X1-137 (2019/01/22)

ذره یِ باردار در میدانِ مغناطیسی یِ یک سیمِ دراز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

میدانِ مغناطیسی یِ یک سیمِ دراز، هم تقارنِ سمتی دارد و هم تقارنِ انتقالی. به هم ین خاطر حرکتِ یک ذره یِ باردار در آن حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود.

1 میدانِ مغناطیسی، پتانسیلِ برداری، و لَگرانژی

جریانِ ثابتِ I از یک سیمِ دراز میگذرد. محورِ z را رو یِ این سیم میگذارم، چنان که سمتِ قراردادی یِ جریان به سو یِ z ها یِ مثبت باشد. $\boldsymbol{B}$ (میدانِ مغناطیسی) میشود

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\,\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{1}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصاتِ استوانِئی یَند. $\boldsymbol{A}$ (پتانسیلِ برداری) این را بر میئاورَد.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}. \tag{2}$$

این رابطه $\boldsymbol{A}$ را به طُر ِ یکتا مشخص نمیکند. برا یِ $\boldsymbol{A}$ این حدس را به کار میبَرم.

$$\boldsymbol{A} = A(\rho)\, \hat{\boldsymbol{z}}. \tag{3}$$

دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\, A}{\mathrm{d}\, \rho} = -\frac{\mu_0\, I}{2\, \pi\, \rho}, \tag{4}$$

که نتیجه میدهد

$$A = -\frac{\mu_0\, I}{2\, \pi}\, \ln \frac{\rho}{a}, \tag{5}$$

که a پارامتر ی ثابت است.

لَگرانژی یِ یک ذره به جرم ِ m و بار ِ q که در میدان ِ مغناطیسی یِ متناظر با پتانسیل ِ برداری یِ $\boldsymbol{A}$ حرکت میکند چنین است.

$$L = \frac{m}{2}\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + q\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{6}$$

L لَگرانژی و $\boldsymbol{v}$ سرعت است. L را بر حسب ِ مختصات ِ استوانِئی و با $\boldsymbol{A}$ متناظر با (3) و (5) مینویسم:

$$L = m\, \left[\frac{1}{2}\, (\dot{\rho}^2 + \rho^2\, \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - b\, \dot{z}\, \ln \frac{\rho}{a}\right], \tag{7}$$

که $\dot{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به t (زمان) است و

$$b = \frac{\mu_0\, I\, q}{2\, \pi\, m}. \tag{8}$$

2 تقارنها و ثابت- ِ-حرکتها

z و ϕ در لَگرانژی نیستند، پس p_z و p_ϕ (تکانِها یِ متناظر) ثابت- ِ-حرکت َند.

$$p_z = m\, \left(\dot{z} - b\, \ln \frac{\rho}{a}\right). \tag{9}$$

$$p_\phi = m\, \rho^2\, \phi. \tag{10}$$

ثابتها یِ متناظر، تقسیم بر m، را با، به ترتیب، w و ℓ نشان میدهم:

$$w = \dot{z} - b\,\ln\frac{\rho}{a}. \tag{11}$$

$$\ell = \rho^2\,\dot{\phi}. \tag{12}$$

t هم در لَگرانژی نیست. پس H (همیلتنی) هم ثابت-ِ-حرکت است.

$$H = \frac{m}{2}\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2). \tag{13}$$

$(2\,H/m)$ را، که طی ِ حرکت ثابت میمانَد، با ε نشان میدهم:

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + \rho^2\,\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2. \tag{14}$$

با استفاده از (11) و (12) میشود $\dot{z}$ و $\dot{\phi}$ را بر حسب ِ ρ حساب کرد و در (14) گذاشت. به این ترتیب یک معادله یِ مرتبه-یِ-یک برا یِ ρ به دست میاید:

$$\varepsilon = \dot{\rho}^2 + f(\rho), \tag{15}$$

که

$$f(\rho) = \frac{\ell^2}{\rho^2} + \left(w + b\,\ln\frac{\rho}{a}\right)^2. \tag{16}$$

مسئله یِ سه-بُعدی به یک مسئله یِ یک-بُعدی تبدیل میشود.

3 حرکت

$f(\rho)$ در $\rho = \rho_0$ کمینه میشود، که

$$\frac{\ell^2}{\rho_0^2} = b\,\left(w + b\,\ln\frac{\rho_0}{a}\right). \tag{17}$$

همچنین،

$$\lim_{\rho\to 0}[f(\rho)] = \infty. \tag{18}$$

$$\lim_{\rho\to \infty}[f(\rho)] = \infty. \tag{19}$$

اینها نشان میدهند دُ نقطه یِ بازگشت (ρ_1 و ρ_2) هستند که ρ_0 بین ِ آنها ست و

$$\varepsilon = f(\rho_j), \quad j = 1, 2. \tag{20}$$

البته

$$\varepsilon \geq f(\rho_0). \tag{21}$$

ρ_1 را نقطه-یِ-بازگشت ِ کوچکتر میگیرم. ρ_1 و ρ_2، به ترتیب، کمینه و بیشنه یِ ρ هستند.

