X1-029 (2005/02/20)

تانسور ِ انرژی_ تکانه II

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

رابطه ي تانسور ِ انرژی_ تکانه يِ کانونیک با تانسور ِ انرژی_ تکانه يِ متقارن بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود که هر تقارن ِ فضازمان (هر ایزومتری) به یک جریان می‌انجامد که معادله يِ پی‌وسته‌گی را بر می‌آورد.

0 مقدمه

اگر چگالی‌يِ‌لَگرانژی يِ یک سیستم ِ مرتبه‌يِ‌یک صریحاً به یک ی از مئلفه‌ها يِ فضازمان وابسته نباشد، یک جریان پِی‌وسته (رو يِ لاک) هست که از تانسور ِ انرژی_ تکانه ساخته می‌شود [1]. اگر فضازمان در یک راستا تقارن ِ انتقالی داشته باشد، انتظار می‌رود چگالی‌يِ‌لَگرانژی به مختصه يِ متناظر با آن راستا وابسته نباشد و در نتیجه یک جریان ِ پی‌وسته داشته باشیم. سئال این است که جریان ِ پی‌وسته يِ متناظر با تقارن‌ها يِ احتمالی يِ دیگر ِ فضازمان چیست. برا يِ بررسی يِ این موضوع در حالت ِ کلی، اول باید ببینیم چه مشخصات ی از فضازمان در کنش وارد می‌شوند. کنش‌ها یی را در نظر می‌گیریم که فقط ویژه‌گی‌ها يِ هندسی يِ فضازمان در آن‌ها وارد می‌شود. می‌گوییم این کنش‌ها هم‌وردایی يِ عام دارند. معلوم می‌شود از شرط ِ هم‌وردایی يِ نتیجه می‌شود یک تانسور ِ متقارن هست (تانسور ِ انرژی_ تکانه يِ متقارن)، که دیورژانس ِ

هم‌وردا یَش رو یِ لاک صفر می‌شود. هم‌چنین معلوم می‌شود به ازا یِ هر مولد ِ تقارن ِ فضازمانی (هر بردار ِ کیلینگ [a]) یک جریان ِ پی‌وسته (رو یِ لاک) به دست می‌آید.

به این ترتیب، به نظر می‌رسد متناظر با تقارن ِ انتقال ِ یک ی از مئلفه‌ها یِ فضازمان دو نوع جریان ِ پی‌وسته داریم: یک ی ناشی از تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک (که در [1] تعریف شد) و دیگری ناشی از تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ متقارن. از بررسی یِ رابطه یِ این دوتانسور با هم معلوم می‌شود جریان‌ها یِ پی‌وسته یِ ناشی از تقارن ِ انتقالی هم‌ارز اند و کمیت‌ها یِ پایستار ِ متناظر هم یک‌سان اند.

این مقاله ادامه یِ [1] است و نمادگذاری‌ها یِ آن‌جا در این مقاله هم به کار می‌رود.

1 تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک و تقارن ِ فضازمانی

مولد ِ یک تقارن ِ فضازمانی (ایزومتری) یک میدان ِ برداری (ξ) است که مشتق ِ لی یِ تانسور ِ متریک (g) نسبت به آن صفر است:

$$L_\xi(g) = 0, \qquad (1)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} [L_\xi(g)]_{\mu\,\nu} &= \xi^\alpha\,\partial_\alpha\,g_{\mu\,\nu} + (\partial_\mu\,\xi^\alpha)\,g_{\alpha\,\nu} + (\partial_\nu\,\xi^\alpha)\,g_{\mu\,\alpha}, \\ &= \xi_{\mu\,;\nu} + \xi_{\nu\,;\mu}. \end{aligned} \qquad (2)$$

مشتق ِ هم‌وردا در این رابطه با هم‌وستار ِ لِوی‌چیویتا [b] یِ متناظر با متریک ِ g تعریف شده است:

$$\xi_{\mu\,;\nu} := \partial_\nu \xi_\mu - \Gamma^\alpha{}_{\nu\,\mu}\,\xi_\alpha,$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\nu\,\mu} = \frac{1}{2}\,g^{\alpha\,\beta}\,(\partial_\nu g_{\beta\,\mu} + \partial_\mu g_{\beta\,\nu} - \partial_\alpha g_{\nu\,\mu}). \qquad (3)$$

