

یک ذره ی نسبیتی ی با- ساختار

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

لگرانژی، تکانه، و معادله-ی-حرکت یک ذره ی نسبیتی بررسی میشود که ساختار درونی دارد. وابستگی ی این ساختار به سرعت، و اثر آن بر تکانه و معادله-ی-حرکت بررسی میشود.

0 قراردادها

قراردادها هم ان اند که در [1] و [2] به کار رفته. r^μ ها مثلثها ی چاربردار مکان نند، و t زمان و η متریک (مینکفسکی [3]) است:

$$r^0 = t. \quad (1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - (1 + c^2) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0. \quad (2)$$

بردارها ی سه-مثلثی (با مثلثها ی فضایی) را با حروف سیاه، و ویژه-زمان را با τ نمایش میدهم. شاخصها یی که مقادارها ی فضا-زمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف یونانی و شاخصها یی که فقط مقادارها ی فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف لاتین نمایش میدهم. سرعت (مشتق مکان نسبت به زمان) را با v ، و چاربردار سرعت (مشتق چاربردار مکان نسبت به ویژه-زمان) را با

u نشان میدهم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3)$$

$$v^0 = 1. \quad (4)$$

$$u = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau}. \quad (5)$$

دیده میشود

$$u = \gamma \mathbf{v}, \quad (6)$$

که γ ضریب لرننس [4] است:

$$\begin{aligned} \gamma &= (1 - c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{-1/2}, \\ &= \frac{dt}{d\tau}. \end{aligned} \quad (7)$$

رُشن است که

$$u \cdot u = -c^2. \quad (8)$$

رابطه ی E (انرژی) با p (تکانه) این است.

$$E = c^2 p^0. \quad (9)$$

1 لگرانژی و تکانه

لگرانژی ضرب در ضریب لرننس [4]، تحت تبدیلهای پونگره [5] اسکالر است (وقت ی تبدیل هم-زمان بر سرعت، ساختار درونی، و میدانهای خارجی اعمال شود). مثل [2] لگرانژی (L) را بر حسب جرم مثر (m) مینویسم:

$$L = -m c^2 \gamma^{-1}. \quad (10)$$

لگرانژی و جرمِ مثر تابعِ فضا-زمان، چاربردارِ سرعت، و ساختارِ درونی هستند. بستگی به فضا-زمان را از طریقِ میدانها یِ خارجی میگیریم. میدانها یِ خارجی را با T ، و ساختارِ درونی را با W نشان میدهیم. جرمِ مثر چنان است که

$$m[u', W', T'(r')] = m[u, W, T(r)], \quad (11)$$

که متغیرها یِ پریم-دار تبدیل-یافته یِ متغیرها یِ بدون-پریم تحتِ تبدیلهای پونگره [5] اند. (11) پونگره-هموردایی یِ کنش (یا اسکالر-بودنِ جرمِ مثر) است. برای محاسبه یِ تکانه، دانستنِ بستگی یِ لگرانژی به سرعت لازم است. لگرانژی از طریقِ ضریبِ لرنس [4] و چاربردارِ سرعت، و نیز از طریقِ ساختارِ درونی به سرعت مربوط است. به بستگی از طریقِ ضریبِ لرنس [4] و چاربردارِ سرعت بستگی یِ آشکار، و به بستگی از طریقِ ساختارِ درونی بستگی یِ نهان میگویم.

