان (9) است.

1 نوسانگر با جملات غیر - خطی وابسته به سرعت

معادله ی حرکت برای یک نوسانگر با جملات غیر - خطی چنین است.

$$\ddot{x} + kx = f(x, \dot{x}). \quad (13)$$

اگر دامنه ی حرکت کوچک باشد، f کوچک میماند و میشود با آن مثل یک اختلال رفتار کرد (مثلن [2]). در این حالت، مثل [1]، f را با (sf) جایگزین میکنم:

$$\ddot{x} + kx = sf(x, \dot{x}), \quad (14)$$

و برای x جوابی به شکل یک سری در نظر میگیریم:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j x_j(t). \quad (15)$$

پارامتر s فقط برای این وارد شده که تشخیص مرتبه ی جملات در بسط اختلالی سادتر باشد. در پایان محاسبه s را یک میگذارم. دیده میشود

$$\ddot{x} + kx = \ddot{x}_{(0)} + kx_{(0)} + s(\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)}) + s^2(\ddot{x}_{(2)} + kx_{(2)}) + \dots \quad (16)$$

$$sf(x) = sf(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}) + s^2 \{ [(D_1 f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})] x_{(1)} + [(D_2 f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})] \dot{x}_{(1)} \} + \dots \quad (17)$$

$(D_j \mathfrak{X})$ مشتق نسبت به متغیر j م آن است. روابط (16) و (17) را در (14) میگذارم. ضربیهای s^0 و s^1 و s^2 چنین میشوند.

$$\ddot{x}_{(0)} + kx_{(0)} = 0. \quad (18)$$

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = f(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)}). \quad (19)$$

$$\ddot{x}_{(2)} + kx_{(2)} = [(D_1 f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})] x_{(1)} + [(D_2 f)(x_{(0)}, \dot{x}_{(0)})] \dot{x}_{(1)}. \quad (20)$$

و البته میشود کار را ادامه داد: ضرب s^j میشود

$$\ddot{x}_{(j)} + kx_{(j)} = f_j(x_{(0)}, \dots, x_{(j-1)}, \dot{x}_{(0)}, \dots, \dot{x}_{(j-1)}). \quad (21)$$

این معادله-ی-دیفرانسیلها همراه شرایط مرزی ی‌ند. مثلاً متناظر با شرایط- اولیه برای معادله ی (14)،

$$x_{(j)}(0) = x(0) \delta_{j0}. \quad (22)$$

$$\dot{x}_{(j)}(0) = \dot{x}(0) \delta_{j0}. \quad (23)$$

به این ترتیب یک روش بازگشتی برای محاسبه ی $x_{(j)}$ ها به دست می‌آید. جواب معادله ی (18) را میشود با یک انتقال- زمان به این شکل درآورد.

$$x_{(0)}(t) = a \cos(\omega t). \quad (24)$$

1.1 اصطکاک متناسب با توان سوم سرعت

نیروی اصطکاک بر خلاف جهت سرعت است. وقت ی اصطکاک با توان سوم سرعت متناسب باشد، و مستقل از مکان باشد، معادله ی (13) میشود

$$\ddot{x} + kx = \alpha \dot{x}^3, \quad (25)$$

که α ثابت ی منفی ست. مانسته ی (14) هم میشود

$$\ddot{x} + kx = s\alpha \dot{x}^3. \quad (26)$$

ضریب s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \alpha \dot{x}_{(0)}^3. \quad (27)$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = -\alpha \omega^3 a^3 \sin^3(\omega t). \quad (28)$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \frac{\alpha \omega^3 a^3}{4} [-3 \sin(\omega t) + \sin(3\omega t)]. \quad (29)$$

جواب خاص متناظر با $[\sin(j\omega t)]$ را میشود متناسب با $[\sin(j\omega t)]$ گرفت، به شرطی که j یک نباشد. اما هیچ جواب - خاص ی برای $[\sin(\omega t)]$ نیست که مضرب $[\sin(\omega t)]$ باشد، چون $[\sin(\omega t)]$ جواب معادله ی بدون - طرف دوم است. دیده میشود

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + k\right) \left[-\frac{t \cos(\omega t)}{2\omega}\right] = \sin(\omega t). \quad (30)$$

از این دیده میشود هیچ جواب - خاص ی برای $[\sin(\omega t)]$ نیست که با افزایش t کراندار بماند. پس $x_{(1)}$ کراندار نیست. در حال ی که انتظار میرود اگر α منفی باشد جواب کامل معادله ی (25)، و در نتیجه جواب کامل معادله ی (26) با s مثبت، کراندار باشد.

