X1-131 (2018/04/26)

تقارنِ انتقالی یِ گسسته

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تقارنِ انتقالی یِ گسسته (تقارنِ شبکه) بررسی میشود و چیزها یی در باره یِ طیفِ عملگرها یی که چنین-تقارن ی دارند به دست میاید. از جمله نشان داده میشود طیفِ انرژی یِ شبکه یِ لانه-زنبوری بر حسبِ تکانه مخروطی ست.

1 انتقالِ گسسته

انتقالِ گسسته یعنی انتقالها یی با بردارها یِ $\boldsymbol{a}$ که

$$\boldsymbol{a} = a^j\, \boldsymbol{e}_j, \tag{1}$$

که $\boldsymbol{e}_j$ ها بردارها یی ثابت َند و a^j ها صحیح َند. $T(\boldsymbol{a})$ نمایشِ انتقال ی با بردارِ $\boldsymbol{a}$ است، و میشود آن را چنین نوشت.

$$T(\boldsymbol{a}) = \exp\left(\frac{P_j\, a^j}{\mathrm{i}\,\hbar}\right), \tag{2}$$

که $\boldsymbol{P}$ مولدِ انتقال است. به $\boldsymbol{P}$ تکانه (یا شبه-ِتکانه) هم میگویند. انگیزه یِ پیشوندِ «شبه» این است که اگر a^j ها صحیح باشند، $T(\boldsymbol{a})$ با افزودنِ مضربِ صحیح ی از h به هر یک از P_j عوض

نمیشود. بر حسبِ بردارها-یِ-دُگانِ $\boldsymbol{e}^j$ با

$$\boldsymbol{e}^j(\boldsymbol{e}_l) = \delta^j_l, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P} = P_j\, \boldsymbol{e}^j, \tag{4}$$

$$P_j\, a^j = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}). \tag{5}$$

مجموعه یِ ترکیبِ-خطیها یِ $\boldsymbol{e}_j$ ها با ضریبها یِ صحیح یک شبکه است، که آن را با $\mathbb{L}$ نشان میدهم. مجموعه یِ ترکیبِ-خطیها یِ $\boldsymbol{e}^j$ ها با ضریبها یِ صحیح هم یک شبکه است، که آن را با $\mathbb{L}^*$ نشان میدهم. به $\mathbb{L}^*$ دُگانِ $\mathbb{L}$ میگوییم. دیده میشود اگر $\boldsymbol{a}$ در $\mathbb{L}$ باشد،

$$\exp\left[\frac{\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{a})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] = \exp\left[\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right], \tag{6}$$

اگر

$$\frac{\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}}{h} \in \mathbb{L}^*. \tag{7}$$

در واقع کافی ست ویژه-مقدارها یِ $[(\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P})/h]$ در $\mathbb{L}^*$ باشد.

یک متوازیالسطوح هست که یک رئسَش مبدئ است و یالِ j اَش $\boldsymbol{e}^j$ است. به این متوازیالسطوح یاخته یِ واحدِ شبکه یِ دُگان میگویند. این متوازیالسطوح را با $\mathbb{C}^*$ نشان میدهم.

2 ویژه-بردارها یِ مشترکِ انتقالها یِ گسسته

ویژه-بردارِ $\boldsymbol{P}$ متناظر با ویژه-مقدارِ $\boldsymbol{p}$ را با $|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle$ نشان میدهم. رُشن است که $|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle$ ویژه-بردارِ $T(\boldsymbol{a})$ است:

$$[T(\boldsymbol{a})]|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle = \left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle. \tag{8}$$

دیده میشود اگر $[(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p})/h]$ در $\mathbb{L}^*$ باشد، ویژه-مقدارِ $T(\boldsymbol{a})$ برا یِ $|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}'\rangle$ و $|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle$ یکسان است، به شرط ی که $\boldsymbol{a}$ در $\mathbb{L}$ باشد. به این ترتیب ویژه-مقدارها یِ انتقالها یِ گسسته با $\boldsymbol{p}$ ها یی مشخص میشوند که $(\boldsymbol{p}/h)$ درونِ $\mathbb{C}^*$ است.

