

X1-043 (2007/02/28)

تصویر - تمام ریخت - نوسان گر - هم آهنگ

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

بردارها ی هم دوس - نوسان گر - هم آهنگ، و محاسبه با استفاده از این بردارها بررسی می شود.

0 مقدمه

یک نوسان گر - هم آهنگ به جرم m و بس آمد - زاویه ای ω را در نظر بگیرید. همیلتنی ی این نوسان گر

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \quad (1)$$

است، که x مکان و p تکانه است. مکان و تکانه دو عمل گر - ارمیتی اند با رابطه ی جابه جایی ی

$$[x, p] = i\hbar. \quad (2)$$

استفاده از عمل گر - پایین بر (a) ، بالابر (a^\dagger) ، و عدد - برانگیخته گی (N) بسیاری از محاسبات - متناظر با این سیستم را ساده می کند. این عمل گرها با این رابطه ها تعریف می شوند.

تصویر تمام ریخت نوسان گر هم آهنگ

$$a := \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}} x + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} p, \quad (3)$$

$$a^\dagger := \sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}} x - i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega m}} p, \quad (4)$$

$$N := a^\dagger a, \quad (5)$$

با استفاده از (2)، رابطه‌ها ی جابه‌جایی ی این عمل‌گرها با هم می‌شود

$$[a, a^\dagger] := 1, \quad (6)$$

$$[N, a] := -a, \quad (7)$$

$$[N, a^\dagger] := a^\dagger. \quad (8)$$

هم‌چنین، همیلتنی می‌شود

$$H = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

دوپایه ی معمول برا ی فضا ی هیلبرت $[\mathfrak{a}]$ این سیستم، یک ی پایه ی مکان (ویژه‌بردارها ی x)، و دیگری پایه ی انرژی (ویژه‌بردارها ی H) اند. از رابطه ی (9) معلوم است که ویژه‌بردارها ی H همان ویژه‌بردارها ی N اند. ویژه‌بردار عمل‌گر Λ متناظر با ویژه‌مقدار λ را با $|\Lambda = \lambda\rangle$ نشان می‌دهیم:

$$\Lambda |\Lambda = \lambda\rangle = \lambda |\Lambda = \lambda\rangle. \quad (10)$$

البته هر جا خود Λ معلوم باشد می‌شود آن را حذف کرد.

عمل‌گر N ناتبه‌گن، و ویژه‌مقدارها ی آن همه ی عددها ی صحیح نامنفی اند. ویژه‌بردارها ی بهنجار این عمل‌گر را می‌شود از اثر دادن a^\dagger بر یک حالت پایه به دست آورد:

$$|N = n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}} (a^\dagger)^n |N = 0\rangle, \quad (11)$$

یا به شکل ساده‌تر،

$$|n\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (12)$$

داریم

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

و

$$\begin{aligned} \langle n | a^\dagger &= \sqrt{n} \langle n-1 |, \\ \langle n | a &= \sqrt{n+1} \langle n+1 |. \end{aligned} \quad (14)$$

مطالب - این بخش را می‌شود به طور مفصل در مثلاً [1] یافت.

1 بردارها ی هم دوس - نوسان گر - هم آهنگ

با استفاده از رابطه ی جابه جایی ی (6) نتیجه می‌شود

$$[a, \exp(\lambda a^\dagger)] = \lambda \exp(\lambda a^\dagger), \quad (15)$$

که λ یک عدد - مختلط - دل‌بخواه است. از اینجا نتیجه می‌شود

$$a [\exp(\lambda a^\dagger) |0\rangle] = \lambda [\exp(\lambda a^\dagger) |0\rangle]. \quad (16)$$

پس برداری که دوطرف - این رابطه ظاهر شده ویژه بردار - a متناظر با ویژه مقدار - λ است:

$$|a = \lambda\rangle = \exp(\lambda a^\dagger) |0\rangle. \quad (17)$$

به این بردارها بردارها ی هم دوس می‌گویند.

