

بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

پتانسیل الکتریکی ی حاصل از یک بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار، بر حسب مختصات بیضوی محاسبه میشود.

0 مقدمه

چنان که در [1] هم آمده، در سه بُعد نوع مختصات بیضوی تعریف میکنند. تعریف این مختصات بر حسب مختصات استوانه‌ای ساده‌تر است. در بُعد اول، مختصات (u, ϕ, v) از روی مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\rho = c \cosh u \sin v,$$

$$z = c \sinh u \cos v. \quad (1)$$

گستره (u, v) را میشود $(0 \leq u < \infty, 0 \leq v \leq \pi)$ ، یا $(-\infty < u < \infty, 0 \leq v \leq (\pi/2))$ گرفت. در حالت اول، رویه‌ها ی $u = \text{constant}$ بیضیگون‌ها ی دوار پخ اند، و رویه‌ها ی $v = \text{constant}$ نیمه‌دلولیگون‌ها ی یکپارچه. در حالت دوم، رویه‌ها ی $u = \text{constant}$ نیمبیضیگون‌ها ی

بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار

دوار پخ اند، و رویه‌ها ی $v = \text{constant}$ هذلولیگونها ی یکپارچه. این رویه‌ها ی مختصاتی، از دوران (حُل محوری z) بیضیها یا هذلولیها بی به دست می‌آیند که دورانیافته ی کانونها یشان دایره ی $(\rho = c, z = 0)$ است.

بر حسب این مختصات، لپلسی میشود

$$\nabla^2 = \frac{1}{D^2(u, v)} \left(\frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \sin v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{c^2 \cosh^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (2)$$

که

$$\begin{aligned} D^2(u, v) &:= c^2 (\cosh^2 u - \sin^2 v), \\ &= c^2 (\sinh^2 u + \cos^2 v). \end{aligned} \quad (3)$$

در نَع دوم، مختصات (s, ϕ, t) از روی مختصات استوانه‌ای (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\begin{aligned} \rho &= c \sinh s \sin t, \\ z &= c \cosh s \cos t. \end{aligned} \quad (4)$$

گستره ی (s, t) میشود $(0 \leq s < \infty, 0 \leq t \leq \pi)$. رویه‌ها ی $s = \text{constant}$ بیضیگونها ی دوار کشیده اند، و رویه‌ها ی $t = \text{constant}$ نیمه‌هذلولیگونها ی دُپارچه. این رویه‌ها ی مختصاتی دورانیافته ی (حول محوری z) بیضیها و هذلولیها بی با کانونها ی $(\rho = 0, z = \pm c)$ اند.

بر حسب این مختصات، لپلسی میشود

$$\nabla^2 = \frac{1}{F^2(s, t)} \left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\sin t} \frac{\partial}{\partial t} \sin t \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2 \sinh^2 s \sin^2 t} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad (5)$$

که

$$\begin{aligned} F^2(s, t) &:= c^2 (\cosh^2 s - \cos^2 t), \\ &= c^2 (\sinh^2 s + \sin^2 t). \end{aligned} \quad (6)$$

بر حسب هر دو این مختصات، معادله ی پوسن [2] جداشدنی است. بر حسب مختصات اول،

این معادله میشود

$$\left[A + B + \left(\frac{1}{\sin^2 v} - \frac{1}{\cosh^2 u} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Phi_o = -D^2(u, v) \varrho, \quad (7)$$

که Φ_o پتانسیل و ϱ چگالی ی بار است، و

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u}, \\ B &:= \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \sin v \frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \quad (8)$$

بر حسب مختصات دوم، معادله ی پوسن [2] میشود

$$\left[C + E + \left(\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\sinh^2 s} \right) \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \Phi_p = -F^2(s, t) \varrho, \quad (9)$$

که Φ_p پتانسیل و ϱ چگالی ی بار است، و

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s}, \\ E &:= \frac{1}{\sin t} \frac{\partial}{\partial t} \sin t \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

به ویژه اگر پتانسیل تابع ϕ نباشد، معادله‌ها ی (7) و (9) میشوند

$$\left(\frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \sin v \frac{\partial}{\partial v} \right) \Phi_o = -D^2(u, v) \varrho, \quad (11)$$

و

$$\left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\sin t} \frac{\partial}{\partial t} \sin t \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi_p = -F^2(s, t) \varrho. \quad (12)$$

1 بیضیگون دوار پخ

یک بیضیگون دوار پخ در نظر میگیریم که نیممحورها ی بزرگ و کوچک ش، به ترتیب a و b اند.