1.2 اصطکاک متناسب با سرعت و توان دوم مکان

وقت ی اصطکاک با توان اول سرعت و با توان دوم مکان متناسب باشد، معادله ی (13) میشود

$$\ddot{x} + kx = \beta x^2 \dot{x}, \quad (31)$$

که β ثابت ی منفی ست. مانسته ی (14) هم میشود

$$\ddot{x} + kx = s\beta x^2 \dot{x}. \quad (32)$$

ضریب s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \beta x_{(0)}^2 \dot{x}_{(0)}. \quad (33)$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = -\beta\omega a^3 [\cos^2(\omega t)] \sin(\omega t). \quad (34)$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = -\frac{\beta\omega a^3}{4} [\sin(\omega t) + \sin(3\omega t)]. \quad (35)$$

از (30) دیده میشود یک جواب خاص متناظر با $[\sin(\omega t)]$ مضرب ی از $[t \cos(\omega t)]$ است. این جواب، با افزایش t کراندار نمیماند. پس $x_{(1)}$ کراندار نیست. در حالی که انتظار میرود اگر β منفی باشد جواب کامل معادله ی (31)، و در نتیجه جواب کامل معادله ی (32) با s مثبت، کراندار باشد.

2 بازبهنجارش پارامتر

مشکل ی که در د-مثال پیش دیده شد این است که وقت ی تعداد محدود ی از جملات بسط اختلالی در نظر گرفته میشود، یک ویژگی ی مهم جواب کامل از دست میرود: جواب کامل کراندار است، اما جواب متناظر با تعداد محدود ی از جملات بسط - اختلالی چنین نیست. مشکل از اینجا پیش میآید که در بعض ی از مراتب اختلال، بخش ی از چیزی که طرف راست معادله ظاهر میشود جواب معادله ی بدون - طرف - راست است. راه ی که در [1] برای رفع این مشکل به کار رفت بازبهنجارش پارامتر k بود. با این کار یک جمله ی اضافی متناسب با $[\cos(\omega t)]$ در طرف راست معادله ظاهر میشود، و با تنظیم ضریب آن میشد ضریب $[\cos(\omega t)]$ در طرف راست را صفر کرد. اما اینجا جمله ی نامطلوب در طرف راست معادله $[\sin(\omega t)]$ است. برای این که این جمله حذف شود یک جمله ی اضافی متناسب با $[\sin(\omega t)]$ لازم است. $[\sin(\omega t)]$ متناسب با مشتق $[\cos(\omega t)]$ است. پس جمله ی اضافی متناسب با $[\sin(\omega t)]$ را میشود با افزودن یک جمله ی متناسب با سرعت به د-طرف معادله ساخت. این یعنی معادله ی (14) با این جایگزین شود.

$$\ddot{x} + \tilde{\eta} \dot{x} + kx = s f(x, \dot{x}) + \tilde{\eta} \dot{x}, \quad (36)$$

که در طرف راست،

$$\tilde{\eta} = s \tilde{\eta}_{(1)} + o(s). \quad (37)$$

چون $\tilde{\eta}$ جمله ی مرتبه-ی-صفر ندارد، جواب مرتبه-ی-صفر را میشود هم ان (24) گرفت. $\tilde{\eta}_{(1)}$ هم از اینجا به دست میآید که در مرتبه ی یک، ضریب $[\sin(\omega t)]$ در طرف راست (36) صفر شود.

