

X1-061 (2009/07/30)

## پدیده ی دِ هاس- فان آلفن در دو بُعد

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

دیامغناطیس یک گاز فرمیونی بی برهمکنش مقید به دو بُعد، در دما ی صفر بررسی میشود و یک رفتار نوسانی در پذیرفتاری ی آن به دست می آید.

### 1 دوقطبی ی مغناطیسی

یک گاز بی برهمکنش در حضور میدان مغناطیسی ی یکنواخت  $\mathbf{B}$  را در نظر بگیرید، که ذره ها ی آن با انرژی ی پتانسیل مقیدکننده ی  $U$  به یک حجم مقید اند.  $H$  (همیلتنی ی تکذره ای ی این سیستم) به شکل

$$H := \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p} - q \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q \mathbf{A}) + U(\mathbf{r}) \quad (1)$$

است، که  $\mathbf{r}$  مکان و  $\mathbf{p}$  تکانه است.  $\mu$  جرم ذره،  $q$  بار ذره، و  $\mathbf{A}$  پتانسیل برداری است:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (2)$$

عملگر دوقطبی ی مغناطیسی برا ی یک ذره

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (3)$$

است، که  $\dot{X}$  مشتق  $X$  نسبت به زمان  $(t)$  است. از جابه‌جاگرها ی معمول بین مکان و تکانه

$$\begin{aligned} [r^j, r^k] &= 0, \\ [r^j, p_k] &= i \hbar \delta_k^j, \\ [p_j, p_k] &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

همراه با معادله ی هیزنبرگ [a] برا ی تحول عملگر  $X$  که صریحاً به زمان وابسته نیست:

$$i \hbar \dot{X} = [X, H], \quad (5)$$

نتیجه میشود

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{p} - q \mathbf{A}), \quad (6)$$

و از آنجا

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2\mu} \mathbf{r} \times (\mathbf{p} - q \mathbf{A}), \quad (7)$$

که میشود آن را به این شکل نوشت.

$$\mathbf{m} = -\nabla_{\mathbf{B}} H. \quad (8)$$

$\nabla_{\mathbf{B}}$  مشتگیری نسبت به  $\mathbf{B}$  است.

$\mathbf{u}$  را یک بردار یکه در راستای  $\mathbf{B}$  میگیریم و  $B$  را چنین تعریف میکنیم.

$$\mathbf{B} =: B \mathbf{u}. \quad (9)$$

حالت ی را بررسی میکنیم که حجم مقیدکننده یک استوانه به ارتفاع  $D$  و مساحت مقطع  $S$  است، چنان که محور این استوانه با  $\mathbf{u}$  موازی است. در این صورت،

$$H = H_c + H_f, \quad (10)$$

که  $H_c$  تابع فقط  $\mathbf{r}_\perp$  و  $\mathbf{p}_\perp$ ، و  $H_f$  تابع فقط  $\mathbf{r}_\parallel$  و  $\mathbf{p}_\parallel$  است.  $\mathbf{V}_\parallel$  و  $\mathbf{V}_\perp$  یعنی تصویر  $\mathbf{V}$  به ترتیب عمود بر  $\mathbf{u}$  و موازی با آن دیده می‌شود

$$[H_c, H_f] = 0, \quad (11)$$

که نتیجه میدهد میشود  $H_c$  و  $H_f$  را همزمان قطری کرد. در واقع

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \otimes \mathcal{H}_f, \quad (12)$$

