X1-128 (2017/11/27)

تثبیت ِ پیمانه، و تبدیل ِ بی-آر-اِس-تی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سیستم ی بررسی میشود که با کنش تُصیف میشود و تقارن ی دارد که بهنجار است (تقارن ِ کوانتمی یِ سیستم هم هست). شکل ِ سازگار ِ تثبیت ِ پیمانه، و به دنبال ِ آن وارد-کردن ِ شبح و ظهور ِ تقارن ِ بی-آر-اِس-تی [1] بررسی میشود.

1 تقارن ِ بهنجار

یک سیستم با کنش ِ S تُصیف میشود. متغیر- ِ-دینامیکیها یِ این سیستم را با Φ، و مجموعه یِ مقدارها یِ ممکن ِ Φ را با $\mathbb{V}$ نشان میدهم. یک راه ِ کوانتش ِ این سیستم انتگرال ِ مسیر است:

$$\begin{aligned}\langle F(\Phi)\rangle &= \mathcal{N}\,\langle F(\Phi)\rangle_{\rm n},\\ &= \frac{\langle F(\Phi)\rangle_{\rm n}}{\langle 1\rangle_{\rm n}},\end{aligned}\tag{1}$$

که $\langle\mathfrak{X}\rangle$ مقدار ِ چشم-داشتی یِ $\mathfrak{X}$ است، و

$$\langle F(\Phi)\rangle_{\rm n} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\, F(\phi)\, \exp[-\grave{\beta}\, S(\phi)].\tag{2}$$

$$\mathcal{N}^{-1} = \langle 1\rangle_{\mathrm{n}},$$
$$= \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\, \exp[-\grave{\beta}\, S(\phi)]. \qquad (3)$$

$$\grave{\beta}^{-1} = \mathrm{i}\,\hbar. \qquad (4)$$

بررسی یِ سیستمها یِ آماری یِ در تعادل هم مشابه است. فقط کنش با همیلتنی و $\grave{\beta}$ با β جایگزین میشود، که

$$\beta^{-1} = k_{\mathrm{B}}\, T. \qquad (5)$$

میگویم $\mathfrak{D}$ یک تقارنِ کنش است، اگر

$$S[\mathfrak{D}(\phi)] = S(\phi). \qquad (6)$$

میگویم تقارنِ $\mathfrak{D}$ بهنجار است (تقارنِ کوانتمی هم هست)، اگر $\mathfrak{D}$ تقارنِ عنصر-ِ-حجمِ انتگرال-گیری هم باشد:

$$\mathrm{d}[\mathfrak{D}(\phi)] = \mathrm{d}\,\phi. \qquad (7)$$

در هر-دُ-مُرِد فرض شده $\mathfrak{D}$ وارون-پذیر است و مانستِها یِ (6) و (7) با $\mathfrak{D}^{-1}$ به جا یِ $\mathfrak{D}$ هم برقرار َند.

2 کمیتها یِ ناوردا

یک نمایشِ ℓ از گروهِ $\mathcal{G}$ بر $\mathbb{V}$ اثر میکند. مدارِ متناظر با ϕ (تحتِ گروهِ $\mathcal{G}$) را با $\mathrm{or}(\phi)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{or}(\phi) = \{(\ell_U\, \phi) \mid U \in \mathcal{G}\}. \qquad (8)$$

میگویم $F(\Phi)$ (تحتِ گروهِ $\mathcal{G}$) ناوردا ست، اگر برا یِ هر U در $\mathcal{G}$،

$$F(\ell_U\, \Phi) = F(\Phi). \qquad (9)$$

گیرم همه یِ اعضا یِ $\ell_{\mathcal{G}}$ تقارنِ بهنجارِ کنش َند، و $F(\Phi)$ تحتِ $\mathcal{G}$ ناوردا ست. نشان میدهم در این صورت $\langle F(\Phi)\rangle$ را میشود با انتگرال-گیری بر فضا یی کاسته به دست آورد. این فضا یِ کاسته از هر مدارِ $\mathbb{V}$ یک و فقط یک نقطه دارد. به جانشانی یِ فضا یِ کاسته به جا یِ $\mathbb{V}$ تثبیتِ پیمانه میگویند.