محور تقارن این بیضیگون را محور z ، و مرکز آن را مبدئ مختصات میگیریم. معادله ی این

بیضیگون در مختصات بیضوی ی نُع اول با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (13)$$

بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار

می‌شود

$$u = u_0, \quad (14)$$

که

$$u_0 := \sinh^{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (15)$$

فرض کنیم چگالی ی بار الکتریکی درون این بیضیگون مقدار ثابت ρ_0 ، و بیرون آن صفر است:

$$\rho = \rho_0 H(u_0 - u), \quad (16)$$

که H تابع پله است. بر حسب متغیرهای U و V و ثابت Λ :

$$\begin{aligned} U &:= \sinh u, \\ V &:= \cos v, \\ \Lambda &:= c^2 \rho, \end{aligned} \quad (17)$$

معادله ی پواسن [2] میشود

$$\begin{aligned} (A + B) \Phi_0 &= -\Lambda (U^2 + V^2) H(U_0 - U), \\ &= -\frac{2\Lambda}{3} [P_2^A(U) P_0^B(V) + P_0^A(U) P_2^B(V)] H(U_0 - U), \end{aligned} \quad (18)$$

که P_l^B چندجمله‌ای ی لژاندر [3] از درجه ی l است و

$$P_l^A(U) := i^{-l} P_l^B(iU). \quad (19)$$

به ویژه،

$$\begin{aligned} P_0^A(U) &= 1, \\ P_2^A(U) &= \frac{3U^2 + 1}{2}, \\ P_0^B(V) &= 1, \\ P_2^B(V) &= \frac{3V^2 - 1}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

ضمن عملگرها ی A و B ، بر حسب U و V میشوند

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial U} (1 + U^2) \frac{\partial}{\partial U}, \\ B &= \frac{\partial}{\partial V} (1 - V^2) \frac{\partial}{\partial V}. \end{aligned} \quad (21)$$

همچنین،

$$U_0 := \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (22)$$

هدف حل معادله ی (18) با شرایط مرزی ی

$$\left. \frac{\partial \Phi_0}{\partial U} \right|_{U=0} = 0, \quad (23)$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \Phi_0 = 0 \quad (24)$$

است.

P_l^B ویژه تابع B با ویژه مقدار $[-l(l+1)]$ است. پس نهاده ی

$$\Phi_0(U, V) =: \Upsilon_0(U) P_0^B(V) + \Upsilon_2(U) P_2^B(V) \quad (25)$$

را در نظر میگیریم. چون P_l^B ها خطی مستقل اند، از (18) نتیجه میشود

$$A \Upsilon_0(U) = -\frac{2\Lambda}{3} P_2^A(U) H(U_0 - U), \quad (26)$$

$$(A - 6) \Upsilon_2(U) = -\frac{2\Lambda}{3} P_0^A(U) H(U_0 - U). \quad (27)$$

شرایط مرزی ی (24) و (25) هم میشوند

$$\left. \frac{d\Upsilon_0}{dU} \right|_{U=0} = 0, \quad (28)$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \Upsilon_0 = 0, \quad (29)$$

$$\left. \frac{d\Upsilon_2}{dU} \right|_{U=0} = 0, \quad (30)$$

$$\lim_{U \rightarrow \infty} \Upsilon_2 = 0. \quad (31)$$

نقطه ی $U \rightarrow \infty$ یک تکینه گمی ی منظم برا ی عملگر دیفرانسیل A است. معادله ی

$$[A - l(l+1)] \Pi_l^A(U) = 0, \quad (32)$$

را در نظر بگیرید. اگر رفتار Π_l^A در $U \rightarrow \infty$ را به شکل U^k بگیریم، با جاگذاری در معادله دیده میشود

$$k = l \vee k = -(l + 1). \quad (33)$$

با فرض این که l نامنفی باشد، جواب متناظر با U^{-l-1} در $U \rightarrow \infty$ صفر میشود. این جواب را با $P_l^A(U)$ نمایش میدهیم. همچنین، اگر l صحیح باشد یک جواب معادله ی (32) هم ان $P_l^A(U)$ است، که چندجمله‌ای است و به ازای l های فرد فرد و به ازای l های زوج زوج است. پس برای l های صحیح نامنفی، جواب (32) میشود

