

X1-104 (2014/11/28)

## تبادل ستاره‌ها ی عادی

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

تبادل ستاره‌ها ی عادی بررسی میشود و تخمین ی برا ی رابطه ی ویژه گیها ی یک ستاره با جرم آن به دست میآید.

### 0 درآمد

ستاره سیستم همگن ی نیست. اما برا ی تخمین مشخصه‌ها یش آن را با یک سیستم همگن تقریب میکنم. این مشخصه‌ها از معادله‌ها ی زیر به دست میآیند.

i معادله ی حالت یک رابطه بین فشار، دما، و چگالی ی ستاره است. البته چگالی بر حسب جرم و شعاع به دست میآید. پس معادله ی حالت یک رابطه بین فشار، دما، جرم، و شعاع است.

ii تبادل دینامیکی ی ستاره وقت ی ست که اثر فشار اثر نیرو ی گرانشی را خنثا کند. این یک رابطه بین فشار، جرم، و شعاع است. این فشار هم ان است که از معادله ی حالت به دست میآید. پس با حذف فشار یک رابطه بین دما، جرم، و شعاع به دست میآید.

iii توان ستاره با آهنگ واکنشها بر حجم، و حجم ستاره متناسب است. آهنگ واکنشها به

چگالی و دما مربوط است. پس یک رابطه بین توان، دما، جرم، و شعاع هست.

iv در تعادل، توان ستاره از سطح ستاره به بیرون میتابد. توان تابیده از سطح متناسب با مساحت سطح و توان چهارم دما است. پس یک رابطه بین توان، دما، و شعاع هست.

به این ترتیب 4 رابطه بین 5 کمیت فشار، دما، توان، شعاع، و جرم هست، که علی‌الاصول میشود 4 کمیت را بر حسب یک ی (مثلن جرم) به دست آورد.

## 1 فشار و معادله ی حالت

گاز ستاره را ناتبه‌گن گرفته‌ام. پس فشار نقطه-ی-صفر فرمیونی را کنار میگذارم. 2 عامل سازنده ی فشار میماند. یک ی فشار ناشی از اتمها ی گاز است، و دیگری فشار تابشی. فشار ناشی از اتمها را با  $P_g$  نشان میدهم و برای آن تقریب گاز کامل را به کار میبرم:

$$P_g \doteq \frac{N k_B T}{V}, \quad (1)$$

که  $N$  تعداد اتمها،  $T$  دما،  $V$  حجم، و  $k_B$  ثابت بُلْتسمان [1] است.  $(X \doteq Y)$  یعنی  $X$  و  $Y$  تا حد یک ضریب بیبُعد مستقل از متغیرها با هم برابرند. جرم هر اتم را با  $m$ ، و چگالی ی جرم را با  $\rho$  نشان میدهم. البته ستاره نُعَن از اتمها ی مختلف ساخته شده، دست-کم هیدروژن و هلیوم.  $m$  یک جرم میانگین است. به این ترتیب،

$$\rho \doteq \frac{m N}{V}. \quad (2)$$

همچنین،

$$V \doteq R^3, \quad (3)$$

که  $R$  شعاع ستاره است. پس

$$\begin{aligned} P_g &\doteq \frac{k_B}{m} \rho T, \\ &\doteq \frac{k_B}{m} M R^{-3} T. \end{aligned} \quad (4)$$

فشار تابشی را با  $P_{\text{t}}$  نشان می‌دهم و برای آن تقریب فشار تابش جسم - سیاه را به کار می‌برم (مثلن فصل 7 از [2]):

$$P_{\text{t}} \doteq \sigma c^{-1} T^4, \quad (5)$$

که  $\sigma$  ثابت شتفان-بلمتسمان [3] است.

این دُ-شکل فشار را به این شکل عمومی مینویسم.

$$P \doteq \alpha (M R^{-3})^p T^q, \quad (6)$$

یا

$$P \doteq \alpha (M R^{-3})^p T^{4-3p}, \quad (7)$$

که  $\alpha$  ثابتی است که به  $p$  و  $q$  (یا در واقع  $p$ ) بستگی دارد.  $p$  برای گاز کامل 1 و برای تابش 0 است.

## 2 فشار و گرانش

شتاب  $g(r)$  گرانشی یک جسم کروی-متقارن، در فاصله  $r$  از مرکز جسم  $g(r)$  است، که

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}. \quad (8)$$

$G$  ثابت جهانی گرانش است.  $M(r)$  هم جرم بخش  $r$  از جسم است که درون گوی  $r$  به شعاع  $r$  است. شرط تعادل برای  $r$  برای یک لایه ای نازک کروی از جسم به فاصله  $r$  از مرکز، میشود

$$\frac{d[P(r)]}{dr} = -\rho(r)g(r), \quad (9)$$

که  $P(r)$  و  $\rho(r)$ ، به ترتیب، فشار و چگالی  $r$  از مرکز  $r$  از مرکز است. (8) شتاب گرانشی را بر حسب چگالی میدهد. به این ترتیب (9) یک رابطه بین فشار و چگالی میشود. اما مقدار  $\rho(r)$  را

فشار را میشود ساده‌تر تخمین زد. (9) را چنین مینویسم.

