X1-101 (2014/07/25)

تخمین ِ جرم و شعاع ِ ستاره‌ها یِ تبهگن

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

تخمین ی برا یِ جرم و شعاع ِ ستاره‌ها یِ تبهگن، بر اساس ِ ثابتها یِ بنیادی و جرم ِ ذره‌ها یِ سازنده به دست می‌آید.

0 درامد

ستاره یِ تبهگن ستاره ای ست که چگالی یَش آن قدر زیاد است که فاصله یِ نُعی یِ ذره‌ها از هم با طول- ِ-مُج ِ دُبرُی [1]ِ ذره‌ها قابل- مقایسه است. البته ممکن است ستاره چند نُع ذره داشته باشد، مثل ِ یک کوتوله یِ سفید که ذره‌ها یِ سازنده اَش عمدتَن الکترُن، و هسته یِ هیلم ِ 4 اند. در این صورت ممکن است شرط ِ تبهگنی برا یِ بعض ی ذره‌ها براورده شده باشد و برا یِ بعض ی نَ. وقت ی چگالی چنان زیاد است که ستاره تبهگن است، آثار ِ کوانتمی یِ تشخیص-ناپذیری یِ ذره‌ها مهم میشود. این آثار، اگر ذره‌ها بُزُن باشند به کاهش ِ فشار (یک برهمکنش ِ مئثر ِ رباینده) ، و اگر ذره‌ها فرمیُن باشند به افزایش ِ فشار (یک برهمکنش ِ مئثر ِ راننده) مینجامد، فصل ِ 5 از [2]. از این پس بحث را محدود میکنم به ستاره‌ها یِ تبهگن ِ فرمیُنی. در چنین ستاره‌ها یی وقت ی دما (در مقایسه با دما یِ فِرمی [3]) کم شود، فشار هم ان فشار ِ ناشی از تشخیص-ناپذیری یِ کوانتمی یِ فرمیُنها یِ یکسان است، که به آن

فشارِ نقطه-یِ-صفر می‌گویند. فرض می‌کنم ستاره در چنین حال ی ست. این فشار باید با گرانشِ ستاره به تعادل برسد، تا ستاره پایدار بماند. محاسبه یِ این تعادل مفصل است. یک شکلِ ساده-شده اَش در فصلِ 8 از [2] آمده. اما نتیجه یِ نهایی ساده است: وقت ی آثارِ نسبیتی در نظر گرفته شوند، برا یِ ستاره یک حد-ِ-بالا یِ جرم و یک شعاعِ (اندازه یِ) نُعی به دست می‌آید. در ستاره‌ها یی که جرمِ شان بیش از آن حد-ِ-بالا باشد، فشارِ نقطه-یِ-صفر نمی‌تواند با گرانش مقابله کند و ستاره می‌رمبد.

اینجا هدف تخمینِ حد-ِ-بالا یِ جرم و اندازه یِ نُعی یِ ستاره با محاسبه‌ها یی سرانگشتی، و بیانِ این کمیت‌ها بر حسبِ ثابت‌ها یِ بنیادی و جرمِ ذره‌ها یِ سازنده یِ ستاره است.

1 فشارِ نقطه-یِ-صفر

حالتِ پایه یِ یک گازِ کاملِ فرمیُنی این است که فرمیُن‌ها ترازها یِ انرژی یِ تک-ذره‌ای را به ترتیب از پایین پر می‌کنند. تعدادِ ترازها یِ پرشده با تعدادِ فرمیُن‌ها برابر است. انرژی یِ بالاترین ترازِ پرشده انرژی یِ فِرمی [3]، و تکانه یِ متناظر با این تراز تکانه یِ فِرمی [3] است. برا یِ ذره در جعبه ای به حجمِ V، چنان که مثلَن در فصلِ 5 از [2] آمده، تعدادِ ترازها یِ با تکانه یِ نابزرگتر از p_0 می‌شود