به میدان ِ برداری یی که (1) را بر می‌آورَد یک میدان ِ برداری یِ کیلینگ [a] می‌گویند. این‌ها (و بعض ی چیزها یِ دیگر در مورد ِ هندسه که در این مقاله به کار می‌رود) را می‌شود در مثلاً [2] یافت.

هر میدان ـِ برداری (ξ) متناظر با یک خانواده یِ یک‌پارامتری یِ نگاشت‌ها در فضازمان است (شارش ـِ آن میدان ـِ برداری). به ازا یِ مقدارها یِ کوچک ـِ پارامتر (s)، این نگاشت به شکل ـِ

$$r^\mu \to r^\mu + s\,\xi^\mu \tag{4}$$

است، که r^μ ها مختصه‌ها یِ فضازمان اند. فرض کنید متناظر با این نگاشت، میدان ـِ ϕ (متغیر ـِ دینامیکی یِ یک سیستم) را به این شکل تغییر دهیم.

$$\begin{aligned}&\phi \to \phi + \delta\phi,\\ &\delta\phi^A(r) = -s\,\xi^\mu\,\partial_\mu\phi^A,\end{aligned} \tag{5}$$

که ϕ^A ها مئلفه‌ها یِ میدان ـِ ϕ اند. اگر ϕ اسکالر باشد، ضریب ـِ $(-s)$ در رابطه یِ بالا مشتق ـِ لی یِ ϕ نسبت به ξ است. سئال این است که تبدیل ـِ (5) تقارن ـِ نُتری یِ سیستم هست یا نَه، یعنی تغییر ـِ چگالی یِ لَگرانژی به خاطر ـِ آن دیورژانس ـِ یک میدان ـِ برداری هست یا نَه. سیستم ی را که بررسی می‌کنیم مرتبه‌یِ‌یک می‌گیریم. دیده می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\,\delta\mathfrak{L} &= -(\xi^\mu\,\partial_\mu\phi^A)\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A} - [\partial_\nu(\xi^\mu\,\partial_\mu\phi^A)]\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\nu}},\\
&= -\xi^\mu\left[(\partial_\mu\phi^A)\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A} + (\partial_\mu\partial_\nu\phi^A)\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\nu}} + \partial^\phi_\mu\mathfrak{L}\right]\\
&\quad -(\partial_\nu\xi^\mu)\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\nu}}\partial_\mu\phi^A + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\mathfrak{L},\\
&= -\xi^\mu\,\partial_\mu\mathfrak{L} - (\partial_\mu\xi^\mu)\,\mathfrak{L}\\
&\quad +(\partial_\mu\xi^\mu)\,\mathfrak{L} - (\partial_\nu\xi^\mu)\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\nu}}\partial_\mu\phi^A + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\mathfrak{L},\\
&= \partial_\mu(-\xi^\mu\,\mathfrak{L}) - (\partial_\nu\,\xi^\mu)\Theta^\nu{}_\mu + \xi^\mu\,\partial^\phi_\mu\mathfrak{L},\end{aligned} \tag{6}$$

که در آن Θ تانسور ـِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک است:

$$\Theta^\nu{}_\mu := \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\nu}}\,\phi^A_{,\mu} - \delta^\nu{}_\mu\,\mathfrak{L}. \tag{7}$$

برا یِ انتقال‌ها، مشتق ِ ξ صفر است و اگر مشتق ِ صریح ِ چگالی‌یِ لَگرانژی در راستا یِ ξ صفر باشد، طرف ِ راست دیورژانس ِ کامل است و تقارن داریم. در این حالت جریان ِ

$$J^{\nu} := -\xi^{\mu}\,\Theta^{\nu}{}_{\mu} \tag{8}$$

رو یِ لاک پی‌وسته است. اما در حالت ِ کلی، دیورژانس ِ این جریان می‌شود

$$\partial_{\nu} J^{\nu} = -(\partial_{\nu}\,\xi^{\mu})\Theta^{\nu}{}_{\mu} - \xi^{\nu}\,\partial_{\nu}\Theta^{\nu}{}_{\mu}, \tag{9}$$