این بردارها پایه نیستند، اما می‌شود بردارها ی دیگر را بر حسب - آن‌ها بسط داد. اول نشان می‌دهیم این‌ها پایه نیستند و برای این کار نشان می‌دهیم این‌ها یک مجموعه ی خطی مستقل نیستند. برای نشان دادن - این، ابتدا اثر - ویژه بردارها ی عدد - برانگیخته گی بر این بردارها را حساب کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle n|a = \lambda \rangle &= \sqrt{\frac{1}{n!}} \langle 0| a^n |a = \lambda \rangle, \\
&= \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|a = \lambda \rangle, \\
&= \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} \langle 0| \exp(\lambda a^\dagger) |0 \rangle, \tag{18}
\end{aligned}$$

که از آن نتیجه می شود

$$\langle n|a = \lambda \rangle = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}. \tag{19}$$

حالا بردار $|\phi\rangle$ به این شکل را در نظر می گیریم.

$$|\phi\rangle := \oint_C d\lambda f(\lambda) |a = \lambda\rangle, \tag{20}$$

که C یک خم - بسته در صفحه (λ, λ) مختلط است و f تابعی که درون - این خم تحلیلی است. از (19) نتیجه می شود

$$\langle n|\phi\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}} \oint_C d\lambda f(\lambda) \lambda^n. \tag{21}$$

طرف - راست صفر است، چون f درون - C تحلیلی است. پس

$$\langle n|\phi\rangle = 0, \tag{22}$$

و چون ویژه بردارها n عدد - برانگیخته گی پایه اند،

$$|\phi\rangle = 0. \tag{23}$$

پس یک ترکیب - خطی n نابدیهی از بردارها n هم دوس صفر است، که نتیجه می دهد مجموعه n این بردارها خطی مستقل نیست.

نشان می دهیم هر برداری را می شود بر حسب - بردارها n این مجموعه بسط داد. برای این کار عمل گر I را به این شکل تعریف می کنیم.

$$I := \int \frac{d^2\lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) |a = \lambda\rangle \langle a = \lambda|, \tag{24}$$

که ناحیه ی انتگرال گیری همه ی صفحه ی مختلط است. نشان می دهیم این عمل گر همانی است. داریم

$$\begin{aligned} \langle m | I | n \rangle &= \sqrt{\frac{1}{m! n!}} \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \lambda^n (\lambda^*)^m, \\ &= \sqrt{\frac{1}{m! n!}} \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\pi} \exp(-r^2) r^{n+m} \exp[i(n-m)\theta], \\ &= 2 \delta_{m n} \sqrt{\frac{1}{m! n!}} \int_0^\infty r dr \exp(-r^2) r^{n+m}, \\ &= \delta_{m n} \frac{1}{n!} \int_0^\infty du \exp(-u) u^n, \end{aligned} \quad (25)$$

که در آن (r, θ) مختصات قطبی ی λ است. از این رابطه دیده می شود

$$\langle m | I | n \rangle = \delta_{m n}, \quad (26)$$

که نتیجه می دهد

$$I = 1. \quad (27)$$

به این ترتیب، برای بردار دلخواه $|\psi\rangle$ داریم

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \psi_a(\lambda^*) |a = \lambda\rangle \quad (28)$$

که در آن

$$\psi_a(\lambda^*) := \langle a = \lambda | \psi \rangle. \quad (29)$$

پس هر برداری را می شود بر حسب بردارها ی هم دوس بسط داد. علت انتخاب نماد $\psi_a(\lambda^*)$ این است که این عدد یک تابع تحلیلی از λ^* است. برای دیدن این، کافی است توجه کنیم

$$\psi_a(\lambda^*) = \sum_n \frac{(\lambda^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n | \psi \rangle, \quad (30)$$

که در آن (20) به کار رفته است.

تصویر - تمام ریخت - نوسان گر - هم آهنگ

تابع ψ_a را با تابع موج - متناظر با $|\psi\rangle$ مقایسه کنیم. اولی از اثر - مزدوج - ارمیتی ی ویژه بردارها ی عمل گر - پایین بر بر $|\psi\rangle$ به دست می آید و دومی از اثر - مزدوج - ارمیتی ی ویژه بردارها ی عمل گر - مکان. اولی یک تابع - مجذوراتتگرال پذیر است و دومی یک تابع - تحلیلی. به همین خاطر است که به محاسبه بر اساس - ویژه بردارها ی عمل گر - پایین بر تصویر - تمام ریخت (یا تحلیلی) می گویند، در مقابل - تصویر - مکان (محاسبه بر اساس - ویژه بردارها ی مکان).