$$N(p_0) = g\, V\, \frac{\tilde{V}(p_0)}{h^D}, \tag{1}$$

که $N(p_0)$ تعدادِ ترازها یِ با تکانه یِ نابزرگتر از p_0، g چندگانه‌گی یِ ناشی از درجه‌ها یِ درونی (مثلَن سْپین)، h ثابتِ پْلانک [4]، و D بُعدِ فضا ست. $\tilde{V}(p_0)$ حجمِ ناحیه ای که در فضا یِ تکانه است که در آن اندازه یِ تکانه از p_0 کوچکتر است. N (تعدادِ فرمیُن‌ها) باید با $N(p_\mathrm{F})$ برابر باشد، که شاخصِ F نشانه یِ فِرمی [3] ست. از اینجا،

$$N \mathrel{\hat{=}} V\, \left(\frac{p_\mathrm{F}}{h}\right)^D. \tag{2}$$

$(X \mathrel{\hat{=}} Y)$ یعنی X و Y تا حدِ یک ضریبِ بی‌بُعدِ مستقل از متغیرها با هم برابر ند. در مُردِ (2)، این ضریب $(g\, V_D)$ است، که V_D حجمِ یک گویِ واحدِ D بُعدی ست. با تعریفِ

$$n = \frac{N}{V}, \tag{3}$$

$$\lambda_\mathrm{F} = \frac{h}{p_\mathrm{F}}, \tag{4}$$

رابطه یِ (2) میشود

$$n\,\lambda_{\mathrm{F}}^{D} \mathrel{\overset{\circ}{=}} 1. \tag{5}$$

n چگالی یِ ذرات است. λ_{F} طول- ِ-مُج ِ فِرمی [3] ست: طول- ِ-مُج [1] ِ دُبرُی ِ متناظر با تکانه یِ فِرمی [3].

برا ی چنین گاز ی P (فشار) میشود (مثلَن فصل ِ 5 از [2])

$$P = \frac{g}{D}\int \frac{\mathrm{d}^D p}{h^D}\,f(p)\,p\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}, \tag{6}$$

که ε انرژی (یِ تک-ذره)، و f کسر ِ اشغال ِ تراز است. در حالت ِ کاملَن تبه‌گن، کسر ِ اشغال چنین است.

$$f(p) = \begin{cases} 1, & p < p_{\mathrm{F}} \\ 0, & p > p_{\mathrm{F}} \end{cases}. \tag{7}$$

از

$$\varepsilon = \sqrt{p^2\,c^2 + m^2\,c^4}, \tag{8}$$

که m جرم ِ ذره است، دیده میشود

$$p\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial p} = \frac{p^2\,c}{\sqrt{p^2 + m^2\,c^2}}. \tag{9}$$

از جمله برا یِ حدها یِ نانسبیتی (N) و فرانسبیتی (R) نتیجه میشود

$$p\,\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{\mathrm{N}} = \frac{p^2}{m}, \tag{10}$$

$$p\,\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{\mathrm{R}} = p\,c, \tag{11}$$

که میشود آنها را در

$$p\,\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial p}\right)_{\mathfrak{s}} = (m\,c^2)\,\left(\frac{p}{m\,c}\right)^{a_{\mathfrak{s}}} \tag{12}$$

خلاصه کرد، که

$$a_{\mathrm{N}} = 2. \tag{13}$$

$$a_{\mathrm{R}} = 1. \tag{14}$$

(12) و (7) را در (6) میگذارم. نتیجه میشود

$$P_{\mathfrak{s}} \circeq (m\,c^2)\,\left(\frac{m\,c^2}{h}\right)^{D}\,\left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{m\,c^2}\right)^{D+a_{\mathfrak{s}}}. \tag{15}$$

با استفاده از (5)،

$$P_{\mathfrak{s}} \circeq (m\,c^2)\,\left(\frac{h}{m\,c}\right)^{a_{\mathfrak{s}}}\,n^{1+(a_{\mathfrak{s}}/D)}. \tag{16}$$