و با توجه به

$$\partial_{\nu}\,\Theta^{\nu}{}_{\mu} \overset{\text{ns}}{=} -\,\partial^{\phi}_{\mu}\mathfrak{L}, \tag{10}$$

([1]) نتیجه می‌شود

$$\partial_{\nu} J^{\nu} \overset{\text{ns}}{=} -\,(\partial_{\nu}\,\xi^{\mu})\Theta^{\nu}{}_{\mu} + \xi^{\mu}\,\partial^{\phi}_{\mu}\mathfrak{L}. \tag{11}$$

دیده می‌شود طرف ِ راست ِ این رابطه همان جمله یِ اضافه بر دیورژانس ِ کامل در طرف ِ راست ِ (6) است. نتیجه این که در حالت ِ کلی (حتا اگر ξ یک میدان ِ برداری یِ کیلینگ [a] باشد) تبدیل ِ (5) تقارن ِ سیستم نیست و به جریان ِ پی‌وسته نمی‌انجامد.

2 هم‌وردایی یِ عام

سیستم ی با چگالی‌یِ لَگرانژی یِ $\mathfrak{L}$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم این سیستم هم‌وردایی یِ عام دارد اگر به ازا یِ هر ناحیه یِ Ω در فضازمان و هر وابرریختی یِ f از فضازمان به فضازمان این رابطه برقرار باشد.

$$\int_{f(\Omega)} \tilde{\mathfrak{L}}[f_*(\phi), f_*(g), f_*(\varepsilon), r]\, f_*(\varepsilon) = \int_{\Omega} \tilde{\mathfrak{L}}(\phi, g, \varepsilon, r)\,\varepsilon. \tag{12}$$

وابرریختی یعنی نگاشت ی وارون‌پذیر که خود َش و وارون َش مشتق‌پذیر اند. f_* اثر ِ نگاشت ِ f بر میدان‌ها است (پیش‌ران ِ نگاشت ِ f). g تانسور ِ متریک و ε تانسور ِ حجم (لِوی‌چیویتا [b]) است:

$$\varepsilon = \frac{1}{(D+1)!}\,\varepsilon_{\mu_0\cdots\mu_D}\,\mathrm{d}r^{\mu_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r^{\mu_D}, \tag{13}$$

که

$$\varepsilon_{\mu_0\cdots\mu_D}=\begin{cases}+\sqrt{|\mathfrak{D}|}, & \text{راست‌گرد است } (r^{\mu_0},\dots,r^{\mu_D})\\ -\sqrt{|\mathfrak{D}|}, & \text{چپ‌گرد است } (r^{\mu_0},\dots,r^{\mu_D})\\ 0, & \text{دو شاخص یک‌سان اند}\end{cases}. \tag{14}$$

$\mathfrak{D}$ دترمینان ِ ماتریس ِ متریک است. از (12) معلوم می‌شود

$$\tilde{\mathfrak{L}}=\frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}, \tag{15}$$

یک نتیجه یِ (12) آن است که

$$\tilde{\mathfrak{L}}[f_*(\phi),f_*(g),f_*(\varepsilon),r]\Big|_{r=f(x)}=\tilde{\mathfrak{L}}(\phi,g,\varepsilon,r)\Big|_{r=x}. \tag{16}$$

یعنی اگر میدان‌ها (و هندسه) را با وابرریختی یِ f منتقل کنیم و $\tilde{\mathfrak{L}}$ با آن‌ها را در نقطه یِ $f(x)$ (نقطه یِ جدید) حساب کنیم، همان $\tilde{\mathfrak{L}}$ با میدان‌ها و هندسه یِ قدیم در نقطه یِ x (نقطه یِ قدیم) می‌شود. این را در این عبارت خلاصه می‌کنند که $\tilde{\mathfrak{L}}$ اسکالر است.