$$\Pi_l^A = \mu P_l^A + \nu R_l^A. \quad (34)$$

بهنجارش R_l^A را چنان میگیریم که

$$R_l^A(U) = P_l^A(U) \cot^{-1} U + \tilde{P}_l^A(U), \quad (35)$$

که \tilde{P}_l^A چندجمله‌ای بی از درجه ی $(l - 1)$ است، چنان که

$$[A - l(l + 1)] \tilde{P}_l^A(U) = -2 \frac{d}{dU} P_l^A(U). \quad (36)$$

از جمله،

$$R_0^A(U) = \cot^{-1} U,$$

$$R_2^A(U) = P_2^A(U) \cot^{-1} U - \frac{3}{2} U. \quad (37)$$

معادله ی (26) همراه با شرایط مرزی ی (28) و (29) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} -\frac{\Lambda}{9} P_2^A(U) + \alpha P_0^A(U), & U < U_0 \\ \beta R_0^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \quad (38)$$

با استفاده از پیوسته گی ی Υ_0 و مشتق ش در $U = U_0$ ، ضریبها ی α و β به دست می آیند:

$$\alpha = -\frac{\Lambda}{9} \frac{W(P_2^A, R_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)},$$

$$\beta = -\frac{\Lambda}{9} \frac{W(P_2^A, P_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)}, \quad (39)$$

که W ورنسکی [4] است:

$$W(f, g; x) := f(x) g'(x) - g(x) f'(x). \quad (40)$$

با جاگذاری ی (39) در (38) نتیجه میشود

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{6} (U_0^2 - U^2) + \frac{\Lambda}{3} U_0 (U_0^2 + 1) \cot^{-1} U_0, & U < U_0 \\ \frac{\Lambda}{3} U_0 (U_0^2 + 1) \cot^{-1} U, & U > U_0 \end{cases} \quad (41)$$

به هم ین ترتیب، معادله ی (27) همراه با شرایط مرزی ی (30) و (31) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{9} P_0^A(U) + \gamma P_2^A(U), & U < U_0 \\ \delta R_2^A(U), & U > U_0 \end{cases} \quad (42)$$

با استفاده از پیوسته گی ی Υ_2 و مشتق ش در $U = U_0$ ، ضربیها ی γ و δ به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\Lambda}{9} \frac{W(P_0^A, R_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)}, \\ \delta &= \frac{\Lambda}{9} \frac{W(P_0^A, P_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)}. \end{aligned} \quad (43)$$

با گذاشتن اینها در (42) نتیجه میشود

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \frac{\Lambda}{18} \{[3 U_0 (U_0^2 + 1) \cot^{-1} U_0 - 3 U_0^2 - 2] (3 U^2 + 1) + 2\}, & U < U_0 \\ \frac{\Lambda}{6} U_0 (U_0^2 + 1) [(3 U^2 + 1) \cot^{-1} U - 3 U], & U > U_0 \end{cases} \quad (44)$$

از (25)، (41)، و (44) نتیجه میشود

$$\Phi_0 = \Phi_0^- H(U_0 - U) + \Phi_0^+ H(U - U_0), \quad (45)$$

که

$$\begin{aligned} \Phi_0^- &= \frac{\Lambda}{36} \{[3 U_0 (U_0^2 + 1) \cot^{-1} U_0 - 3 U_0^2 - 2] (3 U^2 + 1) + 2\} (3 V^2 - 1) \\ &+ \frac{\Lambda}{6} (U_0^2 - U^2) + \frac{\Lambda}{3} U_0 (U_0^2 + 1) \cot^{-1} U_0, \end{aligned} \quad (46)$$

و

$$\Phi_0^+ = \frac{\Lambda}{12} U_0 (U_0^2 + 1) \{4 \cot^{-1} U + [(3 U^2 + 1) \cot^{-1} U - 3 U] (3 V^2 - 1)\}. \quad (47)$$