در حالت ِ کلی انتگرالده یِ طرف ِ راست ِ (6) نسبت به جرم نزولی ست، مگر ذره فرانسبیتی باشد. در واقع برا یِ ذره‌ها یِ نانسبیتی این انتگرالده با عکس ِ جرم متناسب است. پس در چگالی-یِ-ذره‌ها یِ یکسان، فشار ِ نقطه-یِ-صفر برا یِ ذره‌ها یِ کمجرمتر بیشتر است. این است که اگر بیش از یک گونه فرمیُن در جعبه باشد، اگر چگالی یِ تعداد ِ فرمیُنها با هم قابل-ِ-مقایسه باشد ولی جرم ِ یک ی از فرمیُنها بسیار کمتر از جرم ِ فرمیُنها یِ دیگر باشد، عملَن این فرمیُن ِ با کمترین جرم است که فشار ِ نقطه-یِ-صفر را تئمین میکند (مگر گونه ای جز آن فرانسبیتی شده باشد). به هم ین خاطر به این سبکترین فرمیُن ِ جعبه ذره یِ فشارساز میگویم.

2 فشار و گرانش

شتاب یِ گرانشی یِ یک جسم ِ کروی-متقارن، در فاصله یِ r از مرکز ِ جسم $g(r)$ است، که

$$g(r) = \frac{G\,M(r)}{r^{D-1}}. \tag{17}$$

G ثابت ِ جهانی یِ گرانش است. $M(r)$ هم جرم ِ بخش ی از جسم است که درون ِ گوی ی به شعاع ِ r است. شرط ِ تعادل برا یِ برا یِ یک لایه ای نازک ِ کروی از جسم به فاصله یِ r از مرکز، میشود

$$\frac{\mathrm{d}[P(r)]}{\mathrm{d}r} = -\rho(r)\,g(r), \tag{18}$$

که $P(r)$ و $\rho(r)$، به ترتیب، فشار و چگالی یِ جرم در فاصله یِ r از مرکز ند. (17) شتاب ِ گرانشی را بر حسب ِ چگالی میدهد. به این ترتیب (18) یک رابطه بین ِ فشار و چگالی میشود. برا یِ به-دست-آوردن ِ فشار و چگالی یک رابطه یِ دیگر هم لازم است، که معادله یِ حالت ماده است. اما مقدار ِ نُعی یِ فشار را میشود ساده‌تر تخمین زد. (18) را چنین مینویسم.

$$\frac{P}{R} \circeq \rho\,g, \tag{19}$$

که همه یِ مقدارها نُعی یند و R شعاعِ ستاره است. همچنین،

$$M \mathrel{\overset{\circ}{=}} \rho\, R^D. \tag{20}$$

$$g \mathrel{\overset{\circ}{=}} \frac{G\, M}{R^{D-1}}. \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$P \mathrel{\overset{\circ}{=}} \frac{G\, M^2}{R^{2\,D-2}}. \tag{22}$$

اگر بیش از یک گونه ذره در کار باشد، و چگالی یِ تعداد برا یِ گونه‌ها یِ مختلف قابل- ِ-مقایسه باشد، پرجرمترین ذره است که جرمِ ستاره را تعیین میکند. به پرجرمترین ذره ذره یِ جرمساز میگویم.

3 تعادل

شرطِ تعادل هم ان رابطه یِ (22) است، که در آن P در رژیمها یِ مختلف از (16) به دست میآید. مشخصاتِ ذره یِ جرمساز را با شاخصِ 1، و مشخصاتِ ذره یِ فشارساز را با شاخصِ 2 نشان میدهم. چگالی یِ تعداد برا یِ همه یِ ذره‌ها را با ν، و کسرِ تعدادِ ذرات از گونه یِ i را با x_i نشان میدهم. به این ترتیب،

$$n_i = x_i\, \nu. \tag{23}$$

3.1 جرم

با استفاده از

$$M \mathrel{\overset{\circ}{=}} n_1\, m_1\, R^D, \tag{24}$$

شرطِ تعادل میشود

$$G\, M^2 \left(\frac{n_1\, m_1}{M}\right)^{2-(2/D)} \mathrel{\overset{\circ}{=}} (m_2\, c^2) \left(\frac{h}{m_2\, c}\right)^{a_s} n_2^{1+(a_s/D)}. \tag{25}$$

از این به بعد هم چیز را در بُعدِ 3 مینویسم:

$$\frac{G}{h\, c}\, (m_1\, x_1)^{4/3}\, M^{2/3}\, \nu^{4/3} \mathrel{\overset{\circ}{=}} \left(\frac{h}{m_2\, c}\right)^{a_s-1} x_2^{1+(a_s/3)}\, \nu^{1+(a_s/3)}. \tag{26}$$

