

دو کره ی رسانی ی باردار

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

پتانسیل و بار دو کره ی رسانی ی باردار، و نیرویی که این دوکره به هم وارد میکنند بررسی میشود، به ویژه در حالتی که این دوکره چسبیده به هم اند و با توجه ویژه به ترتیب درست جمعزدن سربهای مشروطهمگراییی که در مسئله وارد میشوند.

1 دو کره ی رسانی بیرون یکدیگر

دو کره ی رسانی را در نظر بگیرید که شعاع کره ی α برابر a_α است و فاصله ی مرکزها ی این دوکره از هم d است.

$$d =: a_1 + a_2 + \delta, \quad (1)$$

که δ نامنفی است. دوکره با هم تماس ندارند، اگر و تنها اگر δ مثبت باشد. بار و پتانسیل الکتریکی ی کره ی α به ترتیب Q_α و V_α است. البته این چهارکمیت (دو بار و دو پتانسیل) مستقل از هم نیستند. دو تا را میشود بر حسب دو تا ی دیگر حساب کرد. چگالی ی سطحی ی بار بر کره ی α برابر σ_α است. بسته گی ی σ_α ها به مکان چنان است که هر کره همپتانسیل شود. σ_α ها هم مستقل نیستند و

بر حسب دو تا از متغیرها ی بار یا پتانسیل به دست می‌آیند.

σ_1 را معلوم بگیرد. با روش تصویر (مثلن [1]) میشود برای مسئله ی بیرون کره‌ها به جای σ_2 تصویر σ_1 در کره ی 2، به اضافه ی یک بار در مرکز کره ی 2 گذاشت. تصویر بار Q در مکان D از مرکز کره ای به شعاع A در هم ین کره، بار Q' در مکان D' نسبت به مرکز آن کره است، که

$$\begin{aligned} Q' &= -\frac{A}{|D|} Q, \\ D' &= \left(\frac{A}{|D|}\right)^2 D. \end{aligned} \quad (2)$$

تصویر σ_1 را σ_{21} ، و بار مرکزی را q_{20} مینامیم. به این ترتیب، تا آنجا که به مسئله ی بیرون کره‌ها مربوط است میشود به جای σ_2 یک بار سطحی با چگالی ی σ_{21} و یک بار نقطه‌ای ی q_{20} گذاشت. البته این بار سطحی ی تصویر درون کره ی 2 است. در واقع به ساده گی دیده میشود دامنه ی σ_{21} کره ای است که مرکز ش روی پاره خط واصل مرکزها ی دوکره و به فاصله ی x_{21} از مرکز کره ی 2، و شعاع ش a_{21} است:

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{a_2^2 d}{d^2 - a_1^2}, \\ a_{21} &= \frac{a_2^2 a_1}{d^2 - a_1^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

پتانسیل حاصل از σ_1 و σ_{21} ، روی کره ی 2 برابر صفر است. از اینجا مقدار q_{20} به دست می‌آید:

$$q_{20} = 4\pi\epsilon_0 a_2 V_2. \quad (4)$$

حالا میشود برای مسئله ی بیرون کره‌ها، به جای σ_1 تصویر σ_{21} و q_{20} ، همراه با بار q_{10} در مبدئ را گذاشت. دیده میشود

$$q_{10} = 4\pi\epsilon_0 a_1 V_1. \quad (5)$$

تصویر q_{20} بار q_{11} روی پاره خط واصل مرکزها ی دوکره و به فاصله ی b_{11} از مرکز کره ی 1

است، که

$$\begin{aligned} q_{11} &= -\frac{a_1}{d} q_{20}, \\ b_{11} &= \frac{a_1^2}{d}. \end{aligned} \quad (6)$$

دامنه ی σ_{12} (تصویر σ_{21}) کره ای است که مرکز ش روی پاره خطِ واصلِ مرکزها ی دوکره و به فاصله ی x_{12} از مرکزِ کره ی 1، و شعاع ش a_{12} است:

$$\begin{aligned} x_{12} &= \frac{a_1^2 (d - x_{21})}{(d - x_{21})^2 - a_{21}^2}, \\ a_{12} &= \frac{a_1^2 a_{21}}{(d - x_{21})^2 - a_{21}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