2 ویژه گی ها ی بردارها ی هم دوس

از تعریف - بردارها ی هم دوس دیده می شود

$$a|a = \lambda\rangle = \lambda|a = \lambda\rangle,$$

$$a^\dagger|a = \lambda\rangle = \frac{d}{d\lambda}|a = \lambda\rangle, \quad (31)$$

و

$$\langle a = \lambda|a = \frac{d}{d\lambda^*} \langle a = \lambda|,$$

$$\langle a = \lambda|a^\dagger = \lambda^* \langle a = \lambda|. \quad (32)$$

داریم

$$\begin{aligned} \langle a = \mu|a = \lambda\rangle &= \langle 0| \exp(\mu^* a) |a = \lambda\rangle, \\ &= \exp(\mu^* \lambda) \langle 0|a = \lambda\rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

که نتیجه می دهد

$$\langle a = \mu|a = \lambda\rangle = \exp(\mu^* \lambda). \quad (34)$$

با استفاده از رابطه‌ها ی (3) و (4) می‌شود عمل‌گرها ی مکان و تکانه را بر حسب a و a^\dagger بیان کرد:

$$\begin{aligned} x &:= \frac{\ell}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger), \\ p &:= \frac{-i\hbar}{\ell\sqrt{2}} (a - a^\dagger), \end{aligned} \quad (35)$$

که

$$\ell := \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}. \quad (36)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} x|a = \lambda\rangle &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \left(\lambda + \frac{d}{d\lambda} \right) |a = \lambda\rangle, \\ p|a = \lambda\rangle &= \frac{-i\hbar}{\ell\sqrt{2}} \left(\lambda - \frac{d}{d\lambda} \right) |a = \lambda\rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

و

$$\begin{aligned} \langle a = \lambda|x &= \frac{\ell}{\sqrt{2}} \left(\lambda^* + \frac{d}{d\lambda^*} \right) \langle a = \lambda|, \\ \langle a = \lambda|p &= \frac{-i\hbar}{\ell\sqrt{2}} \left(\frac{d}{d\lambda^*} - \lambda^* \right) \langle a = \lambda|. \end{aligned} \quad (38)$$

با استفاده از این‌ها اثر مزدوج اِرمیتی ی ویژه‌بردارها ی مکان بر بردارها ی هم‌دوس را حساب می‌کنیم:

$$f(s, \lambda) := \langle x = s|a = \lambda\rangle. \quad (39)$$

با محاسبه ی $\langle x = s|a|a = \lambda\rangle$ نتیجه می‌شود

$$\lambda f(s, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{s}{\ell} + \ell \frac{\partial}{\partial s} \right) f(s, \lambda). \quad (40)$$

با محاسبه ی $\langle x = s|x|a = \lambda\rangle$ هم نتیجه می‌شود

تصویر تمام ریخت نوسان گر هم آهنگ

$$s f(s, \lambda) = \frac{\ell}{\sqrt{2}} \left(\lambda + \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f(s, \lambda). \quad (41)$$

از (40) نتیجه می شود

$$f(s, \lambda) = g_1(\lambda) \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\ell} \right)^2 + \sqrt{2} \lambda \left(\frac{s}{\ell} \right) \right]. \quad (42)$$

از (41) هم نتیجه می شود

$$f(s, \lambda) = g_2(s) \exp \left[-\frac{1}{2} \lambda^2 + \sqrt{2} \lambda \left(\frac{s}{\ell} \right) \right]. \quad (43)$$

از ترکیب (42) و (43) داریم

$$f(s, \lambda) = C \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 + \sqrt{2} \lambda \left(\frac{s}{\ell} \right) \right]. \quad (44)$$

