

X1-148 (2020/05/27)

## اصطکاک ایستایی و اصطکاک جنبشی، پایداری

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

مدل ساده-شده ی اصطکاک جامد-جامد دقیقتر بررسی میشود و ارتباط ی بین رابطه ی ضریب- اصطکاکها ی ایستایی و جنبشی با هم، و پایداری ی حرکت با سرعت- ثابت برقرار میشود.

### 0 درآمد

مدل ساده ی اصطکاک جامد-جامد این است که وقت ی دُ جسم با هم در تماس نَد، اگر سرعت نسبی ی نقاط تماس صفر باشد، نیرو ی اصطکاک نامعین است و چنان تنظیم میشود که این سرعت نسبی صفر بماند. البته برا ی این  $F_s$  (اندازه ی نیرو ی اصطکاک ایستایی) یک حد- بالا ی  $F_m$  هست:

$$F_m = \mu_s N, \quad (1)$$

اصطکاک ایستایی و اصطکاک جنبشی، پایداری

که  $N$  نیروی عمود-بر-سطح است، و  $\mu_s$  (ضریب اصطکاک ایستایی) ثابتی است که به جنس و وضعیت سطحها بستگی دارد. اگر نیروی-اصطکاک لازم برای این که سرعت نسبی صفر بماند از  $F_m$  بیشتر شود، سرعت نسبی صفر نمیماند و اصطکاک جنبشی میشود. نیروی اصطکاک جنبشی بر خلاف جهت سرعت نسبی میشود و  $F_k$  (اندازه نیروی اصطکاک جنبشی) چنین میشود.

$$F_k = \mu_k N, \quad (2)$$

که  $\mu_k$  (ضریب اصطکاک جنبشی) ثابتی است که به جنس و وضعیت سطحها بستگی دارد. به ویژه به سرعت بستگی ندارد. در بیشتر موارد هم  $\mu_k$  کوچکتر از  $\mu_s$  است. به حالتی که  $\mu_k$  کوچکتر از  $\mu_s$  است حالت عادی، و به حالتی که  $\mu_k$  بزرگتر از  $\mu_s$  است حالت غیر-عادی میگوییم.

## 1 یک مدل واقعیت

یک مدل واقعیت برای اصطکاک جامد-جامد این است که ضریب اصطکاک جنبشی دقیقاً مستقل-از-سرعت نیست، بل که تابعی (پیوسته) از (اندازه) سرعت است که وقتی سرعت زیاد میشود به یک مقدار حدی میگراید. این مقدار حدی هم از  $\mu_k$  در مدل ساده است:

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} [\mu(|v|)] = \mu_k, \quad (3)$$

که  $v$  سرعت نسبی است. یک فرض این است که در سرعتهای بسیار-کم، ضریب-اصطکاک جنبشی به ضریب-اصطکاک ایستایی میگراید:

$$\lim_{|v| \rightarrow 0} [\mu(|v|)] = \mu_s. \quad (4)$$

با نمادگذاریهای سادتر،

$$\mu(\infty) = \mu_k. \quad (5)$$

$$\mu(0^+) = \mu_s. \quad (6)$$

به این ترتیب، بر اساس این مدل نیروی اصطکاک با تغییر-سرعت (از جمله از صفر به ناصفر) پرش ندارد.

## 2 پاسخ به نیرو

یک جسم روی یک سطح است و نیروی افقی بی به آن وارد نمیشود. نیروی عمود-بر-سطح هم ثابت است. جسم ساکن است. در یک جهت ثابت  $(\hat{e})$  یک نیروی افقی به آن اعمال میشود و این نیرو به طرّ پویسته تغییر میکند. برای همه ی بردارها، با تصویر در هم ین جهت کار میکنم. تصویر نیروی خارجی در این جهت را با  $\mathcal{F}$  نشان میدهم. جرم و سرعت و شتاب این جسم را با، به ترتیب،  $m$  و  $v$  و  $a$  نشان میدهم. دیده میشود

$$m a = \mathcal{F} - F_s, \quad v = 0. \quad (7)$$

$$m a = \mathcal{F} - [\mu(v)] N, \quad v > 0. \quad (8)$$

$$m a = \mathcal{F} + [\mu(-v)] N, \quad v < 0. \quad (9)$$

برای مدل ساده، در روابط بالا  $[\mu(v)]$  و  $[\mu(-v)]$  با  $\mu_k$  جایگزین میشوند.

### 2.1 مدل ساده

وقت ی  $\mathcal{F}$  زیاد میشود، تا جایی که  $\mathcal{F}$  از  $(\mu_s N)$  کمتر است، جسم ساکن میماند. وقت ی  $\mathcal{F}$  بیشتر شود، جسم نمیتواند ساکن بماند.