میشود این کار را ادامه داد. یعنی به جا ی σ_{21} تصویر q_{10} و q_{11} در کره ی 2 را گذاشت. به این ترتیب برا ی مسئله ی بیرونِ کره ها σ_2 با q_{20} تا q_{22} و σ_{23} هم ارز میشود. با ادامه ی این کار، بارها ی q_{10} تا $q_{1(2n-1)}$ و توزیع $\sigma_{1(2n)}$ درونِ کره ی 1، و بارها ی q_{20} تا $q_{2(2m)}$ و توزیع $\sigma_{2(2m+1)}$ درونِ کره ی 2 به دست می آیند، که پتانسیلِ حاصلِ از آنها بیرونِ کره ها هم ان پتانسیلِ واقعی است. بار $q_{\alpha i}$ روی پاره خطِ واصلِ مرکزها ی دوکره، و به فاصله ی $b_{\alpha i}$ از مرکزِ کره ی α است. این بارها و فاصله ها با این رابطه ها ی بازگشتی به هم مربوط اند.

$$q_{\alpha i} = -q_{\alpha(i-1)} \frac{a_{\alpha}}{d - b_{\alpha(i-1)}}, \quad (8)$$

$$b_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha}^2}{d - b_{\alpha(i-1)}}, \quad (9)$$

که

$$\alpha \neq \alpha. \quad (10)$$

رابطه ها ی (8) و (9)، همراه با

$$q_{\alpha 0} = 4 \pi \epsilon_0 a_{\alpha} V_{\alpha}, \quad (11)$$

$$b_{\alpha 0} = 0, \quad (12)$$

دو کره ی رسانا ی باردار

مقدار و جای بارها را میدهند. دامنه ی توزیع $\sigma_{\alpha i}$ هم کره ای است که مرکز ش روی پاره خط $\bar{\quad}$ واصل مرکزها ی دو کره و به فاصله ی $x_{\alpha i}$ از مرکز کره ی α ، و شعاع ش $a_{\alpha i}$ است. اینها هم این رابطه ها ی بازگشتی

$$x_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha}^2 [d - x_{\alpha(i-1)}]}{[d - x_{\alpha(i-1)}]^2 - a_{\alpha(i-1)}^2}, \quad (13)$$

$$a_{\alpha i} = \frac{a_{\alpha}^2 a_{\alpha(i-1)}}{[d - x_{\alpha(i-1)}]^2 - a_{\alpha(i-1)}^2}, \quad (14)$$

و

$$x_{\alpha 0} = 0, \quad (15)$$

$$a_{\alpha 0} = a_{\alpha}, \quad (16)$$

را برمی آورند. با تعریفها ی

$$x_{\alpha i \pm} := x_{\alpha i} \pm a_{\alpha i}, \quad (17)$$

رابطه ها ی (13) تا (16) میشوند

$$x_{\alpha i \zeta} = \frac{a_{\alpha}^2}{d - x_{\alpha(i-1)\zeta}}, \quad (18)$$

$$x_{\alpha 0 \zeta} = \zeta a_{\alpha}. \quad (19)$$

با استقرا میشود نشان داد

$$\frac{x_{\alpha i \zeta}}{a_{\alpha}} \leq 1. \quad (20)$$

برای این کار (20) را به ازای $i = k$ فرض میگیریم و به ازای $i = (k + 1)$ ثابت میکنیم:

$$\begin{aligned} \frac{x_{\alpha(k+1)\zeta}}{a_{\alpha}} &= \frac{a_{\alpha}}{d - x_{\alpha k \zeta}}, \\ &\leq \frac{a_{\alpha}}{d - a_{\alpha}}, \end{aligned} \quad (21)$$

که نشان میدهد

$$\frac{x_{\alpha(k+1)\zeta}}{a_{\alpha}} \leq \frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha} + \delta}. \quad (22)$$

