X1-085 (2012/07/31)

تقارن ِ سمتی در بُعد ِ دلبخاه

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

در بُعد ِ دلبخاه، بسط ِ توابع ِ سمتی-متقارن بر حسب ِ ویژه‌بردارها یِ دَوَران بررسی میشود.

1 دَوَران

e را یک پایه یِ یکه‌متعامد ِ $\mathbb{R}^n$ میگیریم، که $\mathbb{R}$ مجموعه یِ عددها یِ حقیقی است. دَوَران با زاویه یِ α در صفحه یِ شامل ِ $\boldsymbol{e}_i$ و $\boldsymbol{e}_j$ را با $U(i,j;\alpha)$ نشان میدهیم. اثر ِ چنین دَوَران ی بر $\boldsymbol{r}$ (بردار ِ مکان) چنین است.

$$\{[U(i,j;\alpha)]\,\boldsymbol{r}\}^k = \begin{cases} r^i\,\cos\alpha - r^j\,\sin\alpha, & k=i\\ r^i\,\sin\alpha + r^j\,\cos\alpha, & k=j\\ r^k, & i\neq k\neq j\end{cases}. \qquad (1)$$

نمایش ِ U در فضا یِ توابع را با $\tilde{U}$ نشان میدهیم. داریم

$$\begin{aligned}\{[\tilde{U}(i,j;\alpha)]\,f\}(\boldsymbol{r}) &= f\{[U^{-1}(i,j;\alpha)]\,\boldsymbol{r}\},\\ &= f\{[U(i,j;-\alpha)]\,\boldsymbol{r}\}.\end{aligned} \qquad (2)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\{[\tilde{U}(i,j;\alpha)]\,f\}(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r}) + \alpha\,[r_j\,(\partial_i f)(\boldsymbol{r}) - r_i\,(\partial_j f)(\boldsymbol{r})] + o(\alpha). \tag{3}$$

به این ترتیب $L_{i\,j}$ (مولدِ دَوَران در صفحه یِ i و j) میشود

$$L_{i\,j} = -(R_i\,\partial_j - R_j\,\partial_i), \tag{4}$$

که

$$(R_j\,f)(\boldsymbol{r}) := r_j\,f(\boldsymbol{r}). \tag{5}$$

شاخصها با δ بالاوپایین میروند:

$$\Xi_i = \delta_{i\,j}\,\Xi^j, \tag{6}$$

که یعنی $\boldsymbol{e}_i$ ها یکه-متعامد اند.

گروهِ دَوَرانها یِ n بُعدی را با $\mathrm{SO}(n)$ نمایش میدهیم. بُعدِ این گروه تعدادِ $L_{i\,j}$ ها یِ مستقل است. دیده میشود L پادمتقارن است. از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\dim[\mathrm{SO}(n)] &= \binom{n}{2},\\ &= \frac{n\,(n-2)}{2}.\end{aligned} \tag{7}$$

به ساده‌گی دیده میشود

$$[L_{i\,j}, L_{k\,l}] = \delta_{i\,k}\,L_{j\,l} - \delta_{j\,k}\,L_{i\,l} + \delta_{i\,l}\,L_{k\,j} - \delta_{j\,l}\,L_{k\,i}. \tag{8}$$

از جمله با تعریفِ

$$(L)^2 := \frac{1}{2}\,L_{i\,j}\,L^{i\,j}, \tag{9}$$

نتیجه میشود

$$[L_{i\,j}, (L)^2] = 0. \tag{10}$$

میگوییم تابعِ A سمتی-متقارن است (تقارنِ سمتی دارد)، اگر نمایشِ همه یِ دَوَرانها یی که $\boldsymbol{e}_n$