برای حالت عادی، که  $\mu_k$  کمتر از  $\mu_s$  است، وقت ی  $\mathcal{F}$  از  $(\mu_s N)$  بیشتر شود جسم شتاب مثبت دارد. اگر  $\mathcal{F}$  کم شود ولی از  $(\mu_k N)$  بیشتر باشد، شتاب همچنان مثبت است. اگر  $\mathcal{F}$  از بالا به  $(\mu_k N)$  نزدیک شود، شتاب به صفر میگراید. پس شتاب صفر در دُ حالت ممکن است. یک ی این که  $\mathcal{F}$  نابزرگتر از  $(\mu_s N)$  باشد و جسم ساکن باشد. دیگر این که  $\mathcal{F}$  برابر با  $(\mu_k N)$  باشد و جسم ساکن نباشد. اگر  $\mathcal{F}$  بزرگتر از  $(\mu_k N)$  و کوچکتر از  $(\mu_s N)$  باشد، جسم ممکن است ساکن بماند، اما این حالت ناپایدار است: با یک ضربه ی کوچک در جهت  $\hat{e}$ ، سرعت و شتاب جسم مثبت میشود و جسم با شتاب ثابت حرکت میکند.

برای حالت غیر-عادی، که  $\mu_k$  بیشتر از  $\mu_s$  است، وقت ی  $\mathcal{F}$  از  $(\mu_s N)$  بیشتر شود جسم نمیتواند ساکن بماند. اما اگر  $\mathcal{F}$  از  $(\mu_s N)$  بیشتر شده باشد ولی به  $(\mu_k N)$  نرسیده باشد، جسم به حرکت هم نمیتواند درآید. برای دیدن این، گیرم سرعت در  $t_0$  صفر است و بعد از آن مثبت میشود.

$t_2$  را زمان ی بزرگتر از  $t_0$  میگیریم، چنان که در  $[t_0, t_2]$  سرعت مثبت است و  $\dot{x}$  از  $(\mu_s N)$  بیشتر و از  $(\mu_k N)$  کمتر است. از قضیه ی مقدار - میانی نتیجه میشود

$$v(t_2) - v(t_0) = [a(t_1)](t_2 - t_0), \quad (10)$$

که  $t_1$  زمان ی بین  $t_0$  و  $t_2$  است. پس در  $t_1$  سرعت مثبت و شتاب هم مثبت است. این با (8) سازگار نیست.

به این ترتیب، وقت ی جسم ساکن است و  $\dot{x}$  به طر پیوسته زیاد میشود، برای  $\dot{x}$  بزرگتر از  $(\mu_s N)$  و کوچکتر از  $(\mu_k N)$  مسئله جواب ندارد. هم ین نشان میدهد این مدل بیش از حد ساده شده است. وقت ی  $\dot{x}$  از  $(\mu_k N)$  هم بیشتر شود، شتاب مثبت میشود و جسم به حرکت در میآید. وقت ی جسم در جهت  $\hat{e}$  حرکت میکند، اگر  $\dot{x}$  از بالا به  $(\mu_k N)$  نزدیک شود، شتاب به صفر میگراید و وقت ی  $\dot{x}$  از  $(\mu_k N)$  کمتر شود شتاب منفی میشود. اگر زمان ی که سرعت صفر شد  $\dot{x}$  از  $(\mu_k N)$  کمتر ولی از  $(\mu_s N)$  بیشتر باشد، باز مسئله جواب ندارد. شتاب صفر در دُ حالت ممکن است. یک ی این که  $\dot{x}$  نابزرگتر از  $(\mu_s N)$  باشد و جسم ساکن باشد. دیگر این که  $\dot{x}$  برابر با  $(\mu_k N)$  باشد و جسم ساکن نباشد. اینجا این که جسم ساکن بماند وقت ی ممکن است که  $\dot{x}$  کمتر از  $(\mu_s N)$  باشد، و اگر چنین باشد این حالت پایدار است.

## 2.2 مدل واقعیت

مشکل ی که در حالت غیر - عادی به وجود میآید این است که بین نیرو ی اصطکاک در سرعت صفر و نیرو ی اصطکاک در سرعتها ی ناصفر یک گاف - نیرو هست. اگر نیرو ی خارجی در این گاف باشد، و جسم ساکن باشد، جسم نمیتواند ساکن بماند چون نیرو ی خارجی از بیشینه ی نیرو ی اصطکاک ایستایی بیشتر است، و نمیتواند به حرکت درآید چون نیرو ی خارجی از نیرو ی اصطکاک جنبشی کمتر است. این که اندازه ی نیرو ی اصطکاک جنبشی تابع ی پیوسته از سرعت باشد و در سرعتها ی کم به بیشینه ی نیرو ی اصطکاک ایستایی بگراید، این گاف - نیرو را حذف میکند. بیشینه ی ضریب اصطکاک جنبشی (دقیقت، کوچکترین کران بالا برای ضریب اصطکاک جنبشی) را با  $\mu_{k,max}$  نشان میدهم. بزرگترین مقدار بین  $\mu_{k,max}$  و  $\mu_s$  را هم با  $\mu_{max}$  نشان میدهم. نیرو ی - اصطکاک متناظر با  $\mu_{max}$  میشود  $(\mu_{max} N)$ ، که آن را با  $F_{max}$  نشان میدهم.

