X1-065 (2010/01/28)

پتانسیل ِ اسکالر ِ یک لوله با جریان ِ سمتی

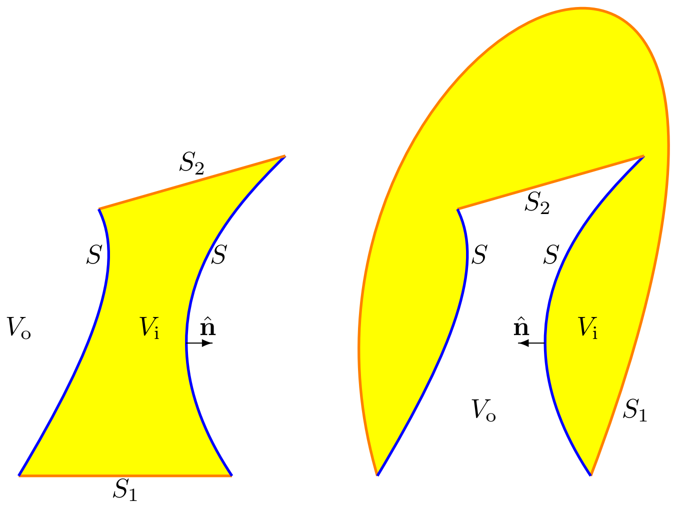
محمد خرمی mamwad@mailaps.org

یک لوله (یِ باپایان) را در نظر بگیرید که از آن یک جریان ِ پایسته و مستقل از زمان میگذرد. میدان ِ مغناطیسی یِ حاصل از این لوله را با محاسبه یِ پتانسیل ِ اسکالر ِ مغناطیسی بررسی میکنیم.

1 لوله

لوله یک رویه است که تُپُلُژی یِ آن تپُلُژی یِ یک استوانه با ارتفاع ِ باپایان است، یعنی حاصلِضرب ِ یک دایره در یک پارهخط. مرز ِ لوله یِ S دوپارچه است و هر تکه یِ آن یک خم ِ بسته است. این خمها را با L_1 و L_2 نشان میدهیم. L_j مرز ِ سطح ِ S_j است. البته S_j یکتا نیست. S_1 و S_2 را چنان میگیریم که یکدیگر و نیز S را قطع نکنند. در این صورت $(S\cup S_1\cup S_2)$ یک رویه یِ بسته است. $\mathbb{R}^3\backslash(S\cup S_1\cup S_2)$ شامل ِ دو ناحیه یِ داخل و خارج ِ $(S\cup S_1\cup S_2)$ است، که آنها را با به ترتیب $V_{\rm i}$ و $V_{\rm o}$ نشان میدهیم. همچنین رو یِ $(S\cup S_1\cup S_2)$ یک میدان ِ برداری یِ $\hat{\mathbf{n}}$ تعریف میشود که همهجا عمود بر $(S\cup S_1\cup S_2)$، بهنجار، و به سو یِ خارج است. البته چون در انتخاب ِ S_1 و S_2 آزادی هست، در $V_{\rm i}$ و $V_{\rm o}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ هم آزادی هست. آزادی یِ $\hat{\mathbf{n}}$ رو یِ S در فقط جهت ِ آن است. اگر لوله بیپایان میبود، در تعیین ِ $V_{\rm i}$ و $V_{\rm o}$ و $\hat{\mathbf{n}}$ آزادی یی نمیماند. شکل ِ 1 دو انتخاب برا یِ S_1 و S_2 و

در نتیجه V_i و V_o و $\hat{\mathbf{n}}$ را نشان میدهد.



شکلِ 1

2 تابعِ جریان

لوله ای را در نظر بگیرید که از آن یک جریانِ سطحی میگذرد، چنان که دیورژانسِ (دوبُعدی یِ) این جریان صفر است و در مرز لوله هم مثلفه یِ عمودبرمرزِ جریان صفر است. به این ترتیب جریانِ کل ی که از مرزِ هر سطح ی بر لوله بیرون میرود صفر است:

$$\oint_{\partial S'} \mathrm{d}\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = 0, \qquad (1)$$

که $\mathbf{J}_\mathrm{s}$ چگالی یِ جریانِ سطحی است. از (1) نتیجه میشود یک نگاشتِ I با دامنه یِ S هست که

$$\nabla_\parallel I = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{J}_\mathrm{s}, \qquad (2)$$