که  $\mathcal{H}$  فضا ی هیلبرت  $[b]$  تکذره‌ای،  $\mathcal{H}_c$  فضا ی هیلبرت  $[b]$  متناظر با درجه‌ها ی آزادی ی عمود بر  $\mathbf{u}$ ، و  $\mathcal{H}_f$  فضا ی هیلبرت  $[b]$  متناظر با درجه‌ها ی آزادی ی موازی با  $\mathbf{u}$  است. به ساده‌گی دیده می‌شود اگر  $X_c$  و  $Y_f$  دو عملگر تابع فقط درجه‌ها ی آزادی ی به ترتیب عمود بر  $\mathbf{u}$  و موازی با  $\mathbf{u}$  باشند، و

$$|\psi\rangle = |\alpha_c\rangle \otimes |\beta_f\rangle, \quad (13)$$

$$|\alpha_c\rangle \in \mathcal{H}_c,$$

$$|\beta_f\rangle \in \mathcal{H}_f,$$

آنگاه،

$$\langle \psi | X_c Y_f | \psi \rangle = \langle \psi | X_c | \psi \rangle \langle \psi | Y_f | \psi \rangle. \quad (14)$$

همچنین از (5) نتیجه میشود اگر  $|\psi\rangle$  یک ویژه‌بردار  $H$  باشد، به ازا ی عمل‌گر دلخواه  $X$ ،

$$\langle \psi | \dot{X} | \psi \rangle = 0., \quad (15)$$

بردار  $|\psi\rangle$  را به شکل (13) میگیریم، که  $|\alpha_c\rangle$  و  $|\beta_f\rangle$  ویژه‌بردارها ی به ترتیب  $H_c$  و  $H_f$  اند.

داریم

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}_\parallel \times \dot{\mathbf{r}}_\perp + \mathbf{r}_\perp \times \dot{\mathbf{r}}_\parallel + \mathbf{r}_\perp \times \dot{\mathbf{r}}_\perp. \quad (16)$$

پدیده ی دِ هاس- فان آلفین در دو بُعد

از (14) و (15) نتیجه میشود مقدار چشمداشتی ی دوجمله ی اول طرف راست (16) صفر است. پس،

$$\langle \psi | \mathbf{m} | \psi \rangle = \frac{q}{2} \langle \psi | \mathbf{r}_\perp \times \dot{\mathbf{r}}_\perp | \psi \rangle. \quad (17)$$

این یعنی  $\langle \mathbf{m} \rangle$  با  $\mathbf{u}$  موازی است. پس،

$$\langle \psi | \mathbf{m} | \psi \rangle = m \mathbf{u}, \quad (18)$$

که

$$m = - \left\langle \psi \left| \frac{\partial H}{\partial B} \right| \psi \right\rangle \quad (19)$$

با استفاده از

$$\begin{aligned} H_c &:= \frac{1}{2\mu} (\mathbf{p}_\perp - q \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p}_\perp - q \mathbf{A}) + U_c(\mathbf{r}_\perp), \\ H_f &:= \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_\parallel \cdot \mathbf{p}_\parallel + U_f(\mathbf{r}_\parallel), \end{aligned} \quad (20)$$

معلوم میشود  $H_f$  به  $B$  بسته گی ندارد. پس،

$$m = - \left\langle \psi \left| \frac{\partial H_c}{\partial B} \right| \psi \right\rangle \quad (21)$$

## 2 طیف همیلتنی ی محصورگر

از (20) و (2) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} H_c &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp + \frac{q^2 B^2}{8\mu} \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \frac{q}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp, \\ &= \frac{1}{2\mu} \mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp - \frac{\omega}{2} L, \end{aligned} \quad (22)$$

که

$$L := \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}, \quad (23)$$

و  $\mathbf{L}$  تکانه ی زاویه ای است. دیده میشود

$$H_c = H_h - \frac{\omega}{2} L, \quad (24)$$

که

$$\omega := \frac{qB}{m}, \quad (25)$$

و  $H_h$  همیلتنی ی یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد دویعدی با بسامد زاویه ای  $\Omega$  است، که