از این رابطه دیده می‌شود اگر M از یک مقدار ِ $M_{\rm c}$ خیل ی کوچکتر باشد، $a_{\mathfrak{s}}$ برابر ِ 2 است (حد ِ نانسبیتی)، و ν با M^2 متناسب است. وقت ی M بزرگ می‌شود ν هم بزرگ می‌شود، و در نتیجه n_2 بزرگ می‌شود، تا جا یی که $p_{\rm F}$ بسیار بزرگتر از $(m_2\,c)$ شود. این حد ِ فرانسبیتی ست، که در آن $a_{\mathfrak{s}}$ برابر ِ 1 است و در نتیجه M مستقل از ν می‌شود. مقدار ِ M در این حالت هم ان $M_{\rm c}$ است:

$$\frac{G}{h\,c}\,(m_1\,x_1)^{4/3}\,M_{\rm c}^{2/3} \overset{\circ}{=} x_2^{4/3}. \tag{27}$$

پس،

$$M_c \overset{\circ}{=} \left(\frac{h\,c}{G}\right)^{3/2}\,\left(\frac{x_2}{m_1\,x_1}\right)^2. \tag{28}$$

در حالت ِ تعادل M نمی‌تواند از $M_{\rm c}$ بیشتر شود. اگر M از $M_{\rm c}$ بیشتر شود تعادل به دست نمی‌آید. حد ِ نانسبیتی می‌شود

$$n_2 \overset{\circ}{=} \left(\frac{m_2\,c}{h}\right)^3\,\left(\frac{M}{M_{\rm c}}\right)^2, \qquad M \ll M_{\rm c}. \tag{29}$$

این رابطه را وارون می‌کنم و نتیجه را کنار ِ نتیجه یِ متناظر با حد ِ فرانسبیتی می‌گذارم.

$$M \overset{\circ}{=} M_{\rm c}\,\left[\left(\frac{h}{m_2\,c}\right)^3\,n_2\right]^{1/2}, \qquad n_2 \ll \left(\frac{m_2\,c}{h}\right)^3. \tag{30}$$

$$M \approx M_{\rm c}, \qquad n_2 \gg \left(\frac{m_2\,c}{h}\right)^3. \tag{31}$$

$$M \le M_{\rm c}. \tag{32}$$

3.2 شعاع

از (24) دیده می‌شود

$$\begin{aligned} R^3 &\overset{\circ}{=} \frac{M}{m_1\,n_1}, \\ &\overset{\circ}{=} \left(\frac{h}{m_2\,c}\right)^3\,\frac{M}{M_{\rm c}}\,\frac{M_{\rm c}\,x_2}{m_1\,x_1}\,\left(\frac{m_2\,c}{h}\right)^3\,\frac{1}{n_2}, \end{aligned} \tag{33}$$

که با تعریف ِ

$$R_0 \overset{\circ}{=} \left(\frac{M_{\rm c}\,x_2}{m_1\,x_1}\right)^{1/3}\,\frac{h}{m_2\,c}, \tag{34}$$

میشود

$$R \mathrel{\mathring{=}} R_0\, \left[\frac{M}{M_{\rm c}}\, \left(\frac{m_2\, c}{h}\right)^3\, \frac{1}{n_2}\right]^{1/3}. \tag{35}$$

این را در (30) و (31) مینشانم.

$$R \mathrel{\mathring{=}} R_0\, \left[\left(\frac{m_2\, c}{h}\right)^3\, \frac{1}{n_2}\right]^{1/6}, \qquad n_2 \ll \left(\frac{m_2\, c}{h}\right)^3. \tag{36}$$

$$R \mathrel{\mathring{=}} R_0\, \left[\left(\frac{m_2\, c}{h}\right)^3\, \frac{1}{n_2}\right]^{1/3}, \qquad n_2 \gg \left(\frac{m_2\, c}{h}\right)^3 \tag{37}$$

R_0 کمینه یا بیشینه یِ شعاع نیست، بل که شعاع ی ست که تغییر ِ رفتار از نانسبیتی به فرانسبیتی را تعیین میکند.