رُشن است که اگر  $\mathfrak{F}$  بزرگتر از  $F_{\max}$  باشد، شتاب مثبت است و جسم نمیتواند ساکن بماند. اگر جسم در حال حرکت باشد هم که اصطکاک جنبشی ست و نیروی اصطکاک معین است. حالتی که میماند هم آن است که جسم در یک لحظه ساکن باشد، و در آن لحظه  $\mathfrak{F}$  از  $F_{\max}$  بزرگتر نباشد. در این حالت، اگر  $\mathfrak{F}$  کوچکتر از  $F_m$  باشد، جسم ساکن میماند. آیا این جواب پایدار است؟ اگر جسم سرعت کوچک بگیرد، اصطکاک جنبشی میشود و نیروی اصطکاک، چون پیوسته است و سرعت نزدیک صفر است، نزدیک  $\{\mu(0^+)\} N$  میماند. یعنی نیروی اصطکاک نزدیک  $F_m$  است. پس نیروی اصطکاک بزرگتر از  $\mathfrak{F}$  است و علامت شتاب جسم هم آن علامت نیروی اصطکاک است. در نتیجه علامت شتاب جسم برخلاف علامت سرعت آن میشود. پس جسم به سوی سکون میرود. این یعنی اگر  $\mathfrak{F}$  کوچکتر از  $F_m$  باشد، حالت سکون پایدار است. اگر جسم ساکن باشد و  $\mathfrak{F}$  بیش از  $F_m$  ولی کمتر از  $F_{\max}$  باشد (که این فقط در حالت غیر-عادی ممکن است) شتاب جسم مثبت میشود. پس جسم به حرکت در میآید. با افزایش سرعت جسم، نیروی اصطکاک تغییر میکند. نیروی اصطکاک تابعی پیوسته از سرعت است و به ازای سرعتها  $0^+$  و  $\infty$ ، به ترتیب،  $F_m$  و  $F_{\max}$  میشود. پس نیروی اصطکاک همه‌ی مقادیرا‌ی بین  $F_m$  و  $F_{\max}$  را میگیرد. یعنی معادله‌ی

$$\mathfrak{F} = [\mu(v_0)] N, \quad (11)$$

برای  $v_0$  جواب دارد. وقتی سرعت جسم  $v_0$  شد، شتاب جسم صفر میشود و جسم میتواند با سرعت  $v_0$  به حرکت ادامه دهد.

### 2.3 پایداری‌ی حرکت با سرعت ثابت، در مدل واقعیت

گیرم سرعت جسم مقدار مثبت  $v_0$  است و  $\mathfrak{F}$  رابطه‌ی (11) را برمیآورد. در این صورت شتاب جسم صفر میشود و جسم با هم آن سرعت  $v_0$  به حرکت ادامه میدهد. اگر با یک اختلال، سرعت به اندازه‌ی  $(\Delta v)$  تغییر کند، شتاب چنین میشود.

$$m a = [\mu(v_0) - \mu(v_0 + \Delta v)] N. \quad (12)$$

پس،

$$a = \frac{\mu(v_0) - \mu(v_0 + \Delta v)}{\Delta v} \frac{N}{m} (\Delta v). \quad (13)$$

$(N/m)$  مثبت است. پس علامت کسر اول در طرف راست علامت  $a$  نسبت به  $(\Delta v)$  را تعیین میکند. اگر  $\mu$  در همسایگی  $v_0$  صعودی باشد، با  $(\Delta v)$  بی که به حد کافی کوچک باشد کسر اول در طرف راست منفی است و علامت  $a$  بر خلاف علامت  $(\Delta v)$  است. در این حالت حرکت با سرعت ثابت  $v_0$  پایدار است: اگر سرعت از  $v_0$  تغییر کند، علامت شتاب چنان است که سرعت را به  $v_0$  برگرداند. اگر  $\mu$  در همسایگی  $v_0$  نزولی باشد، با  $(\Delta v)$  بی که به حد کافی کوچک باشد کسر اول در طرف راست مثبت است و علامت  $a$  هم ان علامت  $(\Delta v)$  است. در این حالت حرکت با سرعت ثابت  $v_0$  ناپایدار است: اگر سرعت از  $v_0$  تغییر کند، علامت شتاب چنان است که سرعت را از  $v_0$  دورتر میکند.

از جمله، اگر  $\mu$  یکنوا باشد، در حالت عادی  $\mu$  نزولی و در حالت غیر-عادی  $\mu$  صعودی است. پس حرکت با سرعت ثابت (ناصفر) در حالت عادی ناپایدار و در حالت غیر-عادی پایدار است.