که $\nabla_\parallel$ مشتقگیری در رویه است. از این که $\mathbf{J}_\mathrm{s}$ در هر نقطه یِ L_j بر L_j مماس است، نتیجه میشود $\nabla_\parallel I$ در هر نقطه یِ L_j بر L_j عمود است، و در نتیجه I بر L_j ثابت است. مقدارِ I بر L_j را با I_j نشان میدهیم. دیده میشود

$$I(\mathbf{r}) = I_1 + \int_C \mathrm{d}\mathbf{r}' \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}_\mathrm{s}(\mathbf{r}'), \qquad (3)$$

که C خم ی در S است که ابتدا یِ آن نقطه ای بر L_1 و انتها یِ آن $\mathbf{r}$ است. به I نگاشت ِ جریان میگوییم. دیده میشود $[I(\mathbf{r}_2) - I(\mathbf{r}_1)]$ جریان ی است که از بین ِ نقطه‌ها یِ $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ میگذرد.

3 پتانسیل ِ اسکالر ِ حلقه

یک حلقه را در نظر بگیرید که از آن جریان ِ یکنواخت ِ I_0 میگذرد. Σ را رویه ای میگیریم که مرز ِ آن این حلقه است، و جهت ِ عمود بر این رویه را چنان میگیریم که این جهت و سو یِ قراردادی یِ حلقه با فرمول ِ سْتُکس [a] سازگار باشد. Σ را به بخشها یی کوچک تقسیم میکنیم. هر بخش یک دوقطبی یِ مغناطیسی یِ کوچک میشود. $\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r})$ (پتانسیل ِ اسکالر در نقطه یِ $\mathbf{r}$) حاصل از دوقطبی یِ مغناطیسی یِ $\mathbf{m}$ در نقطه یِ $\mathbf{r}'$ میشود

$$\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\,\mathbf{m}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{4\,\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}. \tag{4}$$

به این ترتیب،

$$\phi_\Sigma(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{5}$$

که ϕ_Σ پتانسیل ِ اسکالر ِ حاصل از حلقه است. (4) فقط برا یِ $\mathbf{r}\ne\mathbf{r}'$، و (5) فقط برا یِ $\mathbf{r}\notin\Sigma$ معتبر اند. در واقع (5) را میشود چنین نوشت

$$\phi_\Sigma(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\,\Omega_\Sigma(\mathbf{r}), \tag{6}$$

که $\Omega_\Sigma(\mathbf{r})$ زاویه یِ فضایی یِ Σ از دید ِ $\mathbf{r}$ است. در نتیجه،

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[\phi_\Sigma(\mathbf{r}+\epsilon\,\hat{\mathbf{u}}) - \phi_\Sigma(\mathbf{r}-\epsilon\,\hat{\mathbf{u}})] = \mu_0\,I_0, \qquad \mathbf{r}\in\Sigma, \tag{7}$$

که $\hat{\mathbf{u}}$ بردار ِ یکه یِ عمود بر Σ (با جهت ِ قراردادی) در $\mathbf{r}$ است.

ϕ_Σ در Σ پیوسته نیست، و طبعَن مشتق‌پذیر هم نیست. اما حد ِ مشتق ِ آن همه‌جا وجود دارد و داریم

$$\mathbf{B}_\Sigma(\mathbf{r}) = -\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}}\nabla\phi_\Sigma(\mathbf{r}'), \tag{8}$$

که $\mathbf{B}_\Sigma$ میدان ِ مغناطیسی است. البته اگر $\mathbf{r}\notin\Sigma$، در (8) حدگیری هم لازم نیست.

برا ی ِ بررسی ی ِ بسته‌گی ی ِ ϕ_Σ به Σ، یک رویه ی ِ $\tilde\Sigma$ می‌گیریم که مرز َش با مرز ِ Σ یکسان است، و $\mathcal{V}$ را حجم ی ِ می‌گیریم که مرز َش شامل ِ $\tilde\Sigma$ و $-\Sigma$ است. $-\Sigma$ هم ان Σ است که جهت ِ عمود بر آن مخالف ِ جهت ِ عمود بر Σ است. $\phi_{\tilde\Sigma}$ شبیه ِ ϕ_Σ ولی با $\tilde\Sigma$ به جا ی ِ Σ است. داریم

$$\begin{aligned}
\phi_{\tilde\Sigma}(\mathbf{r})-\phi_\Sigma(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\,\left(\int_{\tilde\Sigma}-\int_\Sigma\right)\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},\\
&= \frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\,\oint_{\partial\mathcal{V}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},\\
&= \frac{\mu_0\,I_0}{4\,\pi}\,\int_{\mathcal{V}}\mathrm{d}V'\;\nabla'\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},\\
&= -\mu_0\,I_0\,\int_{\mathcal{V}}\mathrm{d}V'\;\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\\
&= -n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})\,\mu_0\,I_0,
\end{aligned}\tag{9}$$