یک ویژه-بردار ِ مکان را با $|\boldsymbol{b},\mu\rangle$ نشان میدهم. $\boldsymbol{b}$ در $\mathbb{L}$ است و μ یک شاخص ِ احتمالی یِ دیگر است، که در انتقال ِ گسسته تغییر نمیکند:

$$[T(\boldsymbol{a})]|\boldsymbol{b},\mu\rangle = |\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\mu\rangle. \tag{9}$$

پهنه یِ $|\boldsymbol{b},\mu\rangle$ ها $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ است، که $\mathbb{V}$ پهنه یِ $|\boldsymbol{b}\rangle$ ها و $\mathbb{W}$ پهنه یِ $|\mu\rangle$ ها ست. $|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle$ را بردار ی در $(\mathbb{V}\otimes\mathbb{W})$ تعریف میکنم که مانسته یِ (8) را بر میئاورَد:

$$|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle = \sum_{b\in\mathbb{L}} \alpha_{\boldsymbol{b}}\,|\boldsymbol{b},\mu\rangle. \tag{10}$$

$$[T(\boldsymbol{a})]|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle = \left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle. \tag{11}$$

دیده میشود

$$\alpha_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}} = \left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{a})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\,\alpha_{\boldsymbol{b}}, \tag{12}$$

که نشان میدهد

$$\alpha_{\boldsymbol{b}} = \mathcal{N}\left\{\exp\left[-\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}, \tag{13}$$

که $\mathcal{N}$ یک ثابت ِ بهنجارش است.

3 جا-به-جا-شدن با انتقال ِ گسسته

عنصر-ِ-ماتریسیها یِ H (مثلَن همیلتنی) را چنین نمایش میدهم.

$$H|\boldsymbol{b},\nu\rangle =: \sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}}\sum_{\mu}(H^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}})^{\mu}{}_{\nu}\,|\boldsymbol{a},\mu\rangle. \tag{14}$$

گیرم H با انتقالها یِ گسسته جا-بِه-جا شود. یعنی اگر $\boldsymbol{c}$ در $\mathbb{L}$ باشد،

$$[T(\boldsymbol{c})]H = H[T(\boldsymbol{c})]. \tag{15}$$

یا،

$$H = [T(\boldsymbol{c})]^{-1}H[T(\boldsymbol{c})]. \tag{16}$$

به این ترتیب،

$$(H^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}})^{\mu}{}_{\nu} = (H^{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}}{}_{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}})^{\mu}{}_{\nu}, \tag{17}$$

که نتیجه میدهد

$$(H^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}})^{\mu}{}_{\nu} = (H_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})^{\mu}{}_{\nu}. \tag{18}$$

در طرفِ راست، $H_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}$ برا یِ سادگی با $H_{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}$ نشان داده شده است.

این که H با انتقالها یِ گسسته جا-به-جا میشود نشان میدهد اثرِ H بر یک ویژه-فضا یِ انتقالها یِ گسسته در هم ان ویژه-فضا میمانَد:

$$\begin{aligned} H\,|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\nu\rangle &= \mathcal{N}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{L}}\left\{\exp\left[-\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} H\,|\boldsymbol{b},\nu\rangle, \\ &= \mathcal{N}\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathbb{L}}\sum_{\boldsymbol{a}\in\mathbb{L}}\sum_{\mu}\left\{\exp\left[-\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{b})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}(H_{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}})^{\mu}{}_{\nu}\,|\boldsymbol{a},\mu\rangle, \\ &= \sum_{\mu}\left(\sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{L}}\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{c})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}(H_{\boldsymbol{c}})^{\mu}{}_{\nu}\right)|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle \end{aligned} \tag{19}$$

با تعریفِ

$$\sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{L}}\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{c})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} H_{\boldsymbol{c}} =: \tilde{H}_{\boldsymbol{p}}, \tag{20}$$

دیده میشود

$$H\,|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\nu\rangle = \sum_{\mu}(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^{\mu}{}_{\nu}\,|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p},\mu\rangle. \tag{21}$$

به این ترتیب قطری-کردنِ H به قطری-کردنِ $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ ها تبدیل میشود. رُشن است که $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ ها عملگرها یی خطی از $\mathbb{W}$ به $\mathbb{W}$ اند.

