X1-113 (2016/01/28)

خمش، حجم، مساحت

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

رابطه یِ حجم ِ یک گوی و مساحت ِ یک کره با خمش بررسی میشود.

1 مختصات ِ همطول

خمینه یِ ریمانی یِ $\mathbb{M}$ با هموستار ِ لِوی-چیویتا [1] را در نظر میگیرم. ژئُدزیکهایی که از نقطه یِ O در این خمینه میگذرند با بردار ِ مماس بر ژئُدزیک (مشتق ِ ژئُدزیک نسبت به پارامتر َش) در O مشخص میشوند:

$$(\mathsf{D}\,\gamma_u)[(\gamma_u)^{-1}(O)] = u, \tag{1}$$

که γ_u ژئُدزیک ی ست که مشتق َش در O برابر ِ u است. D مشتقگیری ست. پارامتر ِ ژئُدزیک را پارامتر ِ آفین میگیرم، چنان که مقدار ِ این پارامتر در O صفر باشد:

$$\gamma_u(0) = O. \tag{2}$$

به این ترتیب (1) میشود

$$(\mathsf{D}\,\gamma_u)(0) = u. \tag{$1'$}$$

از این که t پارامترِ آفین است نتیجه میشود طولِ مشتقِ ژئُدزیک ثابت است. به این ترتیب،

$$s(t) = t\,\sqrt{u\cdot u}, \tag{3}$$

که $s(t)$ طولِ ژئُدزیک از O تا $\gamma_u(t)$ است. مختصاتِ همطولِ y در یک همسایگی یِ O را چنین تعریف میکنم:

$$y[\gamma_u(t)] = t\,u. \tag{4}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} s(t) &= \sqrt{y\cdot y},\\ &=: |y|, \end{aligned} \tag{5}$$

که ضربِ درونی برا یِ y با هم ان ضربِ درونی در فضا یِ مماس در O تعریف شده.

مختصاتِ همطول یک تعمیمِ مختصاتِ دِکَرتی در فضاها یِ تخت است. در یک فضا یِ تخت میشود مختصات را چنان گرفت که مئلفِها یِ متریک ثابت شوند. این مختصات را y مینامم. معادله یِ ژئُدزیک با پارامترِ آفین، در این مختصات میشود

$$\mathsf{D}^2 y^i = 0, \tag{6}$$

که جواب َش میشود

$$y^i = a^i + t\,u^i. \tag{7}$$

a^i ها و u^i ها ثابت َند. (7) هم ان (4) است، به شرط ی که a^i ها صفر انتخاب شوند (انتخابِ مبدئ برا یِ y).

2 معادله یِ ژئُدزیک

معادله یِ ژئُدزیک بر حسبِ مختصاتِ دلبخاهِ x میشود

$$\mathsf{D}^2x^i + \Gamma^i{}_{j\,k}\,(\mathsf{D}x^j)\,(\mathsf{D}x^k) = 0, \tag{8}$$

که Γ هموستار است. متناظر با هر نقطه یِ O میشود مختصاتِ x را چنان برگزید که در نقطه یِ O هموستار صفر شود. این شرط را بر مختصاتِ x اعمال میکنم، همراه با این که x^i ها در O صفر شوند. در این صورت،

$$\Gamma^i{}_{j\,k} = [(\partial_l\,\Gamma^i{}_{j\,k})(O)]\,x^l + o(x), \tag{9}$$

(که مشتقها یِ پارِئی نسبت به x اند) و معادله یِ ژئُدزیک ی که از O میگذرد میشود

$$\mathsf{D}^2x^i + [(\partial_l\,\Gamma^i{}_{j\,k})(O)]\,x^l\,u^j\,u^k + o(t) = 0, \tag{10}$$

که

$$u^i = (\mathsf{D}x^i)(0), \tag{11}$$

و پارامتر-ِ-آفینِ t چنان است که

$$x^i(0) = 0, \tag{12}$$

یعنی خم در $(t = 0)$ از نقطه یِ O میگذرد. از (10) نتیجه میشود

$$x^i(t) = u^i\,t + o(t), \tag{13}$$

و از آنجا،

$$\mathsf{D}^2x^i + [(\partial_l\,\Gamma^i{}_{j\,k})(O)]\,u^l\,u^j\,u^k\,t + o(t) = 0, \tag{14}$$