با معلوم‌بودن ِ مئلفه‌ها یِ متریک، مئلفه‌ها یِ تانسور ِ لِوی‌چیویتا [b] تا حد ِ یک علامت معین اند. اگر مختصات ِ انتخاب‌شده راست‌گرد باشد، مئلفه‌ها یِ تانسور ِ لِوی‌چیویتا [b] کاملاً معین اند. به این ترتیب، بسته‌گی یِ چگالیِ‌لَگرانژی به تانسور ِ لِوی‌چیویتا [b] را می‌شود از طریق ِ متریک وارد کرد:

$$S_\Omega=\int_\Omega \mathfrak{L}(\phi,g,r)\ \mathrm{d}r^0\cdots\mathrm{d}r^D=:\int_\Omega \mathfrak{L}(\phi,g,r)\ \mathrm{d}^{D+1}r. \tag{17}$$

حالا یک وابرریختی یِ نزدیک به همانی و اثر ِ آن بر ϕ و g را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}[f(x)]^\mu&=x^\mu+s\,\xi^u,\\ f_*(\phi)&=\phi-s\,L_\xi(\phi)=:\phi+\delta\phi,\\ f_*(g)&=g-s\,L_\xi(g)=:g+\delta g,\end{aligned} \tag{18}$$

که L_ξ مشتق ِ لی نسبت به ξ است. از (12) نتیجه می‌شود

$$\delta_\Omega S+\delta_\phi S+\delta_g S=0, \tag{19}$$

که $\delta_B C$ یعنی تغییر ِ C به خاطر ِ تغییر ِ B. داریم

$$\delta_\Omega S = s \oint_{\partial\Omega} \mathcal{L}\, \xi^\mu \, \mathrm{d}\Sigma_\mu,$$

$$\delta_\phi S = \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A}\, \delta\phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\mu}}\, \partial_\mu \delta\phi^A + \cdots \right)\, \mathrm{d}^{D+1} r,$$

$$\delta_g S = \int_\Omega \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\, \delta g_{\alpha\,\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\, \partial_\mu \delta g_{\alpha\,\beta} + \cdots \right)\, \mathrm{d}^{D+1} r, \qquad (20)$$

که $\mathrm{d}\Sigma$ عنصر ِ فوقِ‌سطح رو یِ مرز ِ Ω است. اگر ξ رو یِ مرز ِ Ω صفر شود، Ω و $f(\Omega)$ یک‌سان اند. در این صورت جمله یِ اول ِ طرف ِ چپ ِ (19) صفر می‌شود. با فرض ِ این که تعداد ِ باپایان ی از مشتق‌ها یِ ϕ و g در چگالی‌یِ‌لَگرانژی ظاهر شده باشند، اگر تعداد ِ کافی از مشتق‌ها یِξ هم رو یِ مرز ِ Ω صفر باشند، طرف ِ راست ِ تساوی‌ها یِ دوم و سه‌وم ِ (20) را می‌شود بر حسب ِ خود ِ $\delta\phi$ و δg (و نَه مشتق‌ها یِشان) نوشت. برا یِ این کار، با استفاده از انتگرال‌گیری یِ جزئ‌به‌جزئ مشتق را از $\delta\phi$ و δg به ضریب ِ آن منتقل می‌کنیم. جمله‌ها یِ مرزی شامل ِ مشتق‌ها یِ $\delta\phi$ و δg اند. $\delta\phi$ و δg، هر یک ترکیب ی خطی از ξ و مشتق ِ اول ِ آن اند. پس اگر ξ و مشتق‌ها یِ تا مرتبه یِ $(k+1)$ ِ آن رو یِ مرز ِ Ω صفر باشند، $\delta\phi$ و δg و مشتق‌ها یِ تا مرتبه یِ k ِ آن‌ها هم رو یِ مرز ِ Ω صفر اند. به این ترتیب، اگر تعداد ِ کافی از مشتق‌ها یِ ξ رو یِ مرز ِ Ω صفر باشند (این تعداد ِ کافی باپایان است)، جمله‌ها یِ مرزی یِ ناشی از این انتگرال‌ها یِ جزئ‌به‌جزئ صفر اند. در این حالت،

$$\delta_\phi S = \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta \phi^A} \right)_{\mathrm{in}} \delta\phi^A \, \mathrm{d}^{D+1} r,$$

$$\delta_g S = \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}} \right)_{\mathrm{in}} \delta g_{\alpha\,\beta} \, \mathrm{d}^{D+1} r, \qquad (21)$$