که $n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})$ تعداد ِ بارها یی است که $\mathbf{r}$ در $\mathcal{V}$ ظاهر می‌شود. $n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})$ یک عدد ِ صحیح (مثبت، صفر، یا منفی) است. برا ی ِ محاسبه ی ِ این عدد یک گوی می‌گیریم که شامل ِ Σ و $\tilde\Sigma$ است. یک نقطه بیرون ِ این گوی می‌گیریم و خم ی می‌سازیم که ابتدا ی ِ آن این نقطه و انتها ی ِ آن $\mathbf{r}$ است. این خم رویه‌ها ی ِ $-\Sigma$ و $\tilde\Sigma$ را در نقطه‌ها یی قطع می‌کند. (البته ممکن است تعداد ِ این نقطه‌ها صفر باشد.) به هر نقطه ی ِ تقاطع ِ $\mathbf{r}_i$ یک عدد ِ $n(\mathbf{r}_i)$ نسبت می‌دهیم که $+1$ است اگر در آن نقطه زاویه ی ِ مماس بر خم با جهت ِ قراردادی ی ِ عمود بر رویه منفرجه باشد؛ و -1 است اگر در آن نقطه زاویه ی ِ مماس بر خم با جهت ِ قراردادی ی ِ عمود بر رویه حاده باشد. اگر این زاویه قائمه بود، خم را جابه‌جا می‌کنیم تا زاویه تغییر کند یا تقاطع حذف شود.

$$n_{\mathcal{V}}(\mathbf{r})=\sum_i n(\mathbf{r}_i).\tag{10}$$

از (9) دیده می‌شود بیرون ِ $\mathcal{V}$ (از جمله بیرون ِ یک گوی که Σ و $\tilde\Sigma$ را در بر دارد) $\phi_{\tilde\Sigma}$ با ϕ_Σ برابر است. از (9) ضمنَن دیده می‌شود جز در $\Sigma\cup\Sigma'$ مشتق ِ $\phi_{\tilde\Sigma}$ با مشتق ِ ϕ_Σ برابر است. به این ترتیب از (8) دیده می‌شود میدان ِ مغناطیسی به انتخاب ِ Σ بسته‌گی ندارد، چنان که انتظار می‌رفت.

4 پتانسیلِ اسکالرِ لوله

لوله یِ S را در نظر بگیرید که از آن جریان ی سطحی با چگالی یِ $\mathbf{J}_\mathrm{s}$ میگذرد، چنان که (1) برقرار است. با هم ان تعریفها یِ پیش، نگاشتِ کمکی یِ ψ را نگاشت ی هموار با دامنه یِ $\bar{V}_\mathrm{i}$ (بستارِ V_i) تعریف میکنیم که

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}) &= I(\mathbf{r}), && \mathbf{r}\in S,\\ \psi(\mathbf{r}) &= I_j, && \mathbf{r}\in S_j,\\ \nabla^2\psi(\mathbf{r}) &= 0, && \mathbf{r}\in V_\mathrm{i}.\end{aligned} \tag{11}$$

وقت ی V_i و I_1 معلوم باشند، به خاطرِ قضیه یِ یکتایی ی جوابِ معادله یِ لَپلَس [b] با شرطِ مرزی یِ دیریشلِت [c] (مثلَن [1]) این نگاشت یکتا است. V_i را چنان میگیریم که $\mathbf{r}$ در V_o باشد. رویهها یِ یکپارچه یِ نزدیکبههمِ ψ -ثابتِ Σ و $(\Sigma+\Delta\Sigma)$ را چنان میگیریم که ψ بر آنها به ترتیب ψ_0 و $(\psi_0+\Delta\psi)$ باشد. بخش ی از لوله که بینِ این دورویه است مثلِ حلقه ای با جریانِ $\Delta\psi$ است. بخش ی از ناحیه یِ بینِ این رویهها را در نظر بگیرید که متناظر با بردارِمساحتِ $\Delta\mathbf{S}$ است. برا یِ $\Delta\phi_{V_\mathrm{i}}$ (پتانسیلِ اسکالرِ حاصل از این ناحیه) داریم