که نتیجه میدهد

$$x^i(t) = u^i\,t - \frac{1}{6}\,[(\partial_l\,\Gamma^i{}_{j\,k})(O)]\,u^l\,u^j\,u^k\,t^3 + o(t). \tag{15}$$

بر حسبِ مختصاتِ همطولِ y که با (4) تعریف شده

$$x^i = y^i - \frac{1}{6}\,[(\partial_l\,\Gamma^i{}_{j\,k})(O)]\,y^l\,y^j\,y^k + o(y). \tag{16}$$

در ادامه یِ کار، مختصاتِ x و y هم ینها یی یند که اینجا تعریف شدند.

3 متریک

مئلفِها یِ متریک ِ g در مختصات ِ x را با $g_{i\,j}$ ها، و مئلفِها یِ متریک ِ g در مختصات ِ y را با $\tilde{g}_{i\,j}$ ها نشان میدهم.

توجه: متریک ی که با آن ضرب ِ درونی برا یِ خُد ِ مختصات ِ همطول تعریف شد، با این متریک فرق دارد. ضرب ِ درونی برا یِ مختصات ِ همطول با متریک در نقطه یِ O یعنی با $g(O)$ تعریف شده.

بین ِ هموستار و متریک این رابطه هست (مثلَن فصل ِ 3 از [2]).

$$\partial_p g_{i\,j} = \Gamma_{i\,p\,j} + \Gamma_{j\,p\,i}. \tag{17}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{i\,j} &= g_{k\,l}\,\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\,\frac{\partial x^l}{\partial y^j}, \\
&= g_{k\,l}\,\left\{\delta_i^k - \frac{1}{6}\,[(\partial_i\Gamma^k{}_{m\,n})(O) + 2\,(\partial_m\Gamma^k{}_{i\,n})(O)]\,y^m\,y^n\right\} \\
&\quad \left\{\delta_j^l - \frac{1}{6}\,[(\partial_j\Gamma^l{}_{p\,q})(O) + 2\,(\partial_p\Gamma^l{}_{j\,q})(O)]\,y^p\,y^q\right\} + \cdots\,, \\
&= g_{i\,j} - \frac{1}{6}\,[(\partial_i\Gamma_{j\,m\,n})(O) + 2\,(\partial_m\Gamma_{j\,i\,n})(O) \\
&\quad + (\partial_j\Gamma_{i\,m\,n})(O) + 2\,(\partial_m\Gamma_{i\,j\,n})(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\,.
\end{aligned} \tag{18}$$

چون هموستار و در نتیجه مشتق ِ مئلفِها یِ متریک در O صفر است،

$$\begin{aligned}
g_{i\,j} &= g_{i\,j}(O) + \frac{1}{2}\,[(\partial_m\partial_n g_{i\,j})(O)]\,x^m\,x^n + \cdots\,, \\
&= g_{i\,j}(O) + \frac{1}{2}\,[(\partial_m\Gamma_{i\,n\,j})(O) + (\partial_m\Gamma_{j\,n\,i})(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{i\,j} &= g_{i\,j}(O) - \frac{1}{6}[(\partial_i\Gamma_{j\,m\,n})(O) - (\partial_m\Gamma_{j\,i\,n})(O) \\
&\quad + (\partial_j\Gamma_{i\,n\,m})(O) - (\partial_n\Gamma_{i\,j\,m})(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

تقارن ِ Γ نسبت به شاخصها یِ دوم و سوم َش، و نیز ِ تقارن ِ ضریب ِ کروشه نسبت به شاخصها یِ m و n به کار رفته. چون Γ در O صفر است،

$$R_{j\,n\,i\,m}(O) = (\partial_i\Gamma_{j\,m\,n})(O) - (\partial_m\Gamma_{j\,i\,n})(O), \tag{21}$$