سرانجام،

$$\int ds |f(s, 0)|^2 = 1, \quad (45)$$

که نتیجه ی این است که $|a = 0\rangle$ (که همان $|0\rangle$ است) یکه است. از (45) نتیجه می شود

$$|C| = \left(\frac{1}{\pi \ell^2} \right)^{1/4}. \quad (46)$$

C را حقیقی و مثبت می گیریم. نتیجه می شود

$$\langle x = s | a = \lambda \rangle = \left(\frac{1}{\pi \ell^2} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} \lambda^2 + \sqrt{2} \lambda \left(\frac{s}{\ell} \right) \right]. \quad (47)$$

3 انتشارگر نوسان گر هم آهنگ

تعریف می کنیم

$$K(r, s; \beta) := \langle x = r | \exp(-\beta H) | x = s \rangle. \quad (48)$$

اگر به جا ی β بگذاریم $(k_B T)^{-1}$ ، (که T دما و k_B ثابت بُلنس مان [b] است) K عنصر ماتریسی ی ماتریس چگالی است (مثلاً [2]). اگر به جا ی β بگذاریم $(i\hbar)^{-1}$ ، هم،

K انتشارگر است (مثلاً [1]). هدف محاسبه K برای نوسان گر - هم آهنگ است. این محاسبه را در تصویر - تمام ریخت انجام می دهیم. داریم

$$\begin{aligned} \exp(-\beta H) |a = \lambda\rangle &= \exp(-\beta H) \exp(\lambda a^\dagger) \exp(\beta H) \exp(-\beta H) |0\rangle, \\ &= \exp(-\beta H) \exp(\lambda a^\dagger) \exp(\beta H) \exp(-\beta \hbar \omega / 2) |0\rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

ضمناً داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} [\exp(-\beta H) a^\dagger \exp(\beta H)] &= \exp(-\beta H) [a^\dagger, H] \exp(\beta H), \\ &= -\hbar \omega [\exp(-\beta H) a^\dagger \exp(\beta H)], \end{aligned} \quad (50)$$

که نتیجه می دهد

$$\exp(-\beta H) a^\dagger \exp(\beta H) = \exp(-\beta \hbar \omega) a^\dagger. \quad (51)$$

با گذاشتن - این در (49)،

$$\exp(-\beta H) |a = \lambda\rangle = \exp(-\beta \hbar \omega / 2) |a = \exp(-\beta \hbar \omega) \lambda\rangle. \quad (52)$$

از این جا معلوم می شود

$$\begin{aligned} K(r, s; \beta) &= \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \langle x = r | \exp(-\beta H) |a = \lambda\rangle \langle a = \lambda | x = s\rangle, \\ &= \exp(-\beta \hbar \omega / 2) \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \\ &\quad \times \langle x = r | a = \tilde{\lambda}\rangle \langle a = \lambda | x = s\rangle, \end{aligned} \quad (53)$$

که

$$\tilde{\lambda} := \exp(-\beta \hbar \omega) \lambda. \quad (54)$$

به این ترتیب،

تصویر - تمام ریخت - نوسان گر - هم آهنگ

$$\begin{aligned}
 K(r, s; \beta) &= \frac{1}{\sqrt{\pi \ell^2}} \exp(-\beta \hbar \omega / 2) \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(-|\lambda|^2) \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\lambda})^2 + \sqrt{2} \tilde{\lambda} \left(\frac{r}{\ell} \right) \right] \\
 &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{s}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{2} (\lambda^*)^2 + \sqrt{2} \lambda^* \left(\frac{s}{\ell} \right) \right]. \quad (55)
 \end{aligned}$$

در طرف - چپ عبارت ی به شکل -

$$f(A, B) := \int \frac{d^2 \lambda}{\pi} \exp(\Lambda^t A \Lambda + 2 B^t \Lambda) \quad (56)$$

ظاهر شده، که A یک ماتریس - متقارن - ثابت و B یک ماتریس - ستونی ی دومتلفه ای ی ثابت است و

$$\Lambda := \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^* \end{pmatrix}. \quad (57)$$