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,(\Delta\psi)\,\Omega_\Sigma(\mathbf{r})+o(\Delta\psi),\\ &= -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,[(\psi_0+\Delta\psi)\,\Omega_\Sigma(\mathbf{r})-\psi_0\,\Omega_\Sigma(\mathbf{r})]+o(\Delta\psi),\\ &= -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\{(\psi_0+\Delta\psi)\,[\Omega_{\Sigma+\Delta\Sigma}(\mathbf{r})+\Omega_{\Delta S}(\mathbf{r})]-\psi_0\,\Omega_\Sigma(\mathbf{r})\}+o(\Delta\psi),\end{aligned} \tag{12}$$

که ΔS بخش ی از S است که بینِ Σ و $(\Sigma+\Delta\Sigma)$ است. از اینجا نتیجه میشود

$$\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\left[I_2\,\Omega_{S_2}(\mathbf{r})-I_1\,\Omega_{S_1}(\mathbf{r})-\int_S\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,I(\mathbf{r}')\right]. \tag{13}$$

حالا فرض کنید S_1 یا S_2 را چنان جابهجا کنیم که $\mathbf{r}$ درونِ V_i بیفتد. در این صورت ϕ_{V_i} در یک همسایهگی یِ $\mathbf{r}$ به اندازه یِ $(-\mu_0\,I_2)$ یا $(\mu_0\,I_1)$ تغییر میکند. اما این یعنی مشتقِ ϕ_{V_i} عوض نمیشود.

پس برا یِ میدان ِ مغناطیسی $(\mathbf{B})$ داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\lim_{\mathbf{r}'\to\mathbf{r}} \nabla\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}'), \tag{14}$$

که ϕ_{V_i} برا یِ همه یِ $\mathbf{r}$ ها با (13) تعریف شده. توجه داریم که در ϕ_{V_i} نگاشت ِ کمکی یِ ψ ظاهر نشده و همه چیز بر حسب ِ I و رویه‌ها یِ S_1 و S_2 بیان شده. فقط در این رویه‌ها و البته در یک ثابت ِ جمعی در I هست که اختیار هست. دیده میشود اگر I به اندازه یِ ΔI تغییر کند، $\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r})$ به اندازه یِ $[-(4\,\pi)^{-1}\,\mu_0\,\Omega_S(\mathbf{r})\,\Delta I]$ تغییر میکند، یعنی در V_o تغییر نمیکند و در V_i به اندازه یِ $(-\mu_0\,\Delta I)$ تغییر میکند.

(13) را میشود بر حسب ِ ψ چنین نوشت.

$$\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\oint_{\partial V_\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\,\psi(\mathbf{r}'). \tag{15}$$

به ساده‌گی دیده میشود اگر L حلقه ای باشد که ∂V_i را در نقطه‌ها یِ r_j قطع میکند،

$$\begin{aligned}\oint_L \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\mathbf{B} &= -\int_{\tilde L}\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\phi_{V_\mathrm{i}},\\ &= -\oint_L \mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\phi_{V_\mathrm{i}} + \sum_j \delta\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}_j),\\ &= \mu_0\sum_j n(\mathbf{r}_j)\,\psi(\mathbf{r}_j),\end{aligned} \tag{16}$$

که $\tilde L$ بخش ی از L است که $\mathbf{r}_j$ ها از آن حذف شده، و

$$\delta\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}) := \lim_{\epsilon\to 0^+}[\phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}+\epsilon\,\hat{\mathbf{u}}) - \phi_{V_\mathrm{i}}(\mathbf{r}-\epsilon\,\hat{\mathbf{u}})], \qquad \mathbf{r}_j\in\partial V_i. \tag{17}$$

این هم ان قانون ِ آمپِر [d] است.