1.1 بستگی یِ آشکارِ لگرانژی به سرعت

بستگی یِ آشکارِ لگرانژی به سرعت از طریقِ γ و u است، که هر-دو به v وابسته اند. از

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v^i} = c^{-2} \gamma^3 v_i, \quad (12)$$

نتیجه میشود

$$\frac{\partial \gamma^{-1}}{\partial v^i} = -c^{-2} u_i. \quad (13)$$

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = \gamma (\delta_i^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_i). \quad (14)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} v^i &= -\delta_i^\alpha u^i - c^{-2} u^\alpha u_i u^i, \\ &= \delta_0^\alpha u^0 - u^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_0 u^0 - c^{-2} u^\alpha (u \cdot u), \end{aligned} \quad (15)$$

که نتیجه میدهد

$$-\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} v^i = \gamma (\delta_0^\alpha + c^{-2} u^\alpha u_0). \quad (16)$$

یک ذره ی نسبیتی ی با- ساختار

h را چنین تعریف میکنم.

$$h_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} + c^{-2} u^{\alpha} u_{\beta}. \quad (17)$$

h افکنش بر فضا ی عمود بر u است، یعنی اثرش بر هر بردار عمود بر u همانی، و بر u صفر است. دیده میشود

$$\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^i} = \gamma h_i^{\alpha}, \quad (18)$$

$$-\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial v^i} v^i = \gamma h_0^{\alpha}. \quad (19)$$

1.2 بستگی ی نهان لگرانژی به سرعت

بستگی ی نهان لگرانژی به سرعت از طریق W است. یک راه بررسی ی تغییر W به خاطر تغییر این است که W تابع ی از v و یک W ی چارچوب- سکون فرض شود. منظور از تغییر W به خاطر تغییر v تغییر W در حالت ی ست که W ی چارچوب- سکون ثابت میماند. گیرم سرعت از v به \tilde{v} تبدیل شود، که

$$\tilde{v} = v + \delta v. \quad (20)$$

در این صورت $\tilde{\mathfrak{X}}$ به \mathfrak{X} تبدیل میشود، که

$$\tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} + \delta \mathfrak{X} + o(\delta v), \quad (21)$$

و $(\delta \mathfrak{X})$ نسبت به (δv) خطی ست. عملگری که تانسور W را به \tilde{W} تبدیل میکند خطی ست. انتظار میرود این تبدیل حاصل- ضرب تانسوری، ادغام، و حاصل- ضرب اسکالر را حفظ کند، و اسکالرها را تغییر ندهد. به این ترتیب کافی ست اثر این تبدیل بر بردارها معلوم شود. W را بردار (چاربردار) میگیرم. تبدیل متناظر با چهاربردارها را با \mathfrak{L} نشان میدهم:

$$\tilde{W} = \mathfrak{L} W. \quad (22)$$

که قرار است حاصل - ضرب درونی (و در نتیجه طول) را حفظ کند. پس یک تبدیل لورنتس [4] است. u هم چاربردار است. پس،

$$\tilde{u} = \mathcal{L} u. \quad (23)$$

خیز متناظر با سرعت \mathbf{v} را با $\mathcal{B}(\mathbf{v})$ ، و چاربردار سرعت متناظر با سکون را با e_0 نشان میدهم:

$$(e_0)^\alpha = \delta_0^\alpha. \quad (24)$$

$$u = [\mathcal{B}(\mathbf{v})] e_0. \quad (25)$$

برای تعیین \mathcal{L} فرضها بی لازم است. چنین میگیرم که \mathcal{L} وقت v صفر باشد یک خیز است (دوران ندارد)، و در حالت کلی با $[\mathcal{B}(\mathbf{v})]$ ، خیزی که e_0 را به u تبدیل میکند، سازگار است. فرض اول از اینجا موجه میشود که در حالت سکون هیچ دوران y ممتاز نیست. فرض دوم هم در واقع اعمال تقارن تحت خیز است.