این عبارت را میشود بر حسب Q_0 (بار درون بیضیگون) هم نوشت. داریم

$$Q_0 = \frac{4 \pi}{3} \frac{\Lambda b a^2}{c^2}, \quad (48)$$

بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار

و

$$U_0 (U_0^2 + 1) = \frac{b a^2}{c^3}. \quad (49)$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} \Phi_0^+ &= \frac{Q_0}{16 \pi c} \{4 \cot^{-1} U + [(3 U^2 + 1) \cot^{-1} U - 3 U] (3 V^2 - 1)\}, \\ &= \frac{Q_0}{4 \pi c} [R_0^A(U) + R_2^A(U) P_2^B(V)]. \end{aligned} \quad (50)$$

نقاط دور از بیضیگون متناظر اند با U ها ی بزرگ. در این نقاط،

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\approx \frac{Q_0}{4 \pi c U}, \\ &\approx \frac{Q_0}{4 \pi r}, \end{aligned} \quad (51)$$

که r فاصله از مرکز بیضیگون است.

یک حالت حدی این است که بیضیگون به قرص تبدیل شود. این یعنی حد $b \rightarrow 0$ با a و Q_0 ثابت. در این حالت a هم از c است، و پتانسیل همه جا Φ_0^+ است. میشود دید چگالی سطحی ی قرص حاصل چه قدر است. داریم

$$\begin{aligned} \sigma &= -2 \lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right)_\rho, \\ &= -2 \lim_{z \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial u} \right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_\rho + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial v} \right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_\rho \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

از این جا نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3 Q_0}{2 \pi c^2} \cos v, \\ &= \frac{3 Q_0}{2 \pi c^2} \sqrt{1 - (\rho/c)^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. به ساده گی دیده میشود عبارت $\sqrt{1 - (\rho/c)^2}$ نسبت کلفتی ی بیضیگون در فاصله ی ρ از محور z ، به کلفتی ی بیضیگون در محور z ، در حد $b \rightarrow 0$ است. این چگالی ی سطحی هم حد چگالی ی حجمی در کلفتی ی بیضیگون، در $b \rightarrow 0$ است.

2 بیضیگون دوار کشیده

یک بیضیگون دوار کشیده در نظر میگیریم که نیممحورها ی بزرگ و کوچک اش، به ترتیب a و b اند. محور تقارن این بیضیگون را محور z ، و مرکز آن را مبدئ مختصات میگیریم. معادله ی این بیضیگون در مختصات بیضوی ی نُع دوم با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (54)$$

میشود

$$s = s_0, \quad (55)$$

که

$$s_0 := \cosh^{-1} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (56)$$

فرض کنیم چگالی ی بار الکتریکی درون این بیضیگون مقدار ثابت ϱ_0 ، و بیرون آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0 H(s_0 - s), \quad (57)$$

بر حسب متغیرها ی S و T و ثابت Λ :

$$S := \cosh s,$$

$$T := \cos t,$$

$$\Lambda := c^2 \varrho, \quad (58)$$

معادله ی پُوسُن [2] میشود

$$\begin{aligned} (C + E) \Phi_p &= -\Lambda (S^2 - T^2) H(S_0 - S), \\ &= -\frac{2\Lambda}{3} [P_2^C(S) P_0^E(T) - P_0^C(S) P_2^E(T)] H(S_0 - S), \end{aligned} \quad (59)$$

که P_l^C و P_l^E چندجمله‌ای‌ها ی لژاندر [3] از درجه ی l اند. به ویژه،

$$\begin{aligned} P_0^C(S) &= 1, \\ P_2^C(S) &= \frac{3S^2 - 1}{2}, \\ P_0^E(T) &= 1, \\ P_2^E(T) &= \frac{3T^2 - 1}{2}. \end{aligned} \quad (60)$$

ضمنن عملگرها ی C و E ، بر حسب S و T میشوند

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial}{\partial S} (-1 + S^2) \frac{\partial}{\partial S}, \\ E &= \frac{\partial}{\partial T} (1 - T^2) \frac{\partial}{\partial T}. \end{aligned} \quad (61)$$

همچنین،

$$S_0 := \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (62)$$

میشود با روش ی مشابه با روش بخش پیش پتانسیل Φ_p را حساب کرد. اما ساده‌ترین است که توجه کنیم عملگر C به عملگر A ، و عملگر E به عملگر B مربوط است:

$$\begin{aligned} C &= A(U \rightarrow iS), \\ E &= B(V \rightarrow T), \end{aligned} \quad (63)$$