از (19) هم معلوم میشود (20) به ازای $i = 0$ درست است. پس (20) درست است. به این ترتیب
ضمّن نتیجه میشود

$$\frac{x_{\alpha i \zeta}}{a_{\alpha}} > 0, \quad i > 0. \quad (23)$$

از ترکیب (14) و (18) نتیجه میشود

$$\frac{a_{\alpha i}}{a_{\alpha, (i-1)}} = \frac{x_{\alpha i} + x_{\alpha i-}}{a_{\alpha}^2}, \quad (24)$$

که نتیجه میدهد شعاع دامنه ی توزیع، در تصویر شدن بزرگ نمیشود. پس حد $a_{\alpha i}$ وجود دارد. تعریف
میکنیم

$$X_{\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} X_i. \quad (25)$$

شرط لازم برای این که $a_{\alpha \infty}$ مثبت باشد این است که

$$x_{\alpha \infty \zeta} = a_{\alpha}. \quad (26)$$

اما در این حالت هم $a_{\alpha \infty}$ صفر میشود. چون

$$a_{\alpha \infty} = \frac{1}{2} (x_{\alpha \infty +} - x_{\alpha \infty -}). \quad (27)$$

پس شعاع دامنه ی توزیعها ی $\sigma_{\alpha i}$ ، در $i \rightarrow \infty$ به صفر میگراید.

یک بار Q درون کره ی α به فاصله ی R از مرکز کره ی α را در نظر بگیرید. تصویر این بار
در کره ی α' ، بار Q' به فاصله ی R' از مرکز کره ی α' است. داریم

$$R \leq a_{\alpha}, \quad (28)$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} R' &\leq \frac{a_{\alpha}^2}{d - R}, \\ &\leq \frac{a_{\alpha}^2}{a_{\alpha} + \delta}. \end{aligned} \quad (29)$$

همچنین،

$$|Q'| \leq \frac{a_{\alpha'}}{a_{\alpha'} + \delta} |Q|. \quad (30)$$

این نشان میدهد تصویر آن بار درون کره ی α' است، و قدرمطلق بار تصویر هم برابر قدرمطلق بار اولیه ضرب در عددی نایزگتر از یک است. بار تصویر را در کره ی α تصویر میکنیم و مقدار بار حاصل را با Q'' نمایش میدهیم. نتیجه میشود

$$|Q''| \leq \frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha} + \delta} |Q'|. \quad (31)$$

به این ترتیب، با i بار تصویرکردن بار Q_i به دست می آید که

$$|Q_i| \leq \left(\frac{a_{\alpha'}}{a_{\alpha'} + \delta} \right)^{i - [i/2]} \left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha} + \delta} \right)^{[i/2]} |Q|. \quad (32)$$

$[x]$ بزرگترین عدد صحیح نایزگتر از x است. دنباله ی q_{α} را چنین تعریف میکنیم.

$$q_{\alpha} := \{(i, q_{\alpha i}) \mid i\}. \quad (33)$$

دیده میشود این دنباله تحت تسلط یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت m است، که

$$m = \max \left(\frac{a_1}{a_1 + \delta}, \frac{a_2}{a_2 + \delta} \right). \quad (34)$$

روشن است که m نایزگتر از یک است. با انجام استدلال مشابهی برای بارها ی سازنده ی توزیع

$\sigma_{\alpha, i}$ ، نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \int dS |\sigma_{\alpha(2k)}| &\leq \left(\frac{a_{\alpha'}}{a_{\alpha'} + \delta} \right)^k \left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha} + \delta} \right)^k \int dS |\sigma_{\alpha}|, \\ \int dS |\sigma_{\alpha(2k+1)}| &\leq \left(\frac{a_{\alpha'}}{a_{\alpha'} + \delta} \right)^{k+1} \left(\frac{a_{\alpha}}{a_{\alpha} + \delta} \right)^k \int dS |\sigma_{\alpha}|. \end{aligned} \quad (35)$$

دنباله ی Σ_{α} را هم چنین تعریف میکنیم.

$$\Sigma_{\alpha} := \left\{ \left(i, \int dS |\sigma_{\alpha, i}| \right) \mid i \right\}. \quad (36)$$

دیده میشود Σ_{α} هم تحت تسلط یک دنباله ی هندسی با قدرنسبت m است.