3 تثبیتِ پیمانه

گیرم h تابع ی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است، چنان که $h^{-1}(0)$ شاملِ یک و فقط یک نقطه از هر مدارِ $\mathbb{V}$ است، و فقط همانی یِ گروه است که اثر َش بر یک عضوِ $h^{-1}(0)$ در $h^{-1}(0)$ است. در این صورت،

$$1 = \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U \,|\det\{\mathrm{D}_U[h(\ell_U\,\phi)]\}|\delta[h(\ell_U\,\phi)]. \tag{10}$$

($\mathrm{d}\,U$) اندازه یِ ناوردا یِ گروه است. D مشتق-گیری ست، و D_U مشتق نسبت به U است. با تعریفِ $\tilde{\phi}$ و $\tilde{U}$ و U' با

$$\tilde{\phi} = [h^{-1}(0)] \cap [\mathrm{or}(\phi)], \tag{11}$$

$$\tilde{\phi} = \ell_{\tilde{U}}\,\phi, \tag{12}$$

$$U = U'\,\tilde{U}, \tag{13}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U \left|\det\left(\{\mathrm{D}_{U'}[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})]\}[\mathrm{D}_U(U')]\right)\right|\delta[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})],\\
&= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U \,|\det\{\mathrm{D}_{U'}[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})]\}|\,|\det[\mathrm{D}_U(U')]|\delta[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})],\\
&= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \,|\det\{\mathrm{D}_{U'}[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})]\}|\delta[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})].
\end{aligned} \tag{14}$$

متغیرِ δ به ازا یِ U' برابر با یک (همانی) صفر میشود. پس در ضریبِ δ در انتگرال-ده میشود U' را برابر با یک گذاشت. همچنین، با فرضِ این که دترمینان صفر نشود (یا جا یی که دترمینان صفر میشود همبند باشد)، میشود ترتیبِ مختصاتِ متناظر با U' را چنان گرفت که دترمینان مثبت شود. پس میشود قدر-ِ-مطلق را برداشت. به این ترتیب، با نماد-گذاری یِ

$$(\mathrm{D}\,\mathfrak{f})(\mathfrak{x}) = [(\mathrm{D}\,\mathfrak{f})(\centerdot)](\mathfrak{x}), \tag{15}$$

دیده میشود

$$1 = \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \left[\Big(\det\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\tilde{\phi})]\}\Big)(1)\right]\delta[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})],$$
$$= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \left[\Big(\det\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\ell_{U'}\,\tilde{\phi})]\}\Big)(1)\right]\delta[h(\ell_{U'}\,\tilde{\phi})], \qquad (16)$$

یا

$$1 = \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \left[\Big(\det\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\ell_{U}\,\phi)]\}\Big)(1)\right]\delta[h(\ell_{U}\,\phi)]. \qquad (17)$$

گیرم $F(\Phi)$ ناوردا ست. دیده میشود

$$\langle F(\Phi)\rangle_{\mathrm{n}} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\, F(\phi)\,\exp[-\grave{\beta}\, S(\phi)]$$
$$\int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \left[\det\Big(\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\ell_{U}\,\phi)]\}(1)\Big)\right]\delta[h(\ell_{U}\,\phi)],$$
$$= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\, F(\phi)\,\exp[-\grave{\beta}\, S(\phi)]$$
$$\left[\det\Big(\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\ell_{U}\,\phi)]\}(1)\Big)\right]\delta[h(\ell_{U}\,\phi)],$$
$$= \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U' \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}(\ell_{U}\,\phi)\, F(\ell_{U}\,\phi)\,\exp[-\grave{\beta}\, S(\ell_{U}\,\phi)]$$
$$\left[\det\Big(\{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\ell_{U}\,\phi)]\}(1)\Big)\right]\delta[h(\ell_{U}\,\phi)], \qquad (18)$$

که با تعریفهای ِ

$$\mathrm{vol}(\mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} \mathrm{d}\,U, \qquad (19)$$
$$M(\phi) = \{\mathrm{D}[h(\ell_{\bullet}\,\phi)]\}(1), \qquad (20)$$
$$\langle F(\Phi)\rangle_{\mathrm{r}} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\, F(\phi)\,\exp[-\grave{\beta}\, S(\phi)]\,\{\det[M(\phi)]\}\delta[h[(\phi)] \qquad (21)$$