را ثابت نگه میدارند اثر ِشان بر f همانی باشد. تعریف میکنیم

$$r := \left[\sum_{i=1}^{n}(r^i)^2\right]^{1/2}. \tag{11}$$

$$\rho := \left[\sum_{i=1}^{n-1}(r^i)^2\right]^{1/2}. \tag{12}$$

$$\theta := \cos^{-1}\frac{r^n}{r}. \tag{13}$$

دیده میشود A سمتی-متقارن است، اگر و تنها اگر تابع ِ ρ و r^n باشد، یا همارز با آن، اگر و تنها اگر تابع ِ r و θ باشد. اگر A سمتی-متقارن باشد،

$$\boldsymbol{\partial}A = \frac{\partial A}{\partial r}\,\boldsymbol{\partial}r + \frac{\partial A}{\partial\theta}\,\boldsymbol{\partial}\theta. \tag{14}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\partial}r &= \hat{\boldsymbol{r}},\\ \boldsymbol{\partial}\theta &= \frac{1}{r\,\sin\theta}\,[-\boldsymbol{e}_n + (\cos\theta)\,\hat{\boldsymbol{r}}],\end{aligned} \tag{15}$$

و از آنجا،

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\partial}r)\cdot(\boldsymbol{\partial}A) &= \frac{\partial A}{\partial r},\\ (\boldsymbol{\partial}\theta)\cdot(\boldsymbol{\partial}A) &= \frac{1}{(r)^2}\,\frac{\partial A}{\partial\theta}.\end{aligned} \tag{16}$$

در بُعدها یِ بیش از 2، گستره یِ θ مجموعه یِ $[0,\pi]$ است. در بُعد ِ 2 این گستره $[0,2\pi)$ یا انتقال-یافته یِ این مجموعه به هر مقدار ی است. در بُعد ِ 2 ضمنَن θ به این شکل تعریف میشود.

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{r^1}{r},\\ \cos\theta &= \frac{r^2}{r}.\end{aligned} \tag{17}$$

دیده میشود این زاویه متمم ِ مختصه یِ زاویهای در مختصات ِ قطبی است.

2 لَپلَسی و ویژه‌بردارها یِ دَوَران

از (4) دیده میشود

$$\frac{1}{2}\,L_{i\,j}\,L^{i\,j} = L_{i\,j}\,R^j\,\partial^i, \\ = -R_i\,R^j\,\partial_j\,\partial^i - n\,R_i\,\partial^i + R_j\,R^j\,\partial_i\,\partial^i + R_j\,\partial^j, \qquad (18)$$

داریم

$$\boldsymbol{R}\,R^j\,\partial_j = R^j\,\partial_j\,\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}, \\ = R\,R^j\,\partial_j\,\hat{\boldsymbol{R}} + R^j\,\frac{R_j}{R}\,\hat{\boldsymbol{R}} - \boldsymbol{R}, \\ = (R)^2\,(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial})\,\hat{\boldsymbol{R}}, \qquad (19)$$

و از آنجا،

$$\frac{1}{2}\,L_{i\,j}\,L^{i\,j} = -(R^2)\,(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial})^2 - (n-1)\,R\,(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial}) + (R)^2\,(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial}), \qquad (20)$$

یا،

$$\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial} = (\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial})^2 + \frac{n-1}{R}\,(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial}) + \frac{1}{(R)^2}\,(L)^2. \qquad (21)$$

این تجزیه یِ لَپلَسی به بخشها یِ شعاعی و زاویه‌ای است. اثر ِ $(\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\partial})$ بر زاویه (جهت) صفر است. در واقع

$$(\hat{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{\partial})f = \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad (22)$$

که در طرف ِ راست مشتقگیری در $\hat{\boldsymbol{r}}$ ِ ثابت انجام شده. اثر ِ $L_{i\,j}$ هم بر r (شعاع) صفر است.

معادله یِ (21) یک راه برا یِ تعیین ویژه‌مقدارها یِ $(L)^2$ میدهد. برا یِ به دست آوردن ِ این ویژه‌مقدارها، f را چنان میگیریم که ویژه‌بردار ِ $(L)^2$ باشد:

$$(L)^2\,f = \lambda\,f, \qquad (23)$$

و در یک همسایه‌گی از مبدئ همساز باشد:

$$(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})f = 0. \qquad (24)$$

دیده میشود

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\lambda}{(r)^2}\,f=0, \tag{25}$$