5 بار ِ مغناطیسی

رابطه یِ (15) پتانسیل ِ اسکالر را بر حسب ِ یک دوقطبی یِ مغناطیسی با چگالی یِ سطحی یِ $\mathbf{M}_\mathrm{s}$ میدهد:

$$\mathbf{M}_\mathrm{s}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}\,\psi(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in\partial V_\mathrm{i}. \tag{18}$$

از (15) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\phi_{V_{\rm i}}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\,\pi}\oint_{\partial V_{\rm i}}\left(\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\,\psi(\mathbf{r}'),\\ &= \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{V_{\rm i}}\mathrm{d}V'\,\left[\left(\nabla'^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\,\psi(\mathbf{r}')+\left(\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\cdot\nabla'\psi(\mathbf{r}')\right],\\ &= \frac{\mu_0}{4\,\pi}\int_{V_{\rm i}}\mathrm{d}V'\,\left\{-4\,\pi\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\psi(\mathbf{r}')+\nabla'\cdot\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\psi(\mathbf{r}')\right]\right\},\\ &= -\mu_0\,\Theta_{V_{\rm i}}(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})+\frac{\mu_0}{4\,\pi}\oint_{\partial V_{\rm i}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot\nabla'\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\end{aligned}\tag{19}$$

که

$$\Theta_{V_{\rm i}}(\mathbf{r}) := \begin{cases}1, & \mathbf{r}\in V_{\rm i}\\ 0, & \mathbf{r}\notin V_{\rm i}\end{cases},\tag{20}$$

و از این استفاده شده که $\nabla^2\psi$ صفر است.

رابطه ی (19) پتانسیل ِ اسکالر در $V_{\rm o}$ را برحسب ِ یک بار ِ مغناطیسی با چگالی ی ِ سطحی ی ِ $\sigma_{\rm m}$ میدهد، که

$$\sigma_{\rm m}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}).\qquad \mathbf{r}\in\partial V_{\rm i}.\tag{21}$$

البته بار ِ مغناطیسی ی ِ کل ِ این توزیع صفر است:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial V_{\rm i}}\mathrm{d}S\;\sigma_{\rm m}(\mathbf{r}) &= \oint_{\partial V_{\rm i}}\mathrm{d}S\;\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\psi(\mathbf{r}),\\ &= \int_{V_{\rm i}}\mathrm{d}V\;\nabla^2\psi(\mathbf{r}),\\ &= 0,\end{aligned}\tag{22}$$

که نشان میدهد دور از لوله پتانسیل ِ اسکالر جمله ی ِ متناسب با r^{-1} ندارد و در نتیجه میدان جمله ی ِ متناسب با r^{-2} ندارد، که این هم ان ی است که برا ی ِ میدان ِ مغناطیسی ی ِ ایستا انتظار میرود.

در $V_{\rm i}$ پتانسیل ِ اسکالر علاوه بر پتانسیل ِ اسکالر ِ حاصل از این بار ِ مغناطیسی یک جمله ی ِ دیگر هم دارد. به این ترتیب برا ی ِ میدان ِ مغناطیسی در کل ِ فضا داریم

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\,\Theta_{V_{\rm i}}(\mathbf{r})\,\nabla\psi(\mathbf{r})-\frac{\mu_0}{4\,\pi}\,\nabla\oint_{\partial V_{\rm i}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{S}'\cdot\nabla'\psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.\tag{23}$$

از جمله نتیجه میشود

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[\mathbf{B}(\mathbf{r}-\epsilon\,\hat{\mathbf{n}})-\mathbf{B}(\mathbf{r}+\epsilon\,\hat{\mathbf{n}})] = \mu_0\,\nabla\psi(\mathbf{r}) - \mu_0\,\hat{\mathbf{n}}\,\hat{\mathbf{n}}[\cdot\nabla\psi(\mathbf{r})], \\ = \mu_0\,\nabla_{\|}\psi(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in\partial V_{\mathrm{i}}. \tag{24}$$

این رابطه نشان میدهد میدانِ مغناطیسی بر S_j پیوسته است، و بر S هم بخشِ عمودبررویه اَش پیوسته است و بخشِ مماسبررویه اَش پرش دارد. با استفاده از (2) نتیجه میشود

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}[\mathbf{B}(\mathbf{r}-\epsilon\,\hat{\mathbf{n}})-\mathbf{B}(\mathbf{r}+\epsilon\,\hat{\mathbf{n}})] = \mu_0\,\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{J}_{\mathrm{s}}, \qquad \mathbf{r}\in S, \tag{25}$$

که هم ان ی است که از قانونها یِ آمپِر [d] و گاؤس [e] انتظار میرود.

6 مرجع

[1] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 1

7 اسمها یِ خاص

[a] Stocks

[b] Laplace

[c] Dirichlet

[d] Ampère

[e] Gauss