$$\Omega := \left| \frac{\omega}{2} \right|. \quad (26)$$

ضمنن،

$$[H_h, L] = 0. \quad (27)$$

بردارها ی  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  را چنان میگیریم که  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{u})$  یک کنج یکه متعامد راستگرد باشد. عملگرها ی پایینبر  $a$  و  $b$  را به شکل معمول، متناظر با بردارها ی  $\mathbf{e}_1$  و  $\mathbf{e}_2$  تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} a &:= \sqrt{\frac{\mu \Omega}{2 \hbar}} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{r} + \frac{i}{\sqrt{2 \hbar \mu \Omega}} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{p}, \\ b &:= \sqrt{\frac{\mu \Omega}{2 \hbar}} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{r} + \frac{i}{\sqrt{2 \hbar \mu \Omega}} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (28)$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} H_h &= \hbar \Omega (a^\dagger a + b^\dagger b + 1), \\ L &= i \hbar (b^\dagger a - a^\dagger b). \end{aligned} \quad (29)$$

با تعریفها ی

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (a + i b), \\ \beta &:= \frac{1}{\sqrt{2}} (a - i b), \end{aligned} \quad (30)$$

رابطه‌ها ی (29) میشوند

$$\begin{aligned} H_h &= \hbar \Omega (\alpha^\dagger \alpha + \beta^\dagger \beta + 1), \\ L &= \hbar (\beta^\dagger \beta - \alpha^\dagger \alpha). \end{aligned} \quad (31)$$

تنهارابطه‌ها ی جابه‌جایی ی نابدیهی بین  $\alpha$ ،  $\alpha^\dagger$ ،  $\beta$  و  $\beta^\dagger$

$$\begin{aligned} [\alpha, \alpha^\dagger] &= 1, \\ [\beta, \beta^\dagger] &= 1 \end{aligned} \quad (32)$$

اند. از این‌جا معلوم میشود

$$\begin{aligned} E_h &= \hbar \Omega (n_\alpha + n_\beta + 1), \\ \lambda &= \hbar (n_\beta - n_\alpha), \end{aligned} \quad (33)$$

که  $E_h$  و  $\lambda$  ویژه‌مقدارها ی  $H_h$  و  $L$ ، و  $n_\alpha$  و  $n_\beta$  عددها ی صحیح نامنفی اند. هر ویژه‌بردارِ مشترکِ  $H_h$  و  $L$  به طورِ یکتا با یک زوج مرتب  $(n_\alpha, n_\beta)$  مشخص میشود. از (33) نتیجه میشود

$$E_c = \hbar \omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (34)$$

که  $E_c$  ویژه‌مقدارِ  $H_c$  متناظر با عددها ی کوانتمی ی  $n_\alpha$  و  $n_\beta$  است،  $\omega_c$  با

$$\omega_c := |\omega| \quad (35)$$

بسامدِ زاویه‌ای ی سیکلُترن است، و

$$n := \begin{cases} n_\alpha, & \omega > 0 \\ n_\beta, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (36)$$

تعریف میکنیم

$$\tilde{n} := \begin{cases} n_\beta, & \omega > 0 \\ n_\alpha, & \omega < 0 \end{cases}. \quad (37)$$

(34) ویژه‌مقدارها ی  $H_c$  را میدهد، اما دیده میشود در این عبارت  $n$  ظاهر میشود و  $\tilde{n}$  ظاهر نمیشود.  $\tilde{n}$  میتواند هر مقدار صحیح نامنفی ی بگیرد و انرژی عوض نمیشود. پس چندگانه‌گی ی ویژه‌بردارها ی  $H_c$  بیپایان است.

اما اگر این سیستم در یک جعبه باشد وضع فرق میکند. فرض کنید ذره مقید است (در دو بُعد) در قرص ی به شعاع  $R$  باشد. میخواهیم برای  $n$  معین، چندگانه‌گی در  $R$  ها ی بزرگ را حساب کنیم. در این حالت برای مقدارها ی ممکن  $\tilde{n}$  یک قید به دست می‌آید و همین است که چندگانه‌گی را باپایان میکند. این قید از آن‌جا می‌آید که  $E_h$  باید از کمینه ی  $U_{\text{eff}}$  (انرژی ی پتانسیل مثر متناظر با  $H_h$  پس از جدا کردن مختصه ی زاویه‌ای) درون قرص بیشتر باشد. داریم

$$U_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2\mu\rho^2} + \frac{\mu\Omega^2\rho^2}{2}, \quad (38)$$