کره ها با هم تماس ندارند، اگر و تنها اگر δ مثبت باشد. به ساده گی دیده میشود در این حالت m کوچکتر از یک است.

2 بار، پتانسیل، و نیرو

با استفاده از دنباله‌های i بار تصویر، میشود بار کل هر کره، پتانسیل هر کره، و نیرویی که دو کره به هم وارد میکنند را حساب کرد:

$$Q_\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} q_{\alpha i}, \quad (37)$$

$$V_\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_{\alpha i}}{a_\alpha + b_{\alpha i}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q_{\alpha' i}}{a_\alpha + d - b_{\alpha' i}} \right), \quad (38)$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_{1i} q_{2j}}{(d - b_{1i} - b_{2j})^2}, \quad (39)$$

که F نیرویی است که کره i به کره j وارد میکند،

$$\mathbf{F} =: F \hat{\mathbf{r}}, \quad (40)$$

و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار یکه در جهت مرکز کره i به مرکز کره j است.

وقت i کره‌ها با هم تماس ندارند، این سریها تحت تسلط سریها بی هندسی با قدرنسبت i کوچکتر از یک اند، بنابراین مطلقاً همگرا یند و ترتیب جمعزدن شان مهم نیست. اما وقت i کره‌ها به هم چسبیده اند چنین نیست. در این حالت باید ترتیب درست جمعزدن را مشخص کنیم. از این پس فرض میکنیم کره‌ها به هم چسبیده اند، یعنی

$$\delta = 0. \quad (41)$$

در این حالت با تعریف

$$z_{\alpha i} := \frac{1}{a_\alpha - b_{\alpha i}}, \quad (42)$$

رابطه i (9) میشود

$$z_{\alpha i} = z_{\alpha(i-1)} + \frac{1}{a_\alpha}, \quad (43)$$

یا به شکل بسته،

$$\mathbf{z}_i = \tau \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\xi}, \quad (44)$$

که

$$\mathbf{X} := \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

$$\tau := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\xi_\alpha := (a_\alpha)^{-1}. \quad (45)$$

برای یک جواب خاص (44)، نهاده ی

$$\mathbf{z}^p := \mathbf{e} + \mathbf{f} i \quad (46)$$

را میگیریم، که \mathbf{e} و \mathbf{f} ثابت اند. شرط این که (46) یک جواب (44) باشد این است که

$$(1 - \tau) \mathbf{f} = 0,$$

$$(1 - \tau) \mathbf{e} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{f}. \quad (47)$$

از اینها نتیجه میشود

$$\mathbf{f} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{e} = \bar{e} \mathbf{u} + \frac{\xi_1 - \xi_2}{4} \mathbf{v}, \quad (48)$$

که

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

و \bar{e} یک ثابت دلخواه است، که میشود آن را صفر گرفت. جواب کلی مجموع این جواب و \mathbf{z}^h (جواب کلی ی معادله ی همگن) است:

$$\mathbf{z}_i^h = \tau \mathbf{z}_{i-1}^h, \quad (50)$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{z}_i^h = \tau^i \mathbf{z}_0^h. \quad (51)$$

به این ترتیب،

$$\mathbf{z}_i = \frac{\xi_1 - \xi_2}{4} \mathbf{v} + \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \mathbf{u}_i + \tau^i \mathbf{z}_0^h. \quad (52)$$

از (12) نتیجه میشود

$$\mathbf{z}_0 = \xi, \quad (53)$$

و در نتیجه

$$\mathbf{z}_i = \frac{\xi_1 - \xi_2}{4} (1 - \tau^i) \mathbf{v} + \tau^i \xi + \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \mathbf{u}_i, \quad (54)$$

یا به شکل باز،

$$z_{\alpha(2n)} = \xi_{\alpha} + n(\xi_1 + \xi_2),$$

$$z_{\alpha(2n+1)} = (n+1)(\xi_1 + \xi_2). \quad (55)$$

از (8) نتیجه میشود

$$q_{\alpha i} = -q_{\alpha(i-1)} \frac{z_{\alpha(i-1)}}{z_{\alpha(i-1)} + \xi_{\alpha}}, \quad (56)$$