و از آنجا دیده میشود اگر Φ_0 جواب (18) باشد، آنگاه Φ_p با

$$\Phi_p(S, T) := -\Phi_0(iS, T) \quad (64)$$

جواب (59) است. در این جاگذاری،

$$\cot^{-1}(iS) = -i \coth^{-1} S. \quad (65)$$

به این ترتیب،

$$\Phi_p = \Phi_p^- H(S_0 - S) + \Phi_p^+ H(S - S_0), \quad (66)$$

که

$$\begin{aligned} \Phi_p^- = & \frac{\Lambda}{36} \{[-3 S_0 (S_0^2 - 1) \coth^{-1} S_0 + 3 S_0^2 - 2] (3 S^2 - 1) - 2\} (3 V^2 - 1) \\ & + \frac{\Lambda}{6} (S_0^2 - S^2) + \frac{\Lambda}{3} S_0 (S_0^2 - 1) \coth^{-1} S_0, \end{aligned} \quad (67)$$

و

$$\Phi_p^+ = \frac{\Lambda}{12} S_0 (S_0^2 - 1) \{4 \coth^{-1} S - [(3 S^2 - 1) \coth^{-1} S - 3 S] (3 V^2 - 1)\}. \quad (68)$$

این عبارت را میشود بر حسب Q_p (بار درون بیضیگون) هم نوشت. داریم

$$Q_p = \frac{4 \pi}{3} \frac{\Lambda a b^2}{c^2}, \quad (69)$$

و

$$S_0 (S_0^2 - 1) = \frac{a b^2}{c^3}. \quad (70)$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} \Phi_p^+ = & \frac{Q_p}{16 \pi c} \{4 \coth^{-1} S - [(3 S^2 - 1) \coth^{-1} S - 3 S] (3 T^2 - 1)\}, \\ = & \frac{Q_p}{4 \pi c} [R_0^C(S) - R_2^C(S) P_2^B(T)], \end{aligned} \quad (71)$$

که

$$\begin{aligned} R_0^C(S) & := \coth^{-1}(S), \\ R_2^C(S) & := P_2^C(S) \coth^{-1} S - \frac{3}{2} S. \end{aligned} \quad (72)$$

$R_0^C(S)$ و $R_2^C(S)$ آن جوابها ی معادله ی لژاندر [3] با $l = 0$ و $l = 2$ اند، که در $S \rightarrow \infty$ مثل رفتار S^{-l-1} میکنند. نقاط دور از بیضیگون متناظر اند با S های بزرگ. در این نقاط،

$$\begin{aligned} \Phi_p & \approx \frac{Q_p}{4 \pi c S}, \\ & \approx \frac{Q_p}{4 \pi r}, \end{aligned} \quad (73)$$

که r فاصله از مرکز بیضیگون است.

بیضیگون دوار توپر یکنواخت-باردار

یک حالت حدی این است که بیضیگون به میله تبدیل شود. این یعنی حد $b \rightarrow 0$ با a و Q_p ثابت. در این حالت a هم ان c است، و پتانسیل همه جا Φ_p^+ است. میشود دید چگالی طولی Y میله Y حاصل چه قدر است. داریم

$$\begin{aligned} \lambda &= -2\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\rho \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial \rho} \right)_z \right], \\ &= -2\pi \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial s} \right)_t \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_z + \left(\frac{\partial \Phi_p}{\partial t} \right)_s \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right)_z \right] \right\}. \end{aligned} \quad (74)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{Q_p}{2c} [1 - P_2^C(\cos v)], \\ &= \frac{3Q_p}{4c} \left[1 - \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. میشود دید عبارت $[1 - (z/c)^2]$ نسبت مساحت مقطع بیضیگون در فاصله z از صفحه xy ، به مساحت مقطع بیضیگون در صفحه xy ، در حد $b \rightarrow 0$ است. این چگالی Y طولی هم حد چگالی Y حجمی در مساحت مقطع بیضیگون، در حد $b \rightarrow 0$ است.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «مختصات بیضوی در چند مسئله الکترُمغناطیس»؛ (2002/04/17) X1-010

[2] Poisson

[3] Legendre

[4] Wronski