$$\frac{P}{R} \doteq \rho g, \quad (10)$$

که همه  $\rho$  مقدارها  $\rho$  یند. همچنین،

$$g \doteq \frac{GM}{R^2}. \quad (11)$$

به این ترتیب،

$$P \stackrel{\circ}{=} G M^2 R^{-4}. \quad (12)$$

شرط تعادل هم بین رابطه است، که در آن  $P$  در رژیم‌ها ی مختلف از (7) به دست می‌آید:

$$G M^2 R^{-4} \stackrel{\circ}{=} \alpha (M R^{-3})^p T^{4-3p}, \quad (13)$$

که از آن دما بر حسب جرم و شعاع به دست می‌آید:

$$T = b M^{(2-p)/(4-3p)} R^{-1}. \quad (14)$$

$b$  ثابت ی ست که به  $p$  بسته گی دارد.

### 3 توان و واکنشها

توان تولید شده در ستاره را با  $I$  نشان می‌دهم. توان برابر است با  $\mathfrak{R}$  (تعداد برخورد‌ها بر زمان بر حجم)، ضرب در احتمال همجوشی طی برخورد، ضرب در انرژی ی آزاد شده طی هر برخورد. تعداد برخورد‌ها بر زمان بر حجم با چگالی ی ذره‌ها ضرب در چگالی ی شار ذره‌ها متناسب است، که این دومی برابر است با چگالی ی ذره‌ها ضرب در سرعت شان. و سرعت نُعی ی ذره‌ها هم با جذر انرژی ی نُعی ی ذره‌ها متناسب است، یعنی با جذر دما متناسب است. پس،

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &\propto \rho (\rho T^{1/2}), \\ &\propto M^2 R^{-6} T^{1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

برای این که برخورد به همجوشی بینجامد، انرژی ی ذرات باید از حد معین ی بیشتر باشد. احتمال این که چنین باشد، با افزایش دما زیاد میشود. پس احتمال همجوشی طی برخورد یک تابع صعودی از دما ست. یک مدل ساده این است که احتمال همجوشی طی برخورد با  $T$  به یک توان مثبت متناسب است. به این ترتیب،

$$I = \epsilon M^2 R^{-3} T^\alpha, \quad (16)$$

که  $\epsilon$  یک ثابت است، و ثابت  $\alpha$  هم از (1/2) بزرگتر است.

## 4 توان و تابش

توان ی که از سطح ستاره به بیرون می‌تابد را با توان تابیده از یک جسم سیاه تقریب می‌کنم. به این ترتیب،

$$I \cong \sigma T^4 R^2. \quad (17)$$

در تعادل، این هم‌ان‌توان رابطه ی (16) است. پس،

$$\sigma T^4 R^2 \cong c M^2 R^{-3} T^\alpha, \quad (18)$$

که نتیجه می‌دهد

$$T \cong \delta M^{2/(4-\alpha)} R^{-5/(4-\alpha)}. \quad (19)$$

$\delta$  یک ثابت است.

## 5 بسته‌گی کمیته‌ها به جرم

از ترکیب (14) و (19) شعاع و دما بر حسب جرم به دست می‌آیند. با گذاشتن حاصل در (12) و (17) هم فشار و توان به دست می‌آیند. عمر ستاره را با  $L$  نشان می‌دهم. عمر ستاره با جرم ستاره تقسیم بر توان آن متناسب است:

$$L \propto M I^{-1}. \quad (20)$$

به این ترتیب،

$$R \propto M^{-(2p-2\alpha+p\alpha)/[(4-3p)(1+\alpha)]}. \quad (21)$$

$$T \propto M^{(2+p)/[(4-3p)(1+\alpha)]}. \quad (22)$$

$$P \propto M^{(8+2p-2p\alpha)/[(4-3p)(1+\alpha)]}. \quad (23)$$

$$I \propto M^{(8+4\alpha-2p\alpha)/[(4-3p)(1+\alpha)]}. \quad (24)$$

$$L \propto M^{-(4+3p+p\alpha)/[(4-3p)(1+\alpha)]}. \quad (25)$$

برای گازِ کامل،

$$R_g \propto M^{-(2-\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (26)$$

$$T_g \propto M^{3/(1+\alpha)}. \quad (27)$$

$$P_g \propto M^{(10-2\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (28)$$

$$I_g \propto M^{(8+2\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (29)$$

$$L_g \propto M^{-(7+\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (30)$$

و برای تابش،

$$R_t \propto M^{\alpha/(2+2\alpha)}. \quad (31)$$

$$T_t \propto M^{1/(2+2\alpha)}. \quad (32)$$

$$P_t \propto M^{2/(1+\alpha)}. \quad (33)$$

$$I_t \propto M^{(2+\alpha)/(1+\alpha)}. \quad (34)$$

$$L_t \propto M^{-1/(1+\alpha)}. \quad (35)$$

از جمله دیده میشود با افزایش جرم ستاره، دمای ستاره زیاد و عمر ستاره کم میشود.

## 6 پانوشتها

- [1] Boltzmann
- [2] R. K. Pathria & Paul D. Beale; "statistical mechanics" 3rd edition (Elsevier, 2011)
- [3] Stefan-Boltzmann