که R تانسُر ِ ریمان [3] است (مثلَن فصل ِ 6 از [2]). به این ترتیب،

$$\tilde{g}_{i\,j} = g_{i\,j}(O) - \frac{1}{6}[(R_{j\,n\,i\,m} + R_{i\,m\,j\,n})(O)]\, y^m\, y^n + \cdots\,, \tag{22}$$

که با استفاده از تقارنها یِ تانسُر ِ ریمان [3] (مثلَن فصل ِ 6 از [2]) نتیجه میدهد

$$\tilde{g}_{i\,j} = g_{i\,j}(O) - \frac{1}{3}\,[R_{i\,m\,j\,n}(O)]\, y^m\, y^n + \cdots\,. \tag{23}$$

4 عنصر ِ حجم

عنصر- ِ-حجم ِ $\mathrm{d}V$ که با متریک سازگار است چنین است.

$$\mathrm{d}V = \sqrt{\det(g\,\delta_x)}\,\mathrm{d}^D x, \tag{24}$$

که δ_x یک تانسُر ِ متقارن است که در پایه یِ مختصاتی یِ x

$$(\delta_x)^{j\,k} = \delta^{j\,k}. \tag{25}$$

مانسته یِ (24) را میشود برا یِ مختصات ِ y نوشت. از (23) نتیجه میشود

$$\tilde{g}_{i\,j}\,(\delta_y)^{j\,k} = \{\delta_i^p - \frac{1}{3}\,[R_{i\,m}{}^p{}_n(O)]\, y^m\, y^n + \cdots\}\,[g_{p\,j}(O)]\,\delta^{j\,k}, \tag{26}$$

و از آنجا،

$$\det(\tilde{g}\,\delta_y) = [\det(M)]\,\big(\det\{[g(O)]\,\delta\}\big), \tag{27}$$

که

$$M_i^p = \delta_i^p - \frac{1}{3}\,[R_{i\,m}{}^p{}_n(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\,,$$
$$=: \delta_i^p + N_i^p. \tag{28}$$

با استفاده از

$$\det(1+N) = 1 + \mathrm{tr}(N) + \cdots\,, \tag{29}$$

دیده میشود

$$\det(M) = 1 - \frac{1}{3}\,[R_{i\,m}{}^i{}_n(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\,,$$
$$= 1 - \frac{1}{3}\,[\mathsf{Rc}_{m\,n}(O)]\,ym\,y^n + \cdots\,, \tag{30}$$

که Rc تانسُر ِ ریچی [4] است. به این ترتیب،

$$\mathrm{d}V = \left\{1 - \frac{1}{6}\,[\mathsf{Rc}_{m\,n}(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\right\}\,\big(\det\{[g(O)]\,\delta\}\big)\,\mathrm{d}^D y, \tag{31}$$
$$=: \left\{1 - \frac{1}{6}\,[\mathsf{Rc}_{m\,n}(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\right\}\,\mathrm{d}V_0, \tag{32}$$

که $\mathrm{d}V_0$ عنصر ِ حجم در فضا یِ تخت است.

5 حجم ِ گوی

گوی ِ به شعاع ِ r به مرکز ِ O مجموعه یِ همه یِ نقاط ی ست که فاصله یِشان (رو یِ ژئُدزیک) از O کوچکتر از یا برابر با r است. گوی ِ به شعاع ِ r به مرکز ِ O را با $\mathbb{B}_O(r)$ نشان میدهم. به این ترتیب، با استفاده از (5) دیده میشود

$$\mathbb{B}_O(r) = \{\xi \in \mathbb{M} \mid |y(\xi)| \le r\}. \tag{33}$$

حجم ِ مجموعه یِ $\mathbb{A}$ را با $\mathsf{vol}(\mathbb{A})$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\mathsf{vol}[\mathbb{B}_O(r)] = \int_{|y|\le r} \left\{1 - \frac{1}{6}\,[\mathsf{Rc}_{m\,n}(O)]\,y^m\,y^n + \cdots\right\}\,\mathrm{d}V_0. \tag{34}$$

$\mathrm{d}V_0$ بر حسبِ مختصاتِ کروی چنین میشود

$$\mathrm{d}V_0 = |y|^{D-1}\, \mathrm{d}|y|\, \mathrm{d}\Omega, \tag{35}$$

که $\mathrm{d}\Omega$ عنصرِ زاویه یِ فضایی یِ $(D-1)$-بُعدی ست. از تقارن تحتِ دروان دیده میشود