این یک معادله یِ اُیلر [1] است، که جوابها یِ خاص ِ توانی دارد. جواب ی توانی با نما یِ s را برا یَش در نظر میگیریم:

$$s\,(s-1)+(n-1)\,s+\lambda=0. \tag{26}$$

f ِ متناظر با این جواب، در مبدئ هم همساز است اگر و تنها اگر s صحیح و نامنفی باشد. از اینجا معلوم میشود ویژه‌مقدارها یِ $(L)^2$ با عددها یِ صحیح ِ نامنفی (l) متناظر اند، چنان که

$$\lambda_l=-l\,(l+n-2). \tag{27}$$

اینها ضمنَن همه یِ ویژه‌مقدارها یِ $(L)^2$ اند. برا یِ دیدن ِ این توجه میکنیم که این مسئله یِ شرطِ‌مرزی که f درون ِ یک گوی به شعاع ِ R همساز باشد، و مقدار َش بر مرز ِ آن گوی تابع ِ داده‌شده یِ g باشد، برا یِ هر g یِ به حد ِ کافی هموار ی جواب دارد و این جواب یکتا است. از جمله اگر g ویژه‌بردار ِ $(L)^2$ با ویژه‌مقدار ِ λ باشد، f هم چنین است.

به این ترتیب، اگر f ویژه‌بردار ِ $(L)^2$ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_l باشد، و در یک همسایه‌گی یِ مبدئ همساز باشد،

$$f(\boldsymbol{r})=r^l\,g(\hat{\boldsymbol{r}}), \tag{28}$$

که

$$(L)^2\,g=-l\,(l+n-2)\,g, \tag{29}$$

یا،

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\partial})f=l\,f, \tag{30}$$

$$(L)^2\,f=-l\,(l+n-2)\,f. \tag{31}$$

f را بر حسب ِ مختصات ِ دِکَرتی هم میشود نوشت. از

$$(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\partial})r^i=r^i, \tag{32}$$

نتیجه میشود f یک چندجمله‌ای یِ از مختصات ِ دِکَرتی است، که فقط جمله‌ها یِ از درجه یِ l دارد:

$$f(\boldsymbol{r})=F_{i_1\cdots i_l}\,r^{i_1}\cdots r^{i_l}, \tag{33}$$

که F یک تانسُر ِ متقارن ِ از رتبه ی ِ l است. این که f همساز است، با این هم‌ارز است که

$$\delta^{j\,k}\,F_{i_1\cdots i_{l-2}\,j\,k} = 0. \tag{34}$$

از اینجا بُعد ِ فضا ی ِ تابعها یی (با دامنه ی ِ $\mathbb{R}^n$) به دست می‌آید که همساز اند و ویژه‌بردار ِ $(L)^2$ با ویژه‌مقدار ِ λ_l اند. این بُعد را با $\dim_{n\,l}$ نشان میدهیم. داریم

$$\dim_{n\,l} = \dim[(\mathbb{R}^n)^{\otimes l}_{\mathrm{S}}] - \dim[(\mathbb{R}^n)^{\otimes (l-2)}_{\mathrm{S}}], \tag{35}$$

که $\mathbb{V}^{\otimes p}_{\mathrm{S}}$ فضا ی ِ تانسرها ی ِ متقارن ِ رتبه ی ِ p بناشده بر فضا ی ِ خطی ی ِ $\mathbb{V}$ است. از

$$\dim[(\mathbb{R}^n)^{\otimes l}_{\mathrm{S}}] = \binom{n+l-1}{l}, \tag{36}$$

نتیجه میشود

$$\dim_{n\,l} = \frac{(n+l-3)!\,(n+2\,l-2)}{(n-2)!\,l!} \tag{37}$$

از جمله،

$$\dim_{2\,l} = 2, \tag{38}$$

$$\dim_{3\,l} = 2\,l+1. \tag{39}$$

3 ویژه‌بردارها ی ِ سمتی- متقارن ِ دَوَران

A را یک تابع ِ سمتی- متقارن میگیریم. در این صورت A تابع ِ r و θ است. داریم

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})A &= (\boldsymbol{\partial} r)\cdot\boldsymbol{\partial}\left(\frac{\partial A}{\partial r}\right) + [(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})r]\,\frac{\partial A}{\partial r} + (\boldsymbol{\partial}\theta)\cdot\boldsymbol{\partial}\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + [(\boldsymbol{\partial}\cdot\boldsymbol{\partial})\theta]\,\frac{\partial A}{\partial \theta},\\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{(r)^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{(n-2)\,\cot\theta}{(r)^2}\,\frac{\partial A}{\partial \theta}.\end{aligned} \tag{40}$$

