

ذره ی باردار در میدان الکتریکی ی یک سیم دراز

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

میدان الکتریکی ی یک سیم دراز، هم تقارن سمتی دارد و هم تقارن انتقالی. به هم این خاطر حرکت یک ذره ی باردار در آن حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود.

1 میدان الکتریکی، پتانسیل، و لگرنژی

یک سیم دراز چگالی-ی-بار یکنواخت و ثابت λ دارد. محور z را روی این سیم میگذاریم. E (میدان الکتریکی) میشود

$$E = \frac{\mu_0 c^2 \lambda}{2 \pi \rho} \hat{\phi}, \quad (1)$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات استوانی یند. Φ (پتانسیل الکتریکی) میشود

$$\Phi = -\frac{\mu_0 c^2 \lambda}{2 \pi} \ln \frac{\rho}{a}, \quad (2)$$

که a پارامتری ثابت است.

ذره ی باردار در میدان الکتریکی ی یک سیم دراز

لگرانژی ی یک ذره به جرم m و بار q که در میدان الکتریکی ی متناظر با پتانسیل Φ حرکت میکند چنین است.

$$L = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - q\Phi. \quad (3)$$

L لگرانژی و \mathbf{v} سرعت است. L را بر حسب مختصات استوانی و با Φ متناظر با (2) مینویسم:

$$L = m \left[\frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + k \ln \frac{\rho}{a} \right], \quad (4)$$

که $\dot{\mathcal{X}}$ مشتق نسبت به t (زمان) است و

$$k = \frac{\mu_0 c^2 \lambda q}{2\pi m}. \quad (5)$$

2 تقارنها و ثابت - - حرکتها

z و ϕ در لگرانژی نیستند، پس p_z و p_ϕ (تکانه ی متناظر) ثابت - - حرکت اند.

$$p_z = m \dot{z}. \quad (6)$$

$$p_\phi = m \rho^2 \dot{\phi}. \quad (7)$$

ثابتها ی متناظر، تقسیم بر m ، را با، به ترتیب، w و ℓ نشان میدهم:

$$w = \dot{z}. \quad (8)$$

$$\ell = \rho^2 \dot{\phi}. \quad (9)$$

t هم در لگرانژی نیست. پس H (همیلتنی) هم ثابت - - حرکت است.

$$H = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - m k \ln \frac{\rho}{a}. \quad (10)$$

$(2H/m)$ را، که طی حرکت ثابت میماند، با ε نشان میدهم:

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 - 2k \ln \frac{\rho}{a}. \quad (11)$$

با استفاده از (8) و (9)، رابطه ی (11) چنین میشود.

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + f(\rho), \quad (12)$$

که

$$f(\rho) = \frac{\ell^2}{\rho^2} - 2k \ln \frac{\rho}{a} + w^2. \quad (13)$$

مسئله ی سه-بُعدی به یک مسئله ی یک-بُعدی تبدیل میشود.

3 حرکت

تصویر حرکت در راستای z از تصویر حرکت در صفحه ی $z = 0$ جدا میشود. سرعت حرکت در راستای z ثابت است (هم ان w است). برای تصویر حرکت در صفحه ی $z = 0$ ، $\tilde{\varepsilon}$ و \tilde{f} را چنین تعریف میکنم.

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - w^2. \quad (14)$$

$$\tilde{f} = f - w^2. \quad (15)$$

دیده میشود

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\tilde{f}(\rho)] = \infty. \quad (16)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} [\tilde{f}(\rho)] = -[\text{sgn}(k)] \infty. \quad (17)$$

اگر k مثبت باشد، $\tilde{f}(\rho)$ بر حسب ρ نزولی ست. در این حالت یک نقطه ی بازگشت هست. این

نقطه را با ρ_1 نشان میدهم:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_1). \quad (18)$$

ρ از ρ_1 کمتر نمیشود. در $\rho \rightarrow \infty$ هم $\dot{\rho}$ بینهایت میشود.