4 مکانِ گسسته

یک مدلِ ساده برا یِ شبکه مدلِ مکان-گسسته است. در این مدل $\mathbb{W}$ باپایان-بُعدی ست. به این ترتیب نَ-تنها انتقالها یی که تقارن َند گسسته اند، بل که خُدِ مکان هم گسسته است. یعنی خُدِ فضا هم شبکه است. البته این شبکه ممکن است ظریفتر از شبکه یِ انتقالها باشد. در این حالت $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ ها ماتریس َند.

4.1 شبکه یِ ساده

شبکه یِ ساده مثال ی از مدل ِ مکان- ـِ گسسته است، که در آن $\mathbb{W}$ یک-بُعدی ست. این یعنی مکانها هم ان اعضا یِ $\mathbb{L}$ اند. در این حالت $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ ها عدد َند. ویژه-بردارها یِ H هم ان $|\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}\rangle$ ها یَند و ویژه-مقدارها یِ متناظر هم $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ ها یَند.

4.2 شبکه یِ دُ-گانه

شبکه یِ دُ-گانه یک مثال از مدل ِ مکان-گسسته است، که در آن $\mathbb{W}$ دُ-بُعدی ست. این یعنی متناظر با هر نقطه یِ $\mathbb{L}$ دُ نقطه (یا حالت) هست. مثل ِ این که شبکه یِ مکان متناظر با دُ شبکه یِ $\mathbb{L}$ است. در این حالت ماتریسها یِ $\tilde{H}_{\boldsymbol{p}}$ دُ-در-دُ یَند. متناظر با هر $\boldsymbol{p}$ دُ ویژه-مقدار برا یِ H هست. اینها (که با $E_{\boldsymbol{p}}$ نشان ِ شان میدهم) این معادله را بر میئاورند.

$$[E_{\boldsymbol{p}} - (\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_1][E_{\boldsymbol{p}} - (\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_2] - (\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_2\,(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_1 = 0. \tag{22}$$

اگر بین ِ حالتها یِ $\langle 1|$ و $\langle 2|$ در $\mathbb{W}$ یک تقارن باشد،

$$\begin{aligned}(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_2 &= (\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_1,\\ &=: \mathcal{E}_{\boldsymbol{p}}.\end{aligned} \tag{23}$$

در این صورت (22) چنین ساده میشود.

$$E_{\boldsymbol{p}} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{p}} \pm \Delta_{\boldsymbol{p}}, \tag{24}$$

که

$$\Delta_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_2\,(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_1}. \tag{25}$$

4.3 شبکه یِ لانه-زنبوری

شبکه یِ لانه-زنبوری مجموعه ای از شش-ضلعیها یِ منتظم ِ چسبیده-به-هم است. هر رئس بین ِ سه شش-ضلعی و هر یال بین ِ دُ شش-ضلعی مشترک است. رئسها یِ این شبکه را به دُ دسته (1 و 2)

تقسیم میکنند، چنان که همسایها ی ِ هر رئس ِ دسته ی ِ 1 از دسته ی ِ 2 اند و بر عکس. رئسها ی ِ هر دسته یک شبکه ی ِ مثلثی میسازند. یک رئس ِ دسته ی ِ 1 را مبدئ میگیرم. شبکه ی ِ شامل ِ رئسها ی ِ دسته ی ِ 1 هم ان $\mathbb{L}$ است:

$$\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}. \tag{26}$$

$$\boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{s}. \tag{27}$$

$\boldsymbol{r}_\mu$ مکان ِ یک رئس از دسته ی ِ μ است، $\mathbb{L}$ با بردارها ی ِ $\boldsymbol{e}_1$ و $\boldsymbol{e}_2$ ساخته میشود، و

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2}{3}. \tag{28}$$

$\boldsymbol{e}_1$ و $\boldsymbol{e}_2$ بردارها یی با طول ِ برابر َند و زاویه یِشان با هم $(\pi/3)$ است.