که

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi^A} \right)_{\mathrm{in}} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\mu}} \right) + \cdots,$$

$$\left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}} \right)_{\mathrm{in}} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}} \right) + \cdots. \qquad (22)$$

به این ترتیب، برا یِ ξ ها یی که تعداد ِ کافی از مشتق‌ها یِشان در مرز ِ Ω صفر است، (19) می‌شود

$$\int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\right)_{\rm in} \delta\phi^A\,{\rm d}^{D+1}r + \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\,\beta}}\right)_{\rm in} \delta g_{\alpha\,\beta}\,{\rm d}^{D+1}r = 0. \tag{23}$$

با استفاده از (2) و (18) و (21)،

$$\begin{aligned}
\delta_g S &= -2\,s \int_\Omega \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in} \xi_{\mu\,;\nu}\,{\rm d}^{D+1}r,\\
&= -s \int_\Omega \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in} \xi_{\mu\,;\nu}\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,{\rm d}^{D+1}r,\\
&= -s \int_\Omega \left[\frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in} \xi_\mu\right]_{;\nu} \sqrt{|\mathfrak{D}|}\,{\rm d}^{D+1}r\\
&\quad +s \int_\Omega \left[\frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in}\right]_{;\nu} \xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,{\rm d}^{D+1}r,\\
&= -s \int_\Omega \partial_\nu \left[2\left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in} \xi_\mu\right]\,{\rm d}^{D+1}r\\
&\quad +s \int_\Omega \left[\frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in}\right]_{;\nu} \xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,{\rm d}^{D+1}r,\\
&= -2\,s \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in} \xi_\mu\,{\rm d}\Sigma_\nu\\
&\quad +s \int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\,\xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,{\rm d}^{D+1}r,
\end{aligned} \tag{24}$$

که

$$T^{\nu\,\mu} := \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}} \left(\frac{\delta S}{\delta g_{\nu\,\mu}}\right)_{\rm in}. \tag{25}$$

در تساوی یِ اول ِ (24) این به کار رفته که وردش ِ کنش نسبت به متریک متقارن است (چون خود ِ متریک متقارن است). در تساوی یِ چهارُم ِ (24) هم این به کار رفته است که

$$V^\nu{}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}\,\partial_\nu\left(V^\nu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\right), \tag{26}$$

که V^ν ها مئلفه‌ها یِ بردار ِ V اند.

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست در آخرین تساوی یِ (24) صفر است. به این ترتیب، (23) می‌شود

$$s\int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\,\xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\;\mathrm{d}^{D+1}r+\int_\Omega\left(\frac{\delta S}{\delta\phi^A}\right)_{\mathrm{in}}\,\delta\phi^A\;\mathrm{d}^{D+1}r=0, \qquad (27)$$

یا

$$\int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\,\xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\;\mathrm{d}^{D+1}r+\int_\Omega\mathcal{E}_A\,\frac{\delta\phi^A}{s}\;\mathrm{d}^{D+1}r=0, \qquad (28)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_\Omega T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\,\xi_\mu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\;\mathrm{d}^{D+1}r\overset{\mathrm{ns}}{=}0. \qquad (29)$$

رابطه یِ (29) باید به ازا یِ ξ ها یِ دل‌بخواه (فقط با این شرط که تعداد ِ کافی از مشتق‌ها یِ ξ رو یِ مرز صفر شود) برقرار باشد. از این نتیجه می‌شود

$$T^{\nu\,\mu}{}_{;\nu}\overset{\mathrm{ns}}{=}0. \qquad (30)$$

این مانسته یِ رابطه یِ (10) است.