از مقایسه ی ِ این با (21) نتیجه میشود

$$(L)^2\,A = \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + (n-2)\,(\cot\theta)\,\frac{\partial A}{\partial \theta}. \tag{41}$$

با تعریف ِ

$$x := \cos\theta, \tag{42}$$

میشود (41) را چنین نوشت.

$$(L)^2\,A=[1-(x)^2]\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+(1-n)\,x\,\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{43}$$

به این ترتیب، اگر A ویژه‌بردار ِ سمتی-متقارن ِ $(L)^2$ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ_l باشد،

$$[1-(x)^2]\,\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+(1-n)\,x\,\frac{\partial A}{\partial x}+l\,(l+n-2)\,A=0, \tag{44}$$

با تعریفها یِ

$$\begin{aligned}(X\,A)(x)&:=x\,A(x),\\ (D\,A)(x)&:=\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned} \tag{45}$$

معادله یِ (44) را میشود چنین نوشت

$$\{[1-(X)^2]\,D^2+(1-n)\,X\,D+l\,(l+n-2)\}\,A=0. \tag{46}$$

این معادله در بُعد ِ 2 معادله یِ چِبیشِف [2] از نُع ِ اول، در بُعد ِ 3 معادله یِ لُژاندر [3]، و در بُعد ِ 4 معادله یِ چِبیشِف [2] از نُع ِ دوم است:

$$\{[1-(X)^2]\,D^2-\,X\,D+(l)^2\}\,A=0,\qquad n=2. \tag{47}$$

$$\{[1-(X)^2]\,D^2-2\,X\,D+l\,(l+1)\}\,A=0,\qquad n=3. \tag{48}$$

$$\{[1-(X)^2]\,D^2-3\,X\,D+l\,(l+2)\}\,A=0,\qquad n=4. \tag{49}$$

در حالت ِ کلی، (46) تعمیم ی از معادله یِ لُژاندر [3] است.

4 چندجمله‌ایها یِ تعمیم-یافته یِ لُژاندر

تابع ِ یک-متغیره یِ P را در نظر بگیرید که جواب ِ (46) است. برا یِ این معادله جواب ی به شکل ِ

$$P(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)^{j+s} \tag{50}$$

میگیریم، که a_0 ناصفر است. نتیجه میشود

$$(s+j+2)\,(s+j+1)\,a_{j+2}+[l\,(l+n-2)-(s+j)\,(s+j+n-2)]\,a_j=0. \tag{51}$$

این به ازا یِ $(j = -2)$ نتیجه میدهد

$$s = 0 \ \vee s = 1. \tag{52}$$

از (51) ضمنَن نتیجه میشود اگر a_j ها از جا یی به بعد صفر نشوند

$$\lim_{j\to\infty} \frac{a_{j+2}}{a_j} = 1, \tag{53}$$

که این نتیجه میدهد شعاع ِ همگرایی یِ سری یِ طرف ِ راست ِ (50) یک است. پس P در $(x = \pm 1)$ تحلیلی نیست، مگر چند جملهای باشد. P چندجملهای میشود، اگر $(l - s)$ صحیح و نامنفی، و a_1 صفر باشد. دیده میشود که در این صورت P یک چندجملهای یِ از درجه یِ l است. با استفاده از رابطه یِ بازگشتی یِ (50) میشود ضرایب ِ این چندجملهای را حساب کرد. اینجا روش ی بر اساس ِ جبر ِ عملگرها به کار میبریم.