که  $\rho$  فاصله از مرکز قرص است. کمینه ی  $U_{\text{eff}}$  در  $R < \rho$  با  $M$  نشان میدهم. از (38) نتیجه میشود

$$M = \begin{cases} |L|\Omega, & |L| < \mu\Omega R^2 \\ \frac{L^2}{2\mu R^2} + \frac{\mu\Omega R^2}{2}, & |L| < \mu\Omega R^2 \end{cases}. \quad (39)$$

از (24) داریم

$$E_c = E_h - \Omega L', \quad (40)$$

که

$$L' := \text{sgn}(\omega) L. \quad (41)$$

بر حسب  $L'$ ، رابطه ی (39) میشود

$$M = \begin{cases} |L'|\Omega, & |L'| < \mu\Omega R^2 \\ \frac{L'^2}{2\mu R^2} + \frac{\mu\Omega R^2}{2}, & |L'| < \mu\Omega R^2 \end{cases}. \quad (42)$$

قید بر  $L'$  هم میشود

$$E_c + \Omega L' - M > 0, \quad (43)$$

یا

$$o(R^2) < L' < \mu \Omega R^2 + o(R^2). \quad (44)$$

البته شکل دقیق این رابطه

$$-\frac{E_c}{2\Omega} < L' < \mu \Omega R^2 + o(R^2) + \sqrt{2\mu E_c} R \quad (45)$$

است. اما برای محاسبه ی چندگانه گی در  $R$  های بزرگ، (44) کافی است. از آن نتیجه میشود

$$0 < \frac{L'}{\mu \Omega R^2} < 1, \quad R \rightarrow \infty, \quad (46)$$

یا

$$0 < \frac{\hbar}{\mu \Omega R^2} \tilde{n} < 1, \quad R \rightarrow \infty. \quad (47)$$

توجه داریم که این نتیجه برای  $E_c$  ی ثابت (و در نتیجه  $n$  ثابت) و  $R \rightarrow \infty$  به دست آمده. به این ترتیب، چندگانه گی ( $\mathcal{N}$ ) میشود

$$\mathcal{N} = \frac{\mu \Omega R^2}{\hbar}, \quad (48)$$

که میشود آن را نوشت

$$\mathcal{N} = \frac{S}{\hbar^2} (2\pi) \mu (\hbar \omega_c). \quad (49)$$

این همان تعداد ترازها ی انرژی ی یک ذره ی آزاد مقید به حرکت در ناحیه ای دو بُعدی به مساحت  $S$ ، با انرژیها ی بین  $\hbar \omega_c n$  و  $\hbar \omega_c (n+1)$  است:

$$\mathcal{N} = \frac{S}{\hbar^2} \int_{E_{\perp} = \hbar \omega_c n}^{E_{\perp} = \hbar \omega_c (n+1)} d^2 p_{\perp}, \quad (50)$$

که

$$E_{\perp} := \frac{\mathbf{p}_{\perp} \cdot \mathbf{p}_{\perp}}{2\mu}. \quad (51)$$

انگار با اعمال میدان مغناطیسی، همه ی ترازها ی با انرژی ی بین  $\hbar\omega_c n$  و  $\hbar\omega_c (n+1)$  انرژی یشان یکسان شده، اما تعداد شان عوض نشده. (49) را به این شکل هم میشود نوشت.