اگر k منفی باشد، $f(\rho)$ در $\rho = \rho_0$ کمینه میشود، که

$$\frac{\ell^2}{\rho_0^2} = -k. \quad (19)$$

ذره ی باردار در میدان الکتریکی ی یک سیم دراز

در این حالت دُ نقطه ی بازگشت (ρ_1 و ρ_2) هستند که ρ_0 بین آنها است و

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_j), \quad j = 1, 2. \quad (20)$$

البته

$$\tilde{\varepsilon} \geq \tilde{f}(\rho_0). \quad (21)$$

ρ_1 را نقطه ی بازگشت کوچکتر میگیریم. ρ_1 و ρ_2 ، به ترتیب، کمینه و بیشینه ی ρ هستند.

در حالت کلی، با استفاده از (12) میشود t را بر حسب ρ به دست آورد:

$$t = \int^{\rho} \frac{\pm ds}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - \tilde{f}(s)}}. \quad (22)$$

وارون رابطه ی t بر حسب ρ ، رابطه ی ρ بر حسب t را میدهد. با گذاشتن ρ بر حسب t در

رابطه ی (9)، $\dot{\phi}$ و از آنجا ϕ بر حسب t به دست میآید.

میشود زمان را بین معادلات حذف کرد و معادله ی مسیر را به دست آورد. از (9) دیده میشود

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{\rho^2} \frac{d}{d\phi}. \quad (23)$$

مشتق \mathcal{X} نسبت به ϕ را با \mathcal{X}' نشان میدهیم. (8) و (12)، به ترتیب، میشوند

$$w = \frac{\ell}{\rho^2} z'. \quad (24)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\ell^2}{\rho^4} \rho'^2 + \tilde{f}(\rho). \quad (25)$$

u ، g و \tilde{g} را چنین تعریف میکنم.

$$u = \frac{1}{\rho}. \quad (26)$$

$$\begin{aligned} g(u) &= f(\rho), \\ &= \ell^2 u^2 + 2k \ln(au) + w^2. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \tilde{f}(\rho), \\ &= \ell^2 u^2 + 2k \ln(au). \end{aligned} \quad (28)$$

به این ترتیب،

$$z' = \frac{w}{\ell u^2}. \quad (29)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \ell^2 u'^2 + \tilde{g}(u). \quad (30)$$

پس،

$$\phi = \int^u \frac{\pm \ell d\sigma}{\sqrt{\tilde{\varepsilon} - \tilde{g}(\sigma)}}. \quad (31)$$

این ϕ را بر حسب u میدهد، که با وارون-کردن u بر حسب ϕ به دست میآید. u بر حسب ϕ را در (29) میگذارم. z' ، و از آنجا z بر حسب ϕ به دست میآید.

4 مسیر ماریچی

اگر k منفی باشد، یک حالت خاص حرکت این است که ρ ثابت بماند. چنین میشود، اگر و تنها اگر

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{f}(\rho_0). \quad (32)$$

در این حالت ρ برابر با ρ_0 میماند و $\dot{\phi}$ هم ثابت میماند. مقادارهای متناظر با این حالت را با شاخص 0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\rho_0^2 \dot{\phi}_0^2 = -k, \quad (33)$$

که البته یعنی

$$m \rho_0 \dot{\phi}_0^2 = -q E_0. \quad (34)$$

حرکت بر یک ماریچ منظم به شعاع ρ_0 و پای Δ_0 است. Δ_0 جا-به-جایی در جهت محور z به ازای یک دُره ی تصویر حرکت بر صفحه ی $z = 0$ است. پس،

$$\Delta_0 = \frac{2\pi w}{\dot{\phi}_0}, \quad (35)$$

ذره ی باردار در میدان الکتریکی ی یک سیم دراز

۶

یا،

$$\Delta_0 = -\frac{2\pi w \ell}{k}. \quad (36)$$

زاویه ی ماریچ با صفحه ی $z = 0$ را با θ_0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\theta_0 = -\tan^{-1} \frac{w (\mathbf{v} \cdot \hat{\phi})_0}{k}. \quad (37)$$