2.1 بازبهنجارش برای اصطکاک متناسب با توان سوم سرعت

وقت ی اصطکاک با توان سوم سرعت متناسب است، معادله ی (36) چنین میشود.

$$\ddot{x} + \tilde{\eta} \dot{x} + kx = s\alpha \dot{x}^3 + \tilde{\eta} \dot{x}. \quad (38)$$

ضریب s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \alpha \dot{x}_{(0)}^3 + \tilde{\eta}_{(1)} \dot{x}_{(0)}. \quad (39)$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = -\alpha \omega^3 a^3 \sin^3(\omega t) - \omega a \tilde{\eta}_{(1)} \sin(\omega t). \quad (40)$$

یا،

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} &= \frac{\alpha \omega^3 a^3}{4} [-3 \sin(\omega t) + \sin(3\omega t)] \\ &\quad - \omega a \tilde{\eta}_{(1)} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (41)$$

این که در طرف راست $[\sin(\omega t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{\eta}_{(1)} = -\frac{3}{4} \alpha \omega^2 a^2. \quad (42)$$

با این، میشود جواب مرتبه-ی-صفر را شبیه معادله ی (4) نوشت. این جواب را با \tilde{x} نشان میدهم:

$$\tilde{x}(t) = a [\exp(-s\tilde{\gamma}_{(1)} t)] \cos(\omega t). \quad (43)$$

البته این جواب با (4) تفاوتها بی دارد. ω' تا مرتبه ی یک نسبت به $\tilde{\eta}_{(1)}$ هم ان ω است. مبدئ زمان هم چا-به-جا شده تا فاز ϕ ظاهر نشود. جز اینها یک نکته ی مهم میماند. این که $\tilde{\eta}_{(1)}$ تابع a (دامنه) است، اما طرف راست (43) شبیه یک حرکت نوسانی با دامنه ی وابسته-به-زمان است. پس $\tilde{\eta}_{(1)}$ تابع زمان میشود، در حال ی که (4) و در نتیجه (43) جوابها ی معادلات ی را میدهند که ضرایب شان مستقل از زمان اند.

یک راه حل این مشکل آن است که (43) جوابی برای فقط زمانهای کوچک گرفته شود. از اینجا دامنه تا مرتبه ی یک نسبت به زمان به دست میآید:

$$a(t) = a(0) \left(1 - s \frac{\tilde{\eta}(1)t}{2} + \dots \right). \quad (44)$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\frac{da}{dt} = -\frac{s\tilde{\eta}(1)}{2} a + \dots. \quad (45)$$

$\tilde{\eta}(1)$ را از (42) در (45) میگذارم: معادله ی (45) میشود

$$\frac{da}{dt} = \frac{3}{8} s \alpha \omega^2 a^3 + \dots. \quad (46)$$

این یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه-ی یک برای a است. این معادله جداشدنی است:

$$\frac{da}{a^3} = \frac{3s\alpha\omega^2 dt}{8} + \dots, \quad (47)$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(t)} - \frac{1}{a^2(0)} \right] = \frac{3s\alpha\omega^2 t}{8} + \dots. \quad (48)$$

یا،

$$a(t) = a(0) \left[1 - \frac{3s\alpha\omega^2 a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} + \dots. \quad (49)$$

که با یک-گذاشتن s میشود

$$a(t) = a(0) \left[1 - \frac{3\alpha\omega^2 a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} + \dots. \quad (50)$$

به این ترتیب، یک جواب تقریبی برای معادله ی (25) چنین میشود.

$$\tilde{x}(t) = a(0) \left[1 - \frac{3\alpha\omega^2 a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} \cos(\omega t). \quad (51)$$

چنان که انتظار میرفت، وقت ی α منفی است، با گذشت زمان دامنه کم میشود.

2.2 بازبهنجارش برای اصطکاک متناسب با سرعت و توان دوم مکان

وقت ی اصطکاک با سرعت و توان دوم مکان متناسب است، معادله ی (36) چنین میشود.

$$\ddot{x} + \tilde{\eta} \dot{x} + kx = s\beta x^2 \dot{x} + \tilde{\eta} \dot{x}. \quad (52)$$

ضریب s^1 در این معادله میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \beta x_{(0)}^2 \dot{x}_{(0)} + \tilde{\eta}_{(1)} \dot{x}_{(0)}. \quad (53)$$

و با استفاده از (24)،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = -\beta \omega a^3 [\cos^2(\omega t)] \sin(\omega t) - \omega a \tilde{\eta}_{(1)} \sin(\omega t). \quad (54)$$

یا،

$$\ddot{x}_{(1)} + \tilde{\eta} \dot{x}_{(1)} + kx_{(1)} = \frac{\beta \omega a^3}{4} [-\sin(\omega t) - \sin(3\omega t)] - \omega a \tilde{\eta}_{(1)} \sin(\omega t). \quad (55)$$