نتیجه میدهد

$$\langle F(\Phi)\rangle_{\mathrm{n}} = \mathrm{vol}(\mathcal{G})\,\langle F(\Phi)\rangle_{\mathrm{r}}. \qquad (22)$$

4 کنش ِ مئثر

از (1) و (22) دیده میشود مقدار ِ چشم-داشتی یِ یک کمیت ِ ناوردا یِ $F(\Phi)$ را میشود با انتگرال-گیری بر یک فضا یِ کاسته به دست آورد. البته ضریب ِ $F(\phi)$ در انتگرال-ده دیگر نمایی یِ کنش نیست. میشود با وارد-کردن ِ میدانها یی اضافی این ضریب را به شکل ِ انتگرال ِ نمایی یِ یک تابع ِ دیگر (بر میدانها یِ اضافی) دراورد. به آن تابع کنش ِ مئثر میگویم.

با استفاده از

$$\delta(\mathfrak{x}) = \int \mathrm{d}\,\mathfrak{q}\ \exp(-\grave{\beta}\,\mathfrak{q}_\mathfrak{a}\,\mathfrak{x}^\mathfrak{a}), \tag{23}$$

دیده میشود

$$\delta[h(\phi)] = \int \mathrm{d}\,B\ \exp[-\grave{\beta}\,B_\mathfrak{a}\,h^\mathfrak{a}(\phi)]. \tag{24}$$

البته (23) با یک بهنجارش ِ خاص برا یِ اندازه یِ انتگرال-گیری درست است، و به شرط ی که نما یِ انتگرال-ده مُهومی یِ محض باشد. B و اندازه یِ متناظر با آن در (24) را چنان میگیرم که این شرطها براورده شوند. به این ترتیب، با وارد-کردن ِ میدان ِ اضافی یِ B میشود دلتا در انتگرالده یِ (21) را به شکل ِ انتگرال ِ یک نمایی نوشت.

میمانَد دترمینان ی که در رابطه یِ (21) آمده. برا یِ نوشتن ِ دترمینان ِ یک عملگر ِ خطی، میشود متغیرها یِ گراسمانی را به کار برد (مثلَن [2]). یک دسته متغیر ِ گراسمانی یِ ξ چیزها یی یَند که با هم پادجاّیجا میشوند:

$$\xi^\mathfrak{a}\,\xi^\mathfrak{b} + \xi^\mathfrak{b}\,\xi^\mathfrak{a} = 0. \tag{25}$$

از جمله مجذور ِ هر یک از این متغیرها صفر است. به این ترتیب هر تابع ی از این متغیرها، نسبت به هر متغیر دست- ِ-بالا خطی ست. انتگرال-گیری بر این متغیرها را با ویژگی یِ معمول ِ خطی-بودن نسبت انتگرال-ده تعریف میکنم، همراه با این که اگر انتگرال-ده انتقال یابد، انتگرال تغییر نکند. نتیجه یِ این دومی آن است که

$$\int \mathrm{d}\,\xi\,(\xi - \eta) = \int \mathrm{d}\,\xi\,(\xi), \tag{26}$$

که در ترکیب با خطی-بودنِ انتگرال نسبت به انتگرال-ده به این مینجامد که

$$\int \mathrm{d}\,\xi = 0. \tag{27}$$

به این ترتیب متناظر با تابعِ $\mathfrak{f}$ از متغیرها یِ گراسمانی یِ ξ و $\bar{\xi}$ و ماتریسِ $\mathfrak{M}$

$$\int \mathrm{d}\,\bar{\xi}\,\mathrm{d}\,\xi\,\mathfrak{f}(\bar{\xi}_{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{M}^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}\,\xi^{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{F}\int \mathrm{d}\,\bar{\xi}\,\mathrm{d}\,\xi\,(\bar{\xi}_{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{M}^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}\,\xi^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{n}}, \tag{28}$$