معادله یِ (46) را میشود چنین نوشت.

$$[\mathcal{L}_{1-n} + l\,(l + n - 2)]\,P = 0. \tag{54}$$

که

$$\mathcal{L}_\alpha := [1 - (X)^2]\,(D)^2 + \alpha\,X\,D. \tag{55}$$

از این که

$$[D, X] = 1, \tag{56}$$

و با تعریف ِ

$$Y := 1 - (X)^2, \tag{57}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\,(Y)^\beta = {} & [1 - (X)^2]^{\beta+1}\,(D)^2 - 4\,\beta\,X\,[1 - (X)^2]^\beta\,D \\ & - 2\,\beta\,[1 - (X)^2]^\beta + 4\,\beta\,(\beta - 1)\,(X)^2\,[1 - (X)^2]^{\beta-1} \\ & + \alpha\,X\,[1 - (X)^2]^\beta\,D - 2\,\alpha\,\beta\,(X)^2\,[1 - (X)^2]^{\beta-1},\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\,(D)^\gamma = {} & (D)^\gamma\,[1 - (X)^2]\,(D)^2 + 2\,\gamma\,(D)^\gamma\,X\,D - \gamma\,(\gamma + 1)\,(D)^\gamma \\ & + \alpha\,(D)^\gamma\,X\,D - \alpha\,\gamma\,(D)^\gamma,\end{aligned} \tag{59}$$

یا

$$\mathcal{L}_\alpha\,(Y)^\beta=(Y)^\beta\,[\mathcal{L}_{\alpha-4\,\beta}-2\,\beta+(2\,\beta)\,(2\,\beta-\alpha-2)\,(Y)^{-1}], \tag{60}$$

$$\mathcal{L}_\alpha\,(D)^\gamma=(D)^\gamma\,[\mathcal{L}_{\alpha+2\,\gamma}-\gamma\,(\gamma+\alpha+1)]. \tag{61}$$

از جمله،

$$\mathcal{L}_\alpha\,(Y)^{(\alpha+2)/2}=(Y)^{(\alpha+2)/2}\,[\mathcal{L}_{-\alpha-4}-\alpha-2]. \tag{62}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha\,(Y)^{(\alpha+2)/2}\,(D)^\gamma\,(Y)^{(2\,\gamma-\alpha-2)/2}&=(Y)^{(\alpha+2)/2}\,(D)^\gamma\,(Y)^{(2\,\gamma-\alpha-2)/2}\\&\quad\times[\mathcal{L}_{\alpha-2\,\gamma}-\gamma\,(\gamma-\alpha-1)].\end{aligned} \tag{63}$$

از اینجا با تعریفِ

$$\nu:=\frac{n-3}{2}, \tag{64}$$

نتیجه میشود

$$[\mathcal{L}_{1-n}+l\,(l+n-2)]\,(Y)^{-\nu}\,(D)^l\,(Y)^{l+\nu}=(Y)^{-\nu}\,(D)^l\,(Y)^{l+\nu}\,\mathcal{L}_{1-n-2\,l}. \tag{65}$$

این جواب ی برا یِ (54) پیش مینهد. با نهاده یِ

$$P=(Y)^{-\nu}\,(D)^l\,(Y)^{l+\nu}\,Q, \tag{66}$$

دیده میشود اگر

$$\mathcal{L}_{1-n-2\,l}\,Q=0, \tag{67}$$

آنگاه P یک جوابِ (54) است. (67) دُ جوابِ خطی-مستقل دارد. یک جواب Q برابر با ثابت است. به این ترتیب به جوابِ $\mathrm{P}_{n\,l}$ برا یِ (54) میرسیم:

$$\mathrm{P}_{\nu\,l}(x)=[1-(x)^2]^{-\nu}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\,[1-(x)^2]^{l+\nu}. \tag{68}$$

این یک چندجملهای یِ از درجه یِ l است. در واقع،

$$\mathrm{P}_{\nu\,l}(x)=\sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}\,\frac{(-1)^m\,[(l+\nu)!]^2}{(l+\nu-m)!\,(\nu+m)!}\,(1-x)^{l-m}\,(1+x)^m. \tag{69}$$

از جمله،

$$\mathrm{P}_{0\,l} = (-2)^l\, l!\, \mathrm{P}_l, \tag{70}$$

که P_l چندجمله‌ای یِ لُژاندر [3] ِ از مرتبه یِ l است (مثلَن [4]).