با فرض ِ همسانگردی ی ِ فضا، و این که رئسها ی ِ دسته ی ِ 1 و 2 یکسان َ ند (مثلَن بر هر-دُ یک گونه ذره نشسته است) $(H^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}})^\mu{}_\nu$ به فقط $|\boldsymbol{r}_\mu(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{r}_\nu(\boldsymbol{b})|$ بستِگی دارد:

$$(H^{\boldsymbol{a}}{}_{\boldsymbol{b}})^\mu{}_\nu = \mathcal{H}[|\boldsymbol{r}_\mu(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{r}_\nu(\boldsymbol{b})|]. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_1 = \sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{L}} \left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{c})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} \mathcal{H}(|\boldsymbol{c}|). \tag{30}$$

$$(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_2 = (\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_1. \tag{31}$$

$$(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_2 = \sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{L}} \left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{c})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} \mathcal{H}(|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{s}|). \tag{32}$$

$$(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^2{}_1 = \overline{(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_2}. \tag{33}$$

دیده میشود اگر $\boldsymbol{c}$ در $\mathbb{L}$ باشد، R دَوَران ِ با زاویه ی ِ $(2\,\pi/3)$ باشد، و

$$\boldsymbol{c}' - \boldsymbol{s} = R(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{s}), \tag{34}$$

آنگاه $\boldsymbol{c}'$ هم در $\mathbb{L}$ است. به این ترتیب،

$$(\tilde{H}_{\boldsymbol{p}})^1{}_2 = \frac{1}{3}\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{s})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\} \sum_{\boldsymbol{c}\in\mathbb{L}} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{c} - \boldsymbol{s})\, \mathcal{H}(|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{s}|), \tag{35}$$

که

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}) = \exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] + \exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(R\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right] + \exp\left[\frac{\boldsymbol{p}(R^2\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]. \tag{36}$$

دیده میشود

$$f(\boldsymbol{p},R\,\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}). \tag{37}$$

کوچکترین مقدار ِ $|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s}|$ برا یِ $\boldsymbol{c}$ در $\mathbb{L}$ به ازا یِ $\boldsymbol{c}$ برابر با $\mathbf{0}$ یا $\boldsymbol{e}_1$ یا $\boldsymbol{e}_2$ به دست میئاید. این مقدارها یِ $\boldsymbol{c}$ متناظر با انتخاب ِ نزدیکترین همسایها یِ یک نقطه از دسته یِ 2 اند. با استفاده از

$$R\,\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1, \tag{38}$$

$$R\,\boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1, \tag{39}$$

دیده میشود

$$f(\boldsymbol{p},\mathbf{0}-\boldsymbol{s}) = \left[\exp\left(-\frac{p_1+p_2}{3\,\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\left[1+\exp\left(\frac{p_1}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)+\exp\left(\frac{p_2}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]. \tag{40}$$

طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا به ازا یِ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}$ صفر میشود، که

$$-1 = \cos\frac{q_1}{\hbar} + \cos\frac{q_2}{\hbar}. \tag{41}$$

$$0 = \sin\frac{q_1}{\hbar} + \sin\frac{q_2}{\hbar}. \tag{42}$$

یک جواب برا یِ این معادلات چنین است.

$$\frac{q_1}{\hbar} = \frac{2\,\pi}{3}. \tag{43}$$

$$\frac{q_2}{\hbar} = -\frac{2\,\pi}{3}. \tag{44}$$

دیده میشود اگر $\boldsymbol{c}$ در $\mathbb{L}$ باشد،

$$f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s}) = \exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1-c^2)\right] + \exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(-2\,c^1-c^2+1)\right] + \exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1+2\,c^2-1)\right],$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1-c^2)\right]\right\}\left\{1+[\exp(\mathrm{i}\,2\,\pi\,c^1)]\,\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)\right]\right.\\
&\qquad\left.+[\exp(-\mathrm{i}\,2\,\pi\,c^2)]\,\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)\right]\right\}\\
&= \left\{\exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1-c^2)\right]\right\}\left[1+\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)+\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)\right]. \qquad (45)
\end{aligned}
$$