که ترکیبش با (43) میدهد

$$q_{\alpha i} z_{\alpha i} = -q_{\alpha(i-1)} z_{\alpha(i-1)}. \quad (57)$$

به این ترتیب،

$$q_{\alpha(2n)} = q_{\alpha 0} \frac{z_{\alpha 0}}{z_{\alpha(2n)}},$$

$$q_{\alpha(2n+1)} = -q_{\alpha 0} \frac{z_{\alpha 0}}{z_{\alpha(2n+1)}}, \quad (58)$$

که از ترکیب ش با (55) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} q_{\alpha(2n)} &= q_{\alpha 0} \frac{\xi_{\alpha}}{\xi_{\alpha} + n(\xi_1 + \xi_2)}, \\ q_{\alpha(2n+1)} &= q_{\alpha 1} \frac{1}{n+1}, \\ &= -q_{\alpha 0} \frac{\xi_{\alpha}}{(n+1)(\xi_1 + \xi_2)}. \end{aligned} \quad (59)$$

داریم

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= q'_{\alpha(2n)} + \sum_{i=0}^{2n-1} q_{\alpha i}, \\ &= q'_{\alpha(2n+1)} + \sum_{i=0}^{2n} q_{\alpha i}, \end{aligned} \quad (60)$$

که

$$q'_{\alpha i} := \int dS \sigma_{\alpha i}. \quad (61)$$

داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n q_{\alpha(2i)} &= q_{\alpha 0} \frac{\xi_{\alpha}}{\xi_1 + \xi_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) + O(1), \\ \sum_{i=0}^n q_{\alpha(2i+1)} &= -q_{\alpha 0} \frac{\xi_{\alpha}}{\xi_1 + \xi_2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) + O(1), \end{aligned} \quad (62)$$

که نتیجه میدهد سریها ی طرف راست (60) همگرا یند، اگر و تنها اگر

$$q_{20} \xi_2 = q_{10} \xi_1. \quad (63)$$

از مقایسه ی این با (11) دیده میشود این هم ان شرط همپتانسیل بودن دو کره است. اگر دو کره همپتانسیل نباشند،

$$\bar{E}(s) = \frac{\delta V}{\delta(s)}, \quad (64)$$

که δV اختلاف پتانسیل دو کره، و $E(s)$ میانگین مؤلفه ی میدان در راستای پاره خط $\Delta(s)$ روی این پاره خط است، که $\Delta(s)$ پاره خطی است که دو کره را به هم وصل میکند، و موازی با خط المکزین

دوکره و به فاصله ی s از آن است. $\delta(s)$ طول $\Delta(s)$ است. داریم

$$\int_{\Delta(s)} d\ell \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \geq [\bar{E}(s)]^2 \delta(s), \quad (65)$$

که همراه با (64) نتیجه میدهد

$$U \geq \frac{(\delta V)^2}{2\epsilon_0} \int_0^{s_0} ds \frac{2\pi s}{\delta(s)}, \quad (66)$$

که U انرژی ی پتانسیل الکتروستاتیک و s_0 یک مقدار مثبت دلخواه است، چنان که خط ی موازی با خطالمركزین دوکره و به فاصله ی s_0 از آن، دوکره را قطع کند. از

$$\delta(s) = a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1)^2 - s^2} - \sqrt{(a_2)^2 - s^2}, \quad (67)$$

نتیجه میشود

$$\delta(s) = O(s^2), \quad (68)$$

که همراه با (66) نتیجه میدهد انرژی ی پتانسیل این دوکره بینهایت است، مگر دوکره همپتانسیل باشند. از این پس فرض میکنیم دوکره همپتانسیل اند. به این ترتیب (63) درست است و سریها ی طرف راست (60) همگرا یند و حد شان هم یکسان است. این نتیجه میدهد $q'_{\alpha(2n)}$ و $q'_{\alpha(2n+1)}$ هم در $n \rightarrow \infty$ همگرا یند و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q'_{\alpha(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} q'_{\alpha(2n)}. \quad (69)$$