انتگرال - طرف - راست - (56)، بر حسب X و Y با

$$\begin{aligned}
 X &:= \frac{\lambda + \lambda^*}{2}, \\
 Y &:= \frac{\lambda - \lambda^*}{2i} \quad (58)
 \end{aligned}$$

یک انتگرال - گاوسی است. یک راه - محاسبه ی این انتگرال آن است که نما ی انتگرال ده را مربع - کامل کنیم. نتیجه می شود

$$f(A, B) = \frac{1}{\sqrt{-4 \det(A)}} \exp(-B^t A^{-1} B). \quad (59)$$

البته این رابطه به شرط ی درست است که انتگرال وجود داشته باشد. شرط - وجود - این انتگرال آن است که جزئی - حقیقی ی بخش ی از نما ی انتگرال ده که نسبت به X و Y مجذوری است نامثبت باشد. این بخش می شود

$$\Lambda^t A \Lambda =: \Xi^t M \Xi, \quad (60)$$

که

$$\Xi := \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \quad (61)$$

پس شرط وجود انتگرال رابطه ی (56) این است که جزئی حقیقی ی ماتریس M منفی ی شبه معین باشد. در این مسئله،

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} C^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

و

$$B = \frac{\sqrt{2}}{2\ell} \begin{pmatrix} C r \\ s \end{pmatrix}, \quad (63)$$

که

$$C := \exp(-\beta \hbar \omega). \quad (64)$$

از (62) نتیجه می شود

$$M = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} C^2 + 3 & i(C^2 - 1) \\ i(C^2 - 1) & 1 - C^2 \end{pmatrix}. \quad (65)$$

ویژه مقدارها ی جزئی حقیقی ی M باید نامثبت باشند. این ویژه مقدارها را μ_1 و μ_2 می نامیم. داریم

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= -2, \\ 4\mu_1\mu_2 &= [\operatorname{Re}(C^2) + 3][1 - \operatorname{Re}(C^2)] - [\operatorname{Im}(C^2)]^2. \end{aligned} \quad (66)$$

مجموع ویژه مقدارها منفی است. پس کافی است حاصل ضرب ویژه مقدارها نامنفی باشد. شرط این می شود

$$[\operatorname{Re}(C^2) + 1]^2 + [\operatorname{Im}(C^2)]^2 \leq 4, \quad (67)$$

یعنی C^2 باید در قرص ی به شعاع 2 باشد که مرکز آن نقطه ی 1 است. دیده می شود اگر β حقیقی و نامنفی باشد، C^2 حقیقی و روی پاره خط $[0, 1]$ است. اگر β موهومی باشد، C^2 روی یک دایره به مرکز مبدئی و به شعاع 1 است. در هر دو حالت، C^2 شرط (67) را بر می آورد.

از (59) نتیجه می شود

$$f(A, B) = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}} \exp \left\{ -\frac{C^2 [(r/\ell)^2 + (s/\ell)^2] - 2C (r/\ell) (s/\ell)}{1-C^2} \right\}, \quad (68)$$

و به این ترتیب،

$$K(r, s; \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell^2 \sinh(\beta\hbar\omega)}} \times \exp \left\{ -\frac{[(r/\ell)^2 + (s/\ell)^2] \cosh(\beta\hbar\omega) - 2(r/\ell)(s/\ell)}{2 \sinh(\beta\hbar\omega)} \right\}. \quad (69)$$

از جمله، انتشارگر - نوسان گر - هم آهنگ می شود

$$G(r, s; t) := \langle x = r | \exp \left(\frac{tH}{i\hbar} \right) | x = s \rangle,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \ell^2 \sin(\omega t)}} \times \exp \left\{ i \frac{[(r/\ell)^2 + (s/\ell)^2] \cos(\omega t) - 2(r/\ell)(s/\ell)}{2 \sin(\omega t)} \right\}. \quad (70)$$

4 مراجع ها

- [1] Jun John Sakurai; "Modern quantum mechanics", (Addison Wesley, 1995) chapter 2
- [2] P. K. Pathria; "Statistical mechanics", (Pergamon Press, 1993) chapter 5

5 اسم های خاص

- [a] Hilbert
- [b] Boltzmann