که $\mathfrak{n}$ تعدادِ $\xi^{\mathfrak{a}}$ ها (برابر با تعدادِ $\bar{\xi}_{\mathfrak{a}}$ ها) است، و $\mathfrak{F}$ ضریبِ جمله یِ با بزرگترین درجه ($\mathfrak{n}$) در $\mathfrak{f}$ است. طرفِ راستِ رابطه یِ بالا نسبت به سطرها (یا ستونها) یِ $\mathfrak{M}$ پادمتقارن است، پس متناسب با دترمینیانِ $\mathfrak{M}$ است. به این ترتیب، با بهنجارشِ مناسبِ اندازه یِ انتگرال-گیری،

$$\det[M(\phi)] = \int \mathrm{d}\,\bar{C}\,\mathrm{d}\,C\,\exp\{-\grave{\beta}\,\bar{C}_{\mathfrak{a}}[M^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}(\phi)]C^{\mathfrak{b}}\}. \tag{29}$$

روابطِ (24) و (29) را در (21) میگذارم:

$$\langle F(\Phi)\rangle_{\mathrm{r}} = \int_{\mathbb{V}} \mathrm{d}\,\phi\,\mathrm{d}\,B\,\mathrm{d}\,\bar{C}\,\mathrm{d}\,C\,F(\phi)\,\exp[-\grave{\beta}\,S_{\mathrm{e}}(\phi,B,\bar{C},C)], \tag{30}$$

که

$$S_{\mathrm{e}}(\phi,B,\bar{C},C) = S(\phi) + B\,h(\phi) + \bar{C}[M(\phi)]C. \tag{31}$$

با شاخصها،

$$S_{\mathrm{e}}(\phi,B,\bar{C},C) = S(\phi) + B_{\mathfrak{a}}\,h^{\mathfrak{a}}(\phi) + \bar{C}_{\mathfrak{a}}[M^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}(\phi)]C^{\mathfrak{b}}. \tag{32}$$

به S_{e} کنشِ مئثر، و به متغیرها یِ گراسمانی یِ $\bar{C}$ و C شبح میگویند. از (20) دیده میشود

$$M(\phi) = [(\mathrm{D}\,h)(\phi)]\{[\mathrm{D}(\ell_{\bullet}\,\phi)](1)\}, \tag{33}$$

که با تعریفِ

$$\ell_T\,\phi = [\mathrm{D}(\ell_{\bullet}\,\phi)](1), \tag{34}$$

میشود

$$M(\phi) = [(\mathrm{D}\, h)(\phi)](\ell_T\, \phi). \tag{35}$$

با شاخصها،

$$M^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}(\phi) = [(\mathrm{D}_{\mathfrak{i}}\, h^{\mathfrak{a}})(\phi)](\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\, \phi^{\mathfrak{i}}). \tag{36}$$

به این ترتیب،

$$S_{\mathrm{e}}(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B\, h(\phi) + \bar{C}[(\mathrm{D}\, h)(\phi)](\ell_T\, \phi)C. \tag{37}$$

با شاخصها،

$$S_{\mathrm{e}}(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) + B_{\mathfrak{a}}\, h^{\mathfrak{a}}(\phi) + \bar{C}_{\mathfrak{a}}[(\mathrm{D}_{\mathfrak{i}}\, h^{\mathfrak{a}})(\phi)](\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\, \phi^{\mathfrak{i}})C^{\mathfrak{b}} \tag{38}$$

5 تبدیل ِ بی-آر-اِس-تی

نتیجه یِ تقارن ِ کنش ِ S تحت ِ گروه ِ $\mathcal{G}$ این است که

$$[(\mathrm{D}\, S)(\phi)](\ell_T\, \phi) = 0. \tag{39}$$

از جمله،

$$[(\mathrm{D}\, S)(\phi)](\ell_T\, \phi)C = 0. \tag{40}$$

اثر ِ تبدیل ِ گراسمانی یِ Q بر ϕ را چنین تعریف میکنم.

$$Q\, \phi = (\ell_T\, \phi)C. \tag{41}$$

با شاخصها،

$$Q\, \phi^{\mathfrak{i}} = (\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\, \phi^{\mathfrak{i}})C^{\mathfrak{b}}. \tag{42}$$

به این ترتیب،

$$Q[S(\phi)] = 0. \tag{43}$$

میخاهم اثرِ Q بر متغیرها یِ دیگر را چنان تعریف کنم که اثرِ Q بر $S_{\rm e}$ صفر شود. دیده میشود

$$Q[h(\phi)] = [(\mathrm{D}\, h)(\phi)](\ell_T\, \phi)C. \tag{44}$$

پس (با توجه به این که Q و $\bar{C}$ هر-دُ گراسمانی یَند)،

$$\begin{aligned} Q[\bar{C}\, h(\phi)] &= (Q\, \bar{C})\, h(\phi) - \bar{C}\{Q[h(\phi)]\},\\ &= (Q\, \bar{C})\, h(\phi) - \bar{C}[(\mathrm{D}\, h)(\phi)](\ell_T\, \phi)C. \end{aligned} \tag{45}$$