$$\mathcal{N} = \frac{S|qB|}{h}. \quad (52)$$

### 3 مغناطیده گی و پذیرفتاری در دو بُعد

فرض کنید ارتفاع استوانه بسیار کوچک است، چنان که اختلاف انرژی ی اولین حالت برانگیخته ی  $H_f$  با انرژی ی حالت پایه ی آن بسیار بزرگتر از  $\hbar\omega_c$  است. در این صورت ذره در حالت پایه ی  $H_f$  میماند و مثل یک مقدار ثابت در انرژی رفتار میکند، که میشود آن را کنار گذاشت. چنین مسئله ای عملن دویعدی است. در دمای صفر فرمینها ترازها را از تراز پایه به بالا اشغال میکنند. تعداد ترازها ی اشغال شده را با  $Y$  نمایش میدهم. داریم

$$Y = \frac{N}{\mathcal{N}}, \quad (53)$$

که  $N$  تعداد ذرات است.  $Y$  در حالت کلی صحیح نیست. این یعنی  $[Y]$  تراز کاملن پر داریم ( $[Y]$  بزرگترین عدد صحیح نابزرگتر از  $Y$  است) و احتمالن (اگر  $Y > [Y]$ ) یک تراز جزئن پر. انرژی ی سیستم در حالت پایه میشود

$$E_c(N) = \mathcal{N} \sum_{n=0}^{[Y]-1} \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{N}(Y - [Y]) \hbar\omega_c \left([Y] + \frac{1}{2}\right), \quad (54)$$

که  $E_c(N)$  انرژی ی سیستم  $N$  ذره ای در حالت پایه است. از (54) نتیجه میشود

$$E_c(N) = \mathcal{N} \hbar\omega_c \left(\frac{2[Y]+1}{2} Y - \frac{[Y]^2 + [Y]}{2}\right). \quad (55)$$

دوقطبی ی مغناطیسی ی سیستم  $N$  ذره ای را با  $m(N)$  نمایش میدهم. با استفاده از (21)، این

که اگر  $|\psi\rangle$  ویژه بردار  $H$  باشد،

$$\left\langle \psi \left| \frac{\partial H}{\partial B} \right| \psi \right\rangle = \frac{\partial \langle \psi | H | \psi \rangle}{\partial B}, \quad (56)$$

و

$$\frac{\partial Y}{\partial B} = -\frac{Y}{B}, \quad (57)$$

نتیجه میشود

$$m(N) = -S \frac{q^2}{\pi \mu} B \left( \frac{2[Y] + 1}{4} Y - \frac{[Y]^2 + [Y]}{2} \right). \quad (58)$$

$m(N)$  به ازای مقادیر صحیح  $Y$  پرش دارد.  $\chi$  (پذیرفتاری ی سیستم) را چنین تعریف میکنیم.

$$\chi := \frac{1}{S} \frac{\partial m(N)}{\partial B}. \quad (59)$$

نتیجه میشود

$$\chi = \frac{q^2}{2\pi\mu} \left\{ [Y]^2 + [Y] - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \delta(Y - k) \right\}. \quad (60)$$

این پذیرفتاری علاوه بر دلتاها یک رفتار نوسانی دارد. برای دیدن این رفتار، از آن یک بخش هموار جدا میکنیم. این کار یکتا نیست. اما دیده میشود  $\chi_0$  با

$$\chi_0 := \frac{q^2}{2\pi\mu} Y^2, \quad (61)$$

این ویژه گی را دارد که

$$\int_{n < Y < n+1} dB \chi_0 = \int_{n < Y < n+1} dB \chi. \quad (62)$$

$\chi_0$  را بخش هموار، و  $\chi_{\text{osc}}$  (بخش نوسانی ی پذیرفتاری) را تفاضل  $\chi_0$  از  $\chi$  (جز دلتاها) تعریف میکنیم. به این ترتیب،

$$\chi_{\text{osc}} = \frac{q^2}{2\pi\mu} ([Y]^2 + [Y] - Y^2). \quad (63)$$

به این رفتار نوسانی ی پذیرفتاری پدیده ی دِ هاس- فان آلفِن [c] میگویند.

## 4 اسمهای خاص

[a] Heisenberg

[b] Hilbert

[c] de Haas-van Alphen