حالا توجه کنیم که وقت ی دوکره همپتانسیل اند، پتانسیل مشترک این دوکره یک بیشینه یا کمینه ی مطلق پتانسیل الکتریکی است. این یعنی مثلثه ی عمودبرسطح میدان الکتریکی روی سطح دوکره، تغییرعلامت نمیدهد، پس چگالی ی سطحی روی سطح دوکره هم تکعلامت است. به این ترتیب هر یک از $\sigma_{\alpha i}$ ها تکعلامت است. علامت $\sigma_{\alpha(2n)}$ هم ان علامت $\sigma_{\alpha 0}$ ، و علامت $\sigma_{\alpha(2n+1)}$ خلاف علامت $\sigma_{\alpha 0}$ است. علامت σ_{20} هم ان علامت σ_{10} است. پس علامت $q'_{\alpha(2n+1)}$ خلاف علامت $q'_{\alpha(2n)}$ است. از ترکیب این با (69) نتیجه میشود

$$\lim_{i \rightarrow \infty} q'_{\alpha i} = 0. \quad (70)$$

از این، همراه با این که $\sigma_{\alpha i}$ ها تکعلاامت اند نتیجه میشود چندقطبیهای توزیع $\sigma_{\alpha i}$ هم در $i \rightarrow \infty$ به صفر میگرایند. از (70) ضمن نتیجه میشود

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n q_{\alpha i}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (-1)^n q_{\alpha 0} \xi_{\alpha} \left\{ \left(\left[\frac{n}{2} \right] + 1 \right) \xi_{\alpha} + \left[\frac{n+1}{2} \right] \xi_{\alpha} \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (71)$$

پتانسیل کرهها از (38) به دست میآید، که ضمن میشود آن را چنین نوشت

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\sum_{i=0}^m \frac{q_{\alpha i}}{a_{\alpha} + b_{\alpha i}} + \sum_{i=0}^n \frac{q_{\alpha i}}{a_{\alpha} + d - b_{\alpha i}} \right) + V'_{\alpha \alpha(m+1)} + V'_{\alpha \alpha(n+1)}, \quad (72)$$

که $V'_{\alpha \beta i}$ پتانسیل حاصل از $\sigma_{\beta i}$ بر کره ی α در دورترین نقطه نسبت به کره ی α است. داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} V'_{\alpha \beta i} = 0. \quad (73)$$

هر یک از سریهای طرف راست (72) هم یک سری ی متناوب است که قدرمطلق جملهها یش نزولی و حد جمله ی عمومی یش صفر است. پس هر یک از این سریها همگرا است. داریم

$$\frac{q_{\alpha i}}{a_{\alpha} + b_{\alpha i}} + \frac{q_{\alpha i}}{a_{\alpha} + d - b_{\alpha(i-1)}} = 0, \quad i \neq 0, \quad (74)$$

چون $q_{\alpha i}$ تصویر $q_{\alpha(i-1)}$ در کره ی α است. به این ترتیب،

$$V = \frac{q_{\alpha 0}}{4\pi\epsilon_0 a_{\alpha}}, \quad (75)$$

که هم ان (11) است.

سرانجام، (39) میشود

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q_{1i} q_{2j}}{[(z_{1i})^{-1} + (z_{2j})^{-1}]^2}, \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q_{1i} z_{1i})(q_{2j} z_{2j})(z_{1i} z_{2j})}{(z_{1i} + z_{2j})^2}, \\ &= (4\pi\epsilon_0 V^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j} z_{1i} z_{2j}}{(z_{1i} + z_{2j})^2}. \end{aligned} \quad (76)$$

برای تعیین ترتیب درست جمع‌زدن این سریها، توجه میکنیم که نیروی وارد بر کره 2 از کره 1 را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned} F &= F_{\sigma_2 \sigma_1(m+1)} + \sum_{i=0}^m F_{\sigma_2 q_{1i}}, \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m F_{\sigma_2 q_{1i}}, \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n F_{q_{2j} q_{1i}} \right), \end{aligned} \quad (77)$$

که F_{AB} نیروی وارد بر A ناشی از B است. پس،

$$F = (4\pi\epsilon_0 V^2) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^{i+j} z_{1i} z_{2j}}{(z_{1i} + z_{2j})^2} \right]. \quad (78)$$

البته روشن است که میشود ترتیب حدگرفتن را عوض کرد.