این که در طرف راست $[\sin(\omega t)]$ ظاهر نشود نتیجه میدهد

$$\tilde{\eta}_{(1)} = -\frac{1}{4} \beta a^2. \quad (56)$$

با این، میشود جواب مرتبه-ی-صفر را شبیه معادله ی (4) نوشت. این جواب را با \tilde{x} نشان میدهم، رابطه ی (43). اینجا هم (43) برای فقط زمانها ی کوچک است و با استفاده از آن، دامنه تا مرتبه ی یک نسبت به زمان به دست میآید، رابطه ی (44)، و با استفاده از آن میشود مشتق دامنه نسبت به زمان را حساب کرد، رابطه ی (45). $\tilde{\eta}_{(1)}$ را از (56) در (45) میگذارم: معادله ی (45) میشود

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{8} s\beta a^3 + \dots. \quad (57)$$

این یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه-ی-یک برای a است. این معادله جداشدنی است:

$$\frac{da}{a^3} = \frac{s\beta dt}{8} + \dots, \quad (58)$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{a^2(t)} - \frac{1}{a^2(0)} \right] = \frac{s\beta t}{8} + \dots \quad (59)$$

یا،

$$a(t) = a(0) \left[1 - \frac{s\beta a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} + \dots \quad (60)$$

که با یک-گذاشتن s میشود

$$a(t) = a(0) \left[1 - \frac{\beta a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} + \dots \quad (61)$$

به این ترتیب، یک جواب تقریبی برای معادله (31) چنین میشود.

$$\tilde{x}(t) = a(0) \left[1 - \frac{\beta a^2(0)}{4} t \right]^{-1/2} \cos(\omega t). \quad (62)$$

چنان که انتظار میرفت، وقت β منفی ست، با گذشت زمان دامنه کم میشود.

3 جا-به-جایی

شاید روش بازبهنجارش-پارامتری که اینجا برای رسیدن به معادلات تحول دامنه، معادلات (47) و (57)، به کار رفت، شبیه کلک به نظر برسد: $\tilde{\eta}$ ، در طرف راست معادلات (38) و (52) عملکن کنار گذاشته شده. کاری که انجام شده عملکن این است که در روابط (29) و (35)، جمله y متناسب با $[\sin(\omega t)]$ بر حسب $\dot{x}(0)$ نوشته شده و به طرف چپ برده شده است:

$$\sin(\omega t) = -\frac{1}{\omega a} \dot{x}(0). \quad (63)$$

3.1 جا-به-جایی برای اصطکاک متناسب با توان سوم سرعت

با استفاده از (63)، معادله (29) میشود

$$\ddot{x}(1) + k x(1) - \frac{3\alpha\omega^2 a^2}{4} \dot{x}(0) = \frac{\alpha\omega^3 a^3}{4} \sin(3\omega t). \quad (64)$$

یا،

$$\ddot{x} + s \left(-\frac{3\alpha\omega^2 a^2}{4} \right) \dot{x} + kx = s \left(\frac{\alpha\omega^3 a^3}{4} \right) \sin(3\omega t) + o(s). \quad (65)$$

که یعنی

$$\tilde{\eta} = s \left(-\frac{3\alpha\omega^2 a^2}{4} \right) + o(s). \quad (66)$$

این هم ان (42) است.

3.2 جا-به-جایی برای اصطکاک متناسب با سرعت و توان دوم مکان

با استفاده از (63)، معادله ی (35) میشود

$$\ddot{x}_{(1)} + kx_{(1)} - \frac{\beta a^2}{4} \dot{x}_{(0)} = -\frac{\beta\omega a^3}{4} \sin(3\omega t). \quad (67)$$

یا،

$$\ddot{x} + s \left(-\frac{\beta a^2}{4} \right) \dot{x} + kx = -s \left(\frac{\beta\omega a^3}{4} \right) \sin(3\omega t) + o(s). \quad (68)$$

که یعنی

$$\tilde{\eta} = s \left(-\frac{\beta a^2}{4} \right) + o(s). \quad (69)$$

این هم ان (56) است.

4 پانوشتها

محمد خرمی؛ «نوسانها ی غیر-خطی، اختلال، بازبهنجارش I» (2020/07/25) X1-149

[2] Ali Hasan Nayfeh & Dean A. Mook; "Nonlinear oscillations" 3rd edition

(John Wiley & Sons, 1995) chapter 2