با تعریفِ اثرِ Q بر $\bar{C}$ به شکلِ

$$Q\, \bar{C} = -B, \tag{46}$$

دیده میشود

$$Q[\bar{C}\, h(\phi)] = -B\, h(\phi) - \bar{C}[(\mathrm{D}\, h)(\phi)](\ell_T\, \phi)C. \tag{47}$$

پس،

$$S_{\rm e}(\phi, B, \bar{C}, C) = S(\phi) - Q[\bar{C}\, h(\phi)]. \tag{48}$$

اثرِ Q بر جمله یِ اولِ طرفِ راست صفر است: رابطه یِ (43). اثرِ Q بر جمله یِ دوم هم صفر خاهد بود، به شرط ی که Q^2 صفر باشد. البته انتظار میرود Q^2 صفر باشد، چون Q گراسمانی ست. ولی برا یِ تحققِ این انتظار باید اثرِ Q بر متغیرها یِ باقی-مانده مناسب تعریف شود. از (46) دیده میشود

$$Q\, B = 0. \tag{49}$$

برا یِ تعیین ِ اثر ِ Q بر C هم (42) را به کار میبرم:

$$\begin{aligned}0 &= Q^2\,\phi^{\mathfrak{i}},\\ &= [\mathrm{D}_{\mathfrak{j}}(\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})](\ell_{T_{\mathfrak{a}}}\,\phi^{\mathfrak{j}})C^{\mathfrak{a}}\,C^{\mathfrak{b}} + (\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})(Q\,C^{\mathfrak{b}}),\\ &= \frac{1}{2}\{[\mathrm{D}_{\mathfrak{j}}(\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})](\ell_{T_{\mathfrak{a}}}\,\phi^{\mathfrak{j}}) - [\mathrm{D}_{\mathfrak{j}}(\ell_{T_{\mathfrak{a}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})](\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{j}})\}C^{\mathfrak{a}}\,C^{\mathfrak{b}}\\ &\quad + (\ell_{T_{\mathfrak{c}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})(Q\,C^{\mathfrak{c}}).\end{aligned} \tag{50}$$

این به کار رفته که $(C^{\mathfrak{a}}\,C^{\mathfrak{b}})$ نسبت به جابِجایی یِ شاخصها پادمتقارن است. از این که $\ell_{T_{\mathfrak{a}}}$ ها نمایش ِ جبر ِ متناظر با گروه ِ $\mathcal{G}$ اند، نتیجه میشود

$$f^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}(\ell_{T_{\mathfrak{c}}}\,\phi^{\mathfrak{i}}) = -\{[\mathrm{D}_{\mathfrak{j}}(\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})](\ell_{T_{\mathfrak{a}}}\,\phi^{\mathfrak{j}}) - [\mathrm{D}_{\mathfrak{j}}(\ell_{T_{\mathfrak{a}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})](\ell_{T_{\mathfrak{b}}}\,\phi^{\mathfrak{j}})\}, \tag{51}$$

که f ثابت- ِ-ساختار ِ جبر ِ متناظر با $\mathcal{G}$ است. به این ترتیب،

$$0 = (\ell_{T_{\mathfrak{c}}}\,\phi^{\mathfrak{i}})\left(-\frac{1}{2}\,f^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\,C^{\mathfrak{a}}\,C^{\mathfrak{b}} + Q\,C^{\mathfrak{c}}\right). \tag{52}$$

پس با تعریف ِ

$$Q\,C^{\mathfrak{c}} = \frac{1}{2}\,f^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}\,C^{\mathfrak{a}}\,C^{\mathfrak{b}}, \tag{53}$$

سازگاری تضمین میشود. به Q تبدیل ِ بی-آر-اِس-تی میگویند.

6 پانوشتها

[1] BRST

[2] Lev V. Prokhorov & Sergei V. Shabanov; "Hamiltonian mechanics of gauge systems (Cambridge, 2011) chapter 1