این رابطه ساده‌تر میشود اگر شعاع دوکره هم یکسان باشد. در این حالت از (55) و (78) نتیجه

میشود

$$F = (4\pi\epsilon_0 V^2) \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{i+j} i j}{(i+j)^2} \right]. \quad (79)$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} f_{mn}^1 &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-i} \frac{(-1)^{i+j} i j}{(i+j)^2}, \\ f_{mn}^2 &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=m-i+1}^{n-i} \frac{(-1)^{i+j} i j}{(i+j)^2}, \\ f_{mn}^3 &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=n-i+1}^n \frac{(-1)^{i+j} i j}{(i+j)^2}, \end{aligned} \quad (80)$$

که فرض شده

$$m \leq n. \quad (81)$$

رابطه‌ها ی (80) را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned} f_{m n}^1 &= \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^k i (k-i)}{k^2}, \\ f_{m n}^2 &= \sum_{k=m+1}^n \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^k i (k-i)}{k^2}, \\ f_{m n}^3 &= \sum_{k=n+1}^{m+n} \sum_{i=k-n}^m \frac{(-1)^k i (k-i)}{k^2}, \end{aligned} \quad (82)$$

داریم

$$\sum_{i=1}^m i (k-i) = \frac{m(m+1)(3k-2m-1)}{6}, \quad (83)$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} f_{m n}^1 &= \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k k (k^2-1)}{6 k^2}, \\ f_{m n}^2 &= \sum_{k=m+1}^n \frac{(-1)^k m(m+1)(3k-2m-1)}{6 k^2}, \\ f_{m n}^3 &= \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{(-1)^k m(m+1)(3k-2m-1)}{6 k^2} \\ &\quad - \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{(-1)^k (k-n-1)(k-n)(k+2n+1)}{6 k^2}. \end{aligned} \quad (84)$$

دنباله ی $g^{I_1} \dots$ را یک زیردنباله ی g تعریف میکنیم که دامنه اش $\mathbb{N}_{I_1} \times \dots$ است. I_s مقادیرا ی e و o را میپذیرد. \mathbb{N}_e مجموعه ی عددها ی طبیعی ی زوج، و \mathbb{N}_o مجموعه ی عددها ی طبیعی ی فرد است.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m (-1)^k &= \frac{m}{2}, \quad m \in \mathbb{N}_e, \\ \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k} &= -\ln 2 + o(m^0). \end{aligned} \quad (85)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-1} &= \frac{1}{2} [(p+1)^{-1} - (p-1)^{-1}] [1 + o(p^{-1})], \\ \left(p + \frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^{-2} &= \frac{1}{2} [(p+1)^{-2} - (p-1)^{-2}] [1 + o(p^{-1})], \end{aligned} \quad (86)$$

که نتیجه میدهد

$$\sum_{k=M+1}^N (-1)^k k^{-1} = \frac{1}{2} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(M + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right] + o(M^{-2}), \quad (M, N) \in (\mathbb{N}_e \times \mathbb{N}_e), \quad (87)$$

و

$$\sum_{k=M+1}^N (-1)^k k^{-2} = \frac{1}{2} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right)^{-2} - \left(M + \frac{1}{2} \right)^{-2} \right] + o(M^{-3}), \quad (M, N) \in (\mathbb{N}_e \times \mathbb{N}_e). \quad (88)$$

با تعریف

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{m n}^2 &:= \sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{(-1)^k m(m+1)(3k-2m-1)}{6k^2}, \\ \tilde{f}_{m n}^3 &:= - \sum_{k=n+1}^{m+n} \frac{(-1)^k (k-n-1)(k-n)(k+2n+1)}{6k^2}, \end{aligned} \quad (89)$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} f_{m n}^{1ee} &= \frac{1}{6} \left[\frac{m}{2} + \ln 2 \right] + o(m^0), \\ \tilde{f}_{m n}^{2ee} &= \frac{1}{6} \left\{ \frac{3m(m+1)}{2} \left[\left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(m+\frac{1}{2} \right)^{-1} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{m(m+1)(2m+1)}{2} \left[\left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{-2} - \left(m+\frac{1}{2} \right)^{-2} \right] \right\} + o(m^0), \\ \tilde{f}_{m n}^{3ee} &= \frac{1}{6} \left\{ -\frac{m}{2} + \frac{3n(n+1)+1}{2} \left[\left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{-1} - \left(n+\frac{1}{2} \right)^{-1} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \left[\left(m+n+\frac{1}{2} \right)^{-2} - \left(n+\frac{1}{2} \right)^{-2} \right] \right\} + o(m^0). \end{aligned} \quad (90)$$