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \frac{y^m}{|y|}\, \frac{y^n}{|y|} = a\, g^{m\,n}(O). \tag{36}$$

مقدارِ a هم چنین به دست میئاید.

$$\begin{aligned} a\, D &= g_{m\,n}(O) \int \mathrm{d}\Omega\, \frac{y^m}{|y|}\, \frac{y^n}{|y|}, \\ &= \int \mathrm{d}\Omega, \qquad (37) \\ &=: \Omega_{D-1}, \qquad (38) \end{aligned}$$

که Ω_{D-1} زاویه یِ فضایی یِ $(D-1)$ بُعدی ست. به این ترتیب،

$$\int \mathrm{d}\Omega\, \frac{y^m}{|y|}\, \frac{y^n}{|y|} = \frac{g^{m\,n}(O)}{D}\, \Omega_{D-1}. \tag{39}$$

از این و (34) و (35) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \mathsf{vol}[\mathbb{B}_O(r)] &= \Omega_{D-1} \int_0^r \mathrm{d}|y|\, |y|^{D-1} \left[1 - \frac{|y|^2}{6\,D}\, (g^{m\,n}\, \mathsf{Rc}_{m\,n})(O) + \cdots\right], \\ &= \left[1 - \frac{r^2}{6\,(D+2)}\, \mathcal{R}(O) + \cdots\right] \frac{\Omega_{D-1}\, r^D}{D}, \qquad (40) \\ &=: \left[1 - \frac{r^2}{6\,(D+2)}\, \mathcal{R}(O) + \cdots\right] \mathsf{vol}_0[\mathbb{B}_O(r)], \qquad (41) \end{aligned}$$

که vol_0 حجم در فضا یِ تخت، و $\mathcal{R}$ خمشِ اسکالر است. به این ترتیب،

$$\frac{\mathsf{vol}[\mathbb{B}_O(r)]}{\mathsf{vol}_0[\mathbb{B}_O(r)]} = 1 - \frac{r^2}{6\,(D+2)}\, \mathcal{R}(O) + \cdots . \tag{42}$$

6 مساحت ِ کره

کره یِ به شعاع ِ r به مرکز ِ O مجموعه یِ همه یِ نقاط ی ست که فاصله یِشان (رو یِ ژئُدزیک) از O برابر با r است. کره یِ به شعاع ِ r به مرکز ِ O را با $\mathbb{S}_O(r)$ نشان میدهم. به این ترتیب، با استفاده از (5) دیده میشود

$$\mathbb{S}_O(r) = \{\xi \in \mathbb{M} \mid |y(\xi)| = r\}. \tag{43}$$

مساحت ِ مجموعه یِ $\mathbb{A}$ را با $\mathsf{ar}(\mathbb{A})$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$\mathsf{ar}[\mathbb{S}_O(r)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\{\mathsf{vol}[\mathbb{B}_O(r)]\}. \tag{44}$$

از این و (40) نتیجه میشود

$$\mathsf{ar}[\mathbb{S}_O(r)] = \left[1 - \frac{r^2}{6\,D}\,\mathcal{R}(O) + \cdots\right]\,\Omega_{D-1}\,r^{D-1}, \tag{45}$$

$$=: \left[1 - \frac{r^2}{6\,D}\,\mathcal{R}(O) + \cdots\right]\,\mathsf{ar}_0[\mathbb{S}_O(r)], \tag{46}$$

که ar_0 مساحت در فضا یِ تخت است. به این ترتیب،

$$\frac{\mathsf{ar}[\mathbb{S}_O(r)]}{\mathsf{ar}_0[\mathbb{S}_O(r)]} = 1 - \frac{r^2}{6\,D}\,\mathcal{R}(O) + \cdots\,. \tag{47}$$

7 پانوشتها

[1] Levi-Civita

[2] Steven Weinberg; “Gravitation and cosmology; principles and applications of the general theory of relativity” (John Wiley & Sons, 1972)

[3] Riemann

[4] Ricci