5 تعامد و بهنجارش

از تعریف ِ $\mathcal{L}_\alpha$ دیده میشود

$$\mathcal{L}_{1-n} = (Y)^{-\nu}\, D\, (Y)^{\nu+1}\, D. \tag{71}$$

g_1 و g_2 را دُ تابع ِ یک-متغیره میگیریم که بر $[-1, 1]$ تعریف شده اند. حاصل‌ضربِ داخلی یِ g_1 در g_2 را با $\langle g_1, g_2\rangle$ نشان میدهیم و آن را چنین تعریف میکنیم.

$$\langle g_1, g_2\rangle := \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; [1-(x)^2]^{\nu}\, \overline{g_1(x)}\, g_2(x), \tag{72}$$

که $\overline{\Xi}$ مزدوجِ مختلطِ Ξ است. دیده میشود این تعریف $\mathcal{L}_{1-n}$ را (با شرایطِ مرزی یِ مناسب برا یِ تابعها) اِرمیتی میکند. l_1 و l_2 را دُ عددِ صحیح میگیریم، و تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} l &:= \max(l_1, l_2),\\ l' &:= \min(l_1, l_2). \end{aligned} \tag{73}$$

داریم

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{P}_{\nu\, l_1}, \mathrm{P}_{\nu\, l_2}\rangle &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; [1-(x)^2]^{\nu}\, \mathrm{P}_{\nu\, l_1}(x)\, \mathrm{P}_{\nu\, l_2}(x),\\ &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; \mathrm{P}_{\nu\, l'}(x)\, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l} [1-(x)^2]^{l+\nu},\\ &= (-1)^l \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\; \left\{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{l} [\mathrm{P}_{\nu\, l'}(x)]\right\}\, [1-(x)^2]^{l+\nu}. \end{aligned} \tag{74}$$

$\mathrm{P}_{\nu\, l'}$ یک چندجمله‌ای از درجه یِ l' است، و l' نابزرگتر از l است. پس طرفِ راستِ (74) صفر است، مگر l و l' برابر باشند، یعنی l_1 و l_2 برابر باشند. به این ترتیب،

$$\langle \mathrm{P}_{\nu\, l_1}, \mathrm{P}_{\nu\, l_2}\rangle \propto \delta_{l_1, l_2}. \tag{75}$$

برا یِ به دست آوردن ِ ضریب ِ $(x)^l$ در $\mathrm{P}_{\nu\,l}$، رفتار ِ $\mathrm{P}_{\nu\,l}$ برا یِ متغیرها یِ بزرگ را بررسی میکنیم:

$$\begin{aligned} P_{\nu\,l}(x) &= (-1)^l\,(x)^{-2\,\nu}\,[1+o(1)]\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l\{(x)^{2\,l+2\,\nu}\,[1+o(1)]\},\\ &= (-1)^l\,\frac{(2\,l+2\,\nu)!}{(l+2\,\nu)!}\,(x)^l\,[1+o(1)]. \end{aligned} \tag{76}$$

از اینجا،

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^l[\mathrm{P}_{\nu\,l}(x)] = (-1)^l\,\frac{l!\,(2\,l+2\,\nu)!}{(l+2\,\nu)!}. \tag{77}$$

همچنین،

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,[1-(x)^2]^{l+\nu} = \frac{(-1/2)!\,(l+\nu)!}{[l+\nu+(1/2)]!}. \tag{78}$$

پس،

$$\langle \mathrm{P}_{\nu\,l},\mathrm{P}_{\nu\,l}\rangle = \frac{(-1/2)!\,l!\,(l+\nu)!(2\,l+2\,\nu)!}{[l+\nu+(1/2)]!\,(l+2\,\nu)!}. \tag{79}$$

به این ترتیب،

$$\langle \mathrm{P}_{\nu\,l_1},\mathrm{P}_{\nu\,l_2}\rangle = \frac{(-1/2)!\,l!\,(l+\nu)!(2\,l+2\,\nu)!}{[l+\nu+(1/2)]!\,(l+2\,\nu)!}\,\delta_{l_1,l_2}. \tag{80}$$

همچنین، از (69) دیده میشود

$$\mathrm{P}_{\nu\,l}(1) = (-2)^l\,\frac{(l+\nu)!}{\nu!}. \tag{81}$$

6 پانوشتها

[1] Euler

[2] Chebyshev

[3] Legendre

[4] George B. Arfken & Hans J. Weber; "Mathematical methods for physicists" 5th edition (Academic Press, 2001) section 12.4