3.3 مقیاسها و تعداد ِ ذره‌ها

جرم ِ پلانک [4] را با $M_{\rm P}$ نشان میدهم:

$$M_{\rm P} = \left(\frac{\hbar\, c}{G}\right)^{1/2}. \tag{38}$$

جرم ِ پلانک [4] را معمولَن با $\hbar$ به جا یِ h تعریف میکنند. اما برا یِ برابریها یِ تا حد ِ یک ثابت ِ عددی یِ ضربی، اگر به جا یِ $\hbar$ در (38) مقدار ِ h به کار برود هم مهم نیست. تعریف میکنم

$$m'_1 = \frac{m_1\, x_1}{x_2}. \tag{39}$$

λ_2 (طول- ِ-مُج ِ کامپتِن [5] ِ ذره یِ فشارساز) هم چنین است.

$$\lambda_2 = \frac{\hbar}{m_2\, c}. \tag{40}$$

این را هم معمولَن با $\hbar$ به جا یِ h تعریف میکنند. اما برا یِ برابریها یِ تا حد ِ یک ثابت ِ عددی یِ ضربی، اگر به جا یِ $\hbar$ در (40) مقدار ِ h به کار برود هم مهم نیست. از (28) و (35) نتیجه میشود

$$M_{\rm c} \mathrel{\mathring{=}} \left(\frac{M_{\rm P}}{m'_1}\right)^3\, m'_1. \tag{41}$$

$$R_0 \mathrel{\mathring{=}} \frac{M_{\rm P}}{m'_1}\, \lambda_2. \tag{42}$$

برا یِ N_1 (تعداد ِ ذره‌ها یِ جرمساز):

$$M = N_1\, m_1. \tag{43}$$

تعریف میکنم

$$N_1' = \frac{M}{m_1'}. \tag{44}$$

به این ترتیب برا یِ ستاره یِ تبهگن ی که جرم َش از مرتبه یِ جرم ِ بحرانی ست،

$$N_1' \overset{\circ}{=} \left(\frac{M_{\rm P}}{m_1'}\right)^3. \tag{45}$$

$$R \overset{\circ}{=} (N_1')^{1/3}\,\lambda_2. \tag{46}$$

x_1 و x_2 زیاد با 1 فرق ندارند. پس در تخمین میشود به جا یِ کمیتها یِ پریمدار کمیتها یِ بدون ِ پریم را به کار برد. پس برا یِ ستاره یِ تبهگن ی که جرم َش از مرتبه یِ جرم ِ بحرانی ست،

$$N \overset{\circ}{=} \left(\frac{M_{\rm P}}{m_1}\right)^3. \tag{47}$$

$$M \overset{\circ}{=} \left(\frac{M_{\rm P}}{m_1}\right)^3 m_1. \tag{48}$$

$$R \overset{\circ}{=} \frac{M_{\rm P}}{m_1}\,\lambda_2. \tag{49}$$

N تعداد ِ ذرها ست. تعداد ِ ذره‌ها و جرم را عملَن فقط جرم ِ ذره یِ جرمساز تعیین میکند. شعاع را هم جرم ِ ذره یِ جرمساز و هم جرم ِ ذره یِ فشارساز تعیین میکند.

4 عدد

ستاره‌ها یِ تبهگن ی که فعلَن شناخته شده اند، یا کوتوله یِ سفید ند یا ستاره یِ نوترُنی. در کوتوله‌ها یِ سفید، ذره یِ جرمساز هلیم ِ 4 و ذره یِ فشارساز الکترُن است. در ستاره‌ها یِ نوترُنی ذره یِ جرمساز نوترُن و ذره یِ فشارساز هم نوترُن است. مسئله را ساده‌تر کنم. در هردُ ذره یِ جرمساز را نوترُن (یا پرُتُن) میگیرم. جرم ِ نوترُن تقریبَن با جرم ِ پرُتُن برابر است. جرم ِ هلیم ِ 4 هم 4 برابر ِ جرم ِ نوترُن (یا پرُتُن است). به این ترتیب،