این که \mathcal{L} برای سرعت صفر خیز است، یعنی

$$\tilde{W}_r = [\mathcal{B}(\mathbf{v}_r)] W_r. \quad (26)$$

شاخص r متناظر با سکون است. سازگاری \mathcal{L} با $[\mathcal{B}(\mathbf{v})]$ یعنی اگر تانسرها y متناظر با سکون را با $[\mathcal{B}(\mathbf{v})]$ بخیزانم، تغییرات این تانسرها هم با $[\mathcal{B}(\mathbf{v})]$ خیزانده میشود. پس اگر

$$W = [\mathcal{B}(\mathbf{v})] W_r, \quad (27)$$

آنگاه،

$$\delta W = [\mathcal{B}(\mathbf{v})] \delta W_r. \quad (28)$$

از (26) تا (28) نتیجه میشود

$$\mathcal{L} = [\mathcal{B}(\mathbf{v})] [\mathcal{B}(\mathbf{v}_r)] [\mathcal{B}(\mathbf{v})]^{-1}. \quad (29)$$

از این، همراه با (23) و (25)، دیده میشود

$$[\mathfrak{B}(\mathbf{v}_r)] e_0 = [\mathfrak{B}(\mathbf{v})]^{-1} [\mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{v}})] e_0. \quad (30)$$

وقت ی $(\delta \mathbf{v})$ صفر شود \mathbf{v}_r هم صفر میشود، و \mathfrak{L} همانی میشود. \mathfrak{L} را خطی نسبت به $(\delta \mathbf{v})$ تعریف میکنم، چنان که

$$\mathfrak{L} = 1 + \mathfrak{I} + o(\delta \mathbf{v}). \quad (31)$$

با استفاده از

$$[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]_0^0 = \gamma, \quad (32)$$

$$[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]_i^0 = c^{-2} \gamma v_i, \quad (33)$$

$$[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]_0^i = \gamma v^i, \quad (34)$$

$$[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]_j^i = \delta_j^i + \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} v^i v_j, \quad (35)$$

نتیجه میشود

$$\{[\mathfrak{B}(\mathbf{v}_r)] e_0\}^0 = 1 + o(\delta \mathbf{v}). \quad (36)$$

$$\{[\mathfrak{B}(\mathbf{v}_r)] e_0\}^i = (v_r)^i + o(\delta \mathbf{v}). \quad (37)$$

$$\{[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]^{-1} [\mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{v}})] e_0\}^0 = 1 + o(\delta \mathbf{v}). \quad (38)$$

$$\{[\mathfrak{B}(\mathbf{v})]^{-1} [\mathfrak{B}(\tilde{\mathbf{v}})] e_0\}^i = \gamma \left[\delta v^i + \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} v^i (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}) \right] + o(\delta \mathbf{v}). \quad (39)$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{v}_r = \gamma \left[\delta \mathbf{v} + \frac{\gamma - 1}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}) \right] + o(\delta \mathbf{v}). \quad (40)$$

از اینجا،

$$\Gamma^0_0 = 0. \quad (41)$$

$$\Gamma^0_i = c^{-2} \gamma^2 \delta v_i. \quad (42)$$

$$\Gamma^i_0 = \gamma^2 \delta v^i. \quad (43)$$

$$\Gamma^i_j = c^{-2} \gamma^2 (v^i \delta v_j - v_j \delta v^i). \quad (44)$$

از

$$\delta v^j = \gamma^{-1} \delta u^j - \gamma^{-2} u^j \delta \gamma, \quad (45)$$

یا هم-ارز با آن

$$\delta v^j = c^{-2} \gamma^{-2} (u^j \delta u_0 - u_0 \delta u^j), \quad (46)$$

همراه با (41) تا (44) نتیجه میشود

$$\Gamma^\alpha_\beta = c^{-2} (u^\alpha \delta u_\beta - u_\beta \delta u^\alpha). \quad (47)$$

به این ترتیب،

$$\delta W = c^{-2} [u(W \cdot \delta u) - (u \cdot W) \delta u]. \quad (48)$$

این هم ان انتقال فرمی-واکر [6] برای W است. $(\delta_{FW} W)$ را چنین تعریف میکنم.

$$\delta_{FW} W = \delta W + \frac{u(W \cdot \delta u) - (u \cdot W) \delta u}{u \cdot u}. \quad (49)$$