با استفاده از (15) میشود t را بر حسب ِ ρ به دست آورد:

$$t = \int^{\rho} \frac{\pm \mathrm{d}\, s}{\sqrt{\varepsilon - f(s)}}. \tag{22}$$

وارون ِ رابطه یِ t بر حسب ِ ρ، رابطه یِ ρ بر حسب ِ t را میدهد. با گذاشتن ِ ρ بر حسب ِ t در روابط ِ (11) و (12)، به ترتیب، $\dot{z}$ و $\dot{\phi}$ و از آنجا z و ϕ بر حسب ِ t به دست میئایند.

میشود زمان را بین ِ معادلات حذف کرد و معادله یِ مسیر را به دست آورد. از (12) دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} = \frac{\ell}{\rho^2}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, \phi}. \tag{23}$$

مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به ϕ را با $\mathfrak{X}'$ نشان میدهم. (11) و (15)، به ترتیب، میشوند

$$w = \frac{\ell}{\rho^2}\, z' - b\, \ln \frac{\rho}{a}. \tag{24}$$

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{\rho^4}\, \rho'^2 + f(\rho). \tag{25}$$

u و g را چنین تعریف میکنم.

$$u = \frac{1}{\rho}. \tag{26}$$

$$\begin{aligned} g(u) &= f(\rho), \\ &= \ell^2\, u^2 + [w - b\, \ln(a\, u)]^2. \end{aligned} \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$z' = \frac{w - b\,\ln(a\,u)}{\ell\,u^2}. \tag{28}$$

$$\varepsilon = \ell^2\,u'^2 + g(u). \tag{29}$$

پس،

$$\phi = \int^u \frac{\pm\,\ell\,\mathrm{d}\,\sigma}{\sqrt{\varepsilon - g(\sigma)}}. \tag{30}$$

این ϕ را بر حسب ِ u میدهد، که با وارون-کردن َش u بر حسب ِ ϕ به دست میئاید. u بر حسب ِ ϕ را در (28) میگذارم. z'، و از آنجا z بر حسب ِ ϕ به دست میئاید.

4 مسیر ِ مارپیچی

یک حالت ِ خاص ِ حرکت این است که ρ ثابت بماند. چنین میشود، اگر و تنها اگر

$$\varepsilon = f(\rho_0). \tag{31}$$

در این حالت ρ برابر با ρ_0 میمانَد و $\dot{z}$ و $\dot{\phi}$ هم ثابت میمانند. مقدارها یِ متناظر با این حالت را با شاخص ِ 0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\rho_0^2\,\dot{\phi}_0^2 = b\,\dot{z}_0, \tag{32}$$

که البته یعنی

$$m\,\rho_0\,\dot{\phi}_0^2 = q\,B_0\,\dot{z}_0. \tag{33}$$

حرکت بر یک مارپیچ ِ منظم به شعاع ِ ρ_0 و پا یِ Δ_0 است. Δ_0 جا-به-جایی در جهت ِ محور ِ z به ازا یِ تغییر ِ $(2\,\pi)$ در زاویه است. از (32) نتیجه میشود

$$\Delta_0 = \frac{2\,\pi\,\rho_0^2\,\dot{\phi}_0}{b}, \tag{34}$$

یا،

$$\Delta_0 = \frac{2\,\pi\,\ell}{b}. \tag{35}$$

زاویه یِ مارپیچ با صفحه یِ $z = 0$ را با θ_0 نشان میدهم. دیده میشود

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})_0}{b}. \tag{36}$$

اینها یک حالت ِ خاص از یک مسله یِ کلیتر َند: یک ذره یِ باردار دُر ِ یک خط ِ میدان ِ مغناطیسی میگردد و ضمنَن در راستا یِ آن خط حرکت میکند. اگر میدان یکنواخت نباشد و جا یی که ذره حرکت میکند چشمه یِ میدان صفر باشد (و البته میدان ِ الکتریکی هم صفر باشد)، $\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}}$ (سرعت ِ انحراف از خط- ِ-میدان) چنین میشود [1].

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \frac{m}{q\,|\boldsymbol{B}|\,|\boldsymbol{R}|}\,\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}\,v_\perp^2\right)\,\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{R}|\,|\boldsymbol{B}|}. \tag{37}$$

$\boldsymbol{R}$ بردار ِ شعاع ِ انحنا یِ خط- ِ-میدان است، $v_\parallel$ تصویر ِ سرعت ِ ذره در راستا یِ خط- ِ-میدان، و $v_\perp$ تصویر ِ سرعت ِ ذره بر صفحه یِ عمود بر خط- ِ-میدان است. رابطه یِ بالا، با استفاده از (1) و (8) میشود

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{D}} = \left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}\,v_\perp^2\right)\,\frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{b}. \tag{38}$$

برا یِ مسیر ِ مارپیچی،

$$v_\perp = 0. \tag{39}$$

همچنین، از (32) دیده میشود

$$v_\parallel^2 = b\,\dot{z}_0. \tag{40}$$

که نشان میدهند (38) برقرار است.

5 پانوشتها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 12