به این ترتیب، با تعریف

$$x := \frac{m}{n} \quad (91)$$

نتیجه میشود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_{(xn)n}^{1ee} + f_{(xn)n}^{2ee} + f_{(xn)n}^{3ee}] = \frac{1}{6} \left[\ln 2 - \frac{x^2 - 4x + 1}{4(x+1)^2} \right]. \quad (92)$$

این عبارت بسته گی ی نتیجه به ترتیب حدگیری را به روشنی نشان میدهد. بر اساس (79)، ترتیب ی که در محاسبه ی نیرو وارد میشود متناظر با $x = 0$ است. سری ی طرف راست (79) همگرا است. از اینجا نتیجه میشود طرف راست (92) در $x = 0$ ، هم ان حد سری ی طرف راست (79) است:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{mn}^1 + f_{mn}^2 + f_{mn}^3) \right] = \frac{1}{6} \left(\ln 2 - \frac{1}{4} \right). \quad (93)$$

همچنین دیده میشود

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{nn}^1 + f_{nn}^2 + f_{nn}^3) = \frac{1}{6} \left(\ln 2 + \frac{1}{8} \right). \quad (94)$$

[2] و [3] شامل محاسبه های مشابه برای یک مسئله ی دیگر (دو کره رسانا ی چسبیده به هم در یک میدان الکتریکی ی خارجی) اند. همچنین در [4] نیرو ی بین دو کره ی باردار بررسی شده است.

برای دو کره ی رسانا ی یکسان به شعاع a که به هم چسبیده اند، رابطه ی پتانسیل الکتریکی و

بار هر کره هم ساده میشود. در این حالت از (71) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} Q &= q_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i+1}, \\ &= q_0 \ln 2, \end{aligned} \quad (95)$$

که Q بار هر کره، و q_0 بار تصویر مرکز هر کره است. به این ترتیب،

$$V = \frac{1}{\ln 2} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad (96)$$

که a شعاع هر کره هست. از جمله C (ظرفیت این مجموعه) میشود

$$\begin{aligned} C &= \frac{2Q}{V}, \\ &= (\ln 4) (4\pi\epsilon_0 a), \\ &= 1.3863 (4\pi\epsilon_0 a). \end{aligned} \quad (97)$$

ظرفیت این مجموعه بزرگتر از ظرفیت یک کره، و کوچکتر از ظرفیت دو کره ی یکسان دور از هم است که با سیم نازک ی به هم وصل شده اند.
سرانجام،

$$F = \frac{4 \ln 2 - 1}{6 (\ln 2)^2} \frac{Q^2}{4 \pi \epsilon_0 (2a)^2},$$

$$= 0.6149 \frac{Q^2}{4 \pi \epsilon_0 (2a)^2}. \quad (98)$$

این نیرو کوچکتر از نیرو ی بین دو بار نقطه ای ی Q است که هر یک در مرکز یک کره باشد.

3 مرجعها

- [1] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 2
- [2] H. F. M. van den Bosch, K. J. Ptasinski, & P. J. A. M. Derkhof; "two conducting spheres in a parallel electric field"; Journal of Applied Physics **78** (1995) 6345–6352
- [3] احمد شریعتی؛ «دو کره ی رسانا ی همسان مماس، در یک میدان الکتریکی»؛ گاما 22 (بهار 1388) 36 تا 53
- [4] مسلم مرادی؛ «محاسبه ی نیرو ی بین دو کره ی رسانا ی باردار»؛ گاما 9 (زمستان 1384) 29 تا 40