3 تقارن ِ فضازمانی و جریان‌ها یِ پی‌وسته

معادله یِ (30) برا یِ هر کنش ی با هم‌وردایی یِ عام درست است، و به تقارن‌ها یِ فضازمان مربوط نمی‌شود. اما ضمناً این معادله رابطه یِ پی‌وسته‌گی نیست. به‌ویژه، از این رابطه ثابتِ‌حرکت ی به دست نمی‌آید. این رابطه را نمی‌شود به شکل ِ دیورژانس ِ معمولی (غیرِهم‌وردا) یِ چیز ی نوشت که انتگرال ِ فضایی یِ مئلفه یِ صفرُم ِ آن ثابت ِ حرکت شود.

حالا فرض کنید ξ مولد ِ یک تقارن ِ فضازمانی (مولد ِ یک ایزومتری) باشد، یعنی ξ یک میدان ِ برداری یِ کیلینگ باشد. در این صورت از (2) نتیجه می‌شود

$$\xi_{\mu\,;\nu}+\xi_{\nu\,;\mu}=0. \qquad (31)$$

این را با (30) ترکیب می‌کنیم، و از این استفاده می‌کنیم که T متقارن است. نتیجه می‌شود

$$(T^{\nu\,\mu}\,\xi_\mu)_{;\nu} \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{32}$$

یا

$$\tilde{J}^\nu{}_{;\nu} \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{33}$$

که

$$\tilde{J}^\nu := T^{\nu\,\mu}\,\xi_\mu. \tag{34}$$

رابطه یِ (33) را می‌شود نوشت

$$\partial_\nu\left(\tilde{J}^\nu\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\right) = 0, \tag{35}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$Q := \int \tilde{J}^0\,\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,\mathrm{d}^D r \tag{36}$$

ثابت ِ حرکت است (به شرط ِ آن که فضا مرز نداشته باشد یا مئلفه‌ها یِ فضایی یِ جریان در مرز یا بی‌نهایت با سرعت ِ کافی صفر شوند).

پس هر خانواده یِ یک‌پارامتری یِ تقارن‌ها یِ فضازمانی (که پی‌وسته به همانی و در همانی مشتق‌پذیر باشد) به یک جریان ِ پی‌وسته می‌انجامد.

4 تانسور ِ انرژی‌ــ تکانه یِ کانونیک و تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ متقارن

دستِ‌کم برا یِ فضازمان ِ تخت، به نظر می‌رسد تقارن ِ انتقال ِ فضازمان در یک جهت به دو جریان ِ پی‌وسته می‌انجامد: یک ی از رابطه یِ (8) و دیگری از رابطه یِ (34). اگر قرار باشد این دوجریان مستقل از هم نباشند، باید بین ِ Θ (تانسور ِ انرژی‌ــ تکانه یِ کانونیک) و T (تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ متقارن) رابطه ای باشد.

سیستم ی را در نظر بگیرید که هم‌وردایی یِ عام دارد و در چگالیِ‌لَگرانژی یِ متناظر با آن دستِ‌بالا مشتق ِ اول ِ میدان و متریک ظاهر می‌شود. از ترکیب ِ (19) و (20) نتیجه می‌شود

$$s\,\partial_\mu(\mathfrak{L}\,\xi^\mu)+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A}\,\delta\phi^A+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu\delta\phi^A+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\,\delta g_{\alpha\,\beta}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu\delta g_{\alpha\,\beta}=0. \quad (37)$$

داریم

$$\delta\phi^A=-s\,\xi^\sigma\,\partial_\sigma\phi^A+s\,(\partial_\rho\xi^\sigma)\,G^{A\,\rho}{}_\sigma, \quad (38)$$

که G به ویژه‌گی یِ تانسوری یِ ϕ بسته‌گی دارد، و

$$\delta g_{\alpha\,\beta}=-s\,\xi^\sigma\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}-s\,(\partial_\rho\xi^\sigma)\,(\delta^\rho_\alpha\,g_{\sigma\,\beta}+\delta^\rho_\beta\,g_{\alpha\,\sigma}). \quad (39)$$