در رسیدن به برابری یِ آخر این به کار رفته که c^1 و c^2 صحیح َند. دیده میشود عاملِ دوم در طرفِ راستِ برابری یِ آخر صفر است. به این ترتیب،

$$
f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s})=0. \qquad (46)
$$

این هم نشان میدهد

$$
(\tilde{H}_{\boldsymbol{q}})^1{}_2=0. \qquad (47)
$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
131.48 f(\boldsymbol{q}+\mathfrak{p},\boldsymbol{r}) &= f(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})+\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\frac{\mathfrak{p}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}+\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{q}(R\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\frac{\mathfrak{p}(R\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\\
&\quad+\left\{\exp\left[\frac{\boldsymbol{q}(R^2\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}\right]\right\}\frac{\mathfrak{p}(R^2\,\boldsymbol{r})}{\mathrm{i}\,\hbar}+o(\mathfrak{p}). \qquad (48)
\end{aligned}
$$

به این ترتیب، اگر $\boldsymbol{c}$ در $\mathbb{L}$ باشد،

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{q}+\mathfrak{p},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{s}) &= \frac{1}{\mathrm{i}\,\hbar}\left\{\exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1-c^2)\right]\right\}\\
&\quad\left\{\left[\left(c^1-\frac{1}{3}\right)\mathfrak{p}_1+\left(c^2-\frac{1}{3}\right)\mathfrak{p}_2\right]\right.\\
&\quad+\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)\right]\left[\left(c^1-\frac{1}{3}\right)(\mathfrak{p}_2-\mathfrak{p}_1)+\left(c^2-\frac{1}{3}\right)(-\mathfrak{p}_1)\right]\\
&\quad\left.+\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,2\,\pi}{3}\right)\right]\left[\left(c^1-\frac{1}{3}\right)(-\mathfrak{p}_2)+\left(c^2-\frac{1}{3}\right)(\mathfrak{p}_1-\mathfrak{p}_2)\right]\right\}\\
&\quad+o(\mathfrak{p}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{\mathrm{i}\,\hbar}\left\{\exp\left[\frac{2\,\pi}{3\,\mathrm{i}}(c^1-c^2)\right]\right\}\\
&\quad\left\{\left[\exp\left(-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}\right)\right]\left(c^1-\frac{1}{3}\right)+\left[\exp\left(\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}\right)\right]\left(c^2-\frac{1}{3}\right)\right\}\\
&\quad\mathfrak{p}(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\,\boldsymbol{v})+o(\mathfrak{p}),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

که

$$
\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2). \tag{50}
$$

$$
\boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2). \tag{51}
$$

به این ترتیب،

$$
(\tilde{H}_{\boldsymbol{q}+\mathfrak{p}})^1{}_2 = A\,\mathfrak{p}(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\,\boldsymbol{v})+o(\mathfrak{p}), \tag{52}
$$

که A مستقل از $\mathfrak{p}$ است. دیده میشود $\boldsymbol{u}$ و $\boldsymbol{v}$ بر هم عمود َند و طول ِ شان هم یکسان است. از اینجا نتیجه میشود

$$
|\mathfrak{p}(\boldsymbol{u}+\mathrm{i}\,\boldsymbol{v})| = B\,|\mathfrak{p}|, \tag{53}
$$

که B یک ثابت است. به این ترتیب،

$$
E_{\boldsymbol{q}+\mathfrak{p}} = \mathcal{E}_{\boldsymbol{q}+\mathfrak{p}} \pm C\,|\mathfrak{p}|+o(\mathfrak{p}), \tag{54}
$$

که C مثبت و مستقل از $\mathfrak{p}$ است. جمله یِ غالب ِ $\mathcal{E}_p$ جمله یِ متناظر با $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ در (30) است، که مستقل از $\boldsymbol{p}$ است. به این ترتیب شکل ِ $E_{\boldsymbol{q}+\mathfrak{p}}$ بر حسب ِ $\mathfrak{p}$ برا یِ $\mathfrak{p}$ ها یِ کوچک شبیه ِ مخروط است. این ویژگی یِ عام ِ شبکه یِ لانه-زنبوری ست، که از فقط تقارنها یِ این شبکه نتیجه میشود.