انتقال فرمی-واکر [6] این است که δ_{FW} صفر شود، مثلن [7]. دیده میشود (48) هم-ارز است با

$$\delta_{FW} W = 0. \quad (50)$$

با استفاده از (14)، رابطه ی (48) را میشود به شکل مشتق W نسبت به v نوشت:

$$\frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} = c^{-2} \gamma [u^\alpha W_i - \delta_i^\alpha (u \cdot W)]. \quad (51)$$

از جمله دیده میشود

$$\begin{aligned} -v^i \frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} &= c^{-2} [-u^\alpha u_i W^i + \delta_i^\alpha u^i (u \cdot W)], \\ &= c^{-2} [u^\alpha u_0 W^0 - u^\alpha (u \cdot W) - \delta_0^\alpha u^0 (u \cdot W) + u^\alpha (u \cdot W)]. \end{aligned} \quad (52)$$

که نتیجه میدهد

$$-v^i \frac{\partial W^\alpha}{\partial v^i} = c^{-2} \gamma [u^\alpha W_0 - \delta_0^\alpha (u \cdot W)]. \quad (53)$$

1.3 تکانه و انرژی

مثلثها ی فضایی و زمانی ی تکانه چنین اند.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}. \quad (54)$$

$$p_0 = L - p_i v^i. \quad (55)$$

به این ترتیب،

$$p_i = \mathbf{m} \gamma v_i - c^2 \gamma^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^i} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial W^\beta} \frac{\partial W^\beta}{\partial v^i} \right). \quad (56)$$

$$p_0 = -\mathbf{m} \gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + c^2 \gamma^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^i} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial W^\beta} \frac{\partial W^\beta}{\partial v^i} \right) v^i - \mathbf{m} c^2 \gamma^{-1}. \quad (57)$$

با استفاده از (14) و (16) و (51) و (53)، اینها میشوند

$$p_\alpha = \mathbf{m} u_\alpha - \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u^\beta} (c^2 \delta_\alpha^\beta + u^\beta u_\alpha) + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial W^\beta} [(u \cdot W) \delta_\alpha^\beta - u^\beta W_\alpha]. \quad (58)$$

به مجموع \mathbf{D} -جمله ی اول طرف راست تکانه ی آشکار، و به جمله ی سوم طرف راست تکانه ی نهان میگویم. اگر ساختار تانسری با رتبه ی بیش از یک باشد (بیش از یک شاخص داشته باشد)،

متناظر با هر شاخص آن یک جمله شبیه جمله ی سوم طرف راست ظاهر میشود. مثلن متناظر با ساختار دُ-شاخصی ی \mathfrak{M} ،

$$\frac{\partial m}{\partial W^\beta} [(u \cdot W) \delta_\alpha^\beta - u^\beta W_\alpha] \rightarrow \frac{\partial m}{\partial \mathfrak{M}^{\mu\nu}} (u^\sigma \mathfrak{M}_\sigma^\nu \delta_\alpha^\mu - u^\mu \mathfrak{M}_\alpha^\nu + u^\sigma \mathfrak{M}^\mu_\sigma \delta_\alpha^\nu - u^\nu \mathfrak{M}^\mu_\alpha). \quad (59)$$

2 معادله ی حرکت

معادله ی حرکت

$$\mathcal{E}_\alpha = 0 \quad (60)$$

است، که

$$\mathcal{E}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial r^\alpha} - \frac{d p_\alpha}{d t}, \quad (61)$$

یا، با استفاده از (10)،

$$\gamma \mathcal{E}_\alpha = -c^2 \frac{\partial m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r^\alpha} - \frac{d p_\alpha}{d \tau}. \quad (62)$$

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «یک ذره ی نسبیتی در یک میدان اسکالر» (2010/10/21) X1-071

[2] محمد خرمی؛ «یک ذره ی نسبیتی در میدانها ی خارجی» (2013/04/25) X1-091

[3] Minkowski

[4] Lorentz

[5] Poincaré

[6] Fermi-Walker

[7] Wolfgang Rindler; “relativity: special, general, and cosmological” 2nd edition (Oxford University Press, 2006) chapter 10