$$m_1\,c^2 \overset{\circ}{=} 1\,\mathrm{GeV}. \tag{50}$$

برا یِ جرم ِ پْلانک [4] هم،

$$M_{\rm P}\,c^2 \overset{\circ}{=} 10^{19}\,\mathrm{GeV}. \tag{51}$$

به این ترتیب،

$$N \mathrel{\overset{\circ}{=}} 10^{57}. \tag{52}$$

$$M \mathrel{\overset{\circ}{=}} 10^{30}\,\mathrm{kg}. \tag{53}$$

$10^{30}\,\mathrm{kg}$ ضمنَن از مرتبه یِ جرم ِ خُرشید است. حد ِ بالا یِ جرم برا یِ کوتوله‌ها یِ سفید و ستاره‌ها یِ نوترُنی از یک مرتبه است: از مرتبه یِ جرم ِ خُرشید. تعداد ِ ذره‌ها یِ کوتوله‌ها یِ سفید و ستاره‌ها یِ نوترُنی هم از یک مرتبه است: از مرتبه یِ تعداد ِ ذره‌ها یِ خُرشید، که 10^{57} است:

$$N \mathrel{\overset{\circ}{=}} N_{\odot}. \tag{54}$$

$$M \mathrel{\overset{\circ}{=}} M_{\odot}. \tag{55}$$

برا یِ شعاع هم،

$$R \mathrel{\overset{\circ}{=}} 10^{19}\,\lambda_2. \tag{56}$$

ذره‌ها یِ فشارساز ِ کوتوله‌ها یِ سفید خیل ی کمجرمتر از ذره‌ها یِ فشارساز ِ ستاره‌ها یِ نوترُنی یند، 2000 بار. پس طول- ِ-مُج ِ کامپتِن [5] برا یِ ذره‌ها یِ فشارساز ِ کوتوله‌ها یِ سفید خیل ی بیشتر است، 2000 بار. طول- ِ-مُج ِ کامپتِن [5] ِ الکترُن و نوترُن را با به ترتیب λ_{e} و λ_{n} نشان میدهم.

$$\lambda_{\mathrm{e}} \mathrel{\overset{\circ}{=}} 10^{-12}\,\mathrm{m}. \tag{57}$$

$$\lambda_{\mathrm{n}} \mathrel{\overset{\circ}{=}} 10^{-15}\,\mathrm{m}. \tag{58}$$

به این ترتیب،

$$R \mathrel{\overset{\circ}{=}} \begin{cases} 10^4\,\mathrm{km}, & \text{کوتوله یِ سفید} \\ 10\,\mathrm{km}, & \text{ستاره یِ نوترُنی} \end{cases} \tag{59}$$

شعاع ِ نُعی یِ کوتوله‌ها یِ سفید، از مرتبه یِ شعاع ِ زمین است.

در ستاره‌ها یِ تبهگن ی که فعلَن شناخته شده اند، جرم ِ ذره یِ جرمساز از مرتبه یِ ($\mathrm{GeV}\,c^{-2}$) اگر ذره یِ جرمساز سبکتر باشد، جرم ِ بحرانی بیشتر میشود. یک ستاره یِ تبهگن را بررسی کنم که از کوارک ِ آزاد ساخته شده باشد (اگر چنین چیز ی ممکن باشد). جرم ِ سبکترین ِ کوارکها (بالا و پایین)

بینِ ($1\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$) تا ($10\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$) است. با انتخابِ مقدارِ اخیر برا یِ جرمِ ذره یِ جرمساز و فشارساز، اینها نتیجه میشود.

$$N \mathrel{\hat{=}} 10^{63}. \tag{60}$$

$$M \mathrel{\hat{=}} 10^{34}\,\mathrm{kg}. \tag{61}$$

$$R \mathrel{\hat{=}} 10^{5}\,\mathrm{km}. \tag{62}$$

حدِ جرم برا یِ چنین ستاره یِ فرضی یی ($10^4\,M_\odot$) است.

5 پانوشتها

[1] de Broglie

[2] R. K. Pathria & Paul D. Beale; “statistical mechanics” 3rd edition (Elsevier, 2011)

[3] Fermi

[4] Planck

[5] Compton