این‌ها را در (37) می‌گذاریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}0=&+\xi^\sigma\,\left(\partial_\sigma\mathfrak{L}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A}\,\partial_\sigma\phi^A-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu\partial_\sigma\phi^A-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}\right)\\&+(\partial_\rho\xi^\sigma)\,\left(\delta^\rho_\sigma\,\mathfrak{L}+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A}\,G^{A\,\rho}{}_\sigma+\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,\partial_\mu G^{A\,\rho}{}_\sigma-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\rho}}\,\partial_\sigma\phi^A\right.\\&\qquad\left.-2\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\,\beta}}\,g_{\sigma\,\beta}-2\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,\partial_\mu g_{\sigma\,\beta}-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}\right)\\&+(\partial_\mu\,\partial_\rho\xi^\sigma)\,\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,G^{A\,\rho}{}_\sigma-2\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,g_{\sigma\,\beta}\right). \end{aligned} \quad (40)$$

ضریب‌ها یِ ξ و مشتق ِ اول ِ ξ، و نیز بخش ِ متقارن ِ ضریب ِ مشتق ِ دوم ِ ξ باید صفر باشد. از این که ضریب ِ ξ صفر باشد نتیجه می‌شود

$$\partial^{\phi,g}_\rho\mathfrak{L}=0, \quad (41)$$

یعنی بسته‌گی یِ $\mathfrak{L}$ به فضازمان فقط از طریق ِ میدان و متریک است. از این که بخش ِ متقارن ِ ضریب ِ مشتق ِ دوم ِ ξ صفر است، نتیجه می‌شود

$$\omega^{\mu\,\rho}{}_\sigma:=\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}}\,G^{A\,\rho}{}_\sigma-2\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\rho\,\beta\,,\mu}}\,g_{\sigma\,\beta} \quad (42)$$

پادمتقارن است. سرانجام، از صفرشدن ِ ضریب ِ مشتق ِ اول ِ ξ نتیجه می‌شود

$$\mathcal{E}_A\,G^{A\,\rho}{}_\sigma-\Theta^\rho{}_\sigma+\partial_\mu\omega^{\mu\,\rho}{}_\sigma-\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta}-\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^\rho{}_\sigma=0. \quad (43)$$

این، رو يِ لاک رابطه ای بین ِ Θ و T می‌دهد:

$$-\Theta^{\rho}{}_{\sigma}+\partial_{\mu}\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_{\sigma}g_{\alpha\,\beta}\overset{\text{ns}}{=}\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{44}$$

اگر فضازمان تخت باشد و مختصات را دِکَرتی بگیریم، مشتق‌ها يِ مئلفه‌ها يِ متریک صفر می‌شود و قدرِمطلق ِ دترمینان ِ متریک را هم می‌شود یک کرد. در این صورت عبارت ِ بالا به این شکل ِ ساده در می‌آید.

$$\begin{aligned}\Theta'^{\rho}{}_{\sigma}&:=\Theta^{\rho}{}_{\sigma}-\partial_{\mu}\omega^{\mu\,\rho}{}_{\sigma},\\ &\overset{\text{ns}}{=}-T^{\rho}{}_{\sigma}.\end{aligned} \tag{45}$$

ω پادمتقارن است از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\partial_{\rho}\Theta'^{\rho}{}_{\sigma}=\partial_{\rho}\Theta^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{46}$$

هم‌چنین،

$$\begin{aligned}P'_{\sigma}&=-\int\Theta'^{0}{}_{\sigma}\;\mathrm{d}^{D}r,\\ &=-\int\Theta^{0}{}_{\sigma}\;\mathrm{d}^{D}r+\int\partial_{\mu}\omega^{\mu\,0}{}_{\sigma}\;\mathrm{d}^{D}r,\\ &=P_{\sigma}+\int\partial_{i}\omega^{i\,0}{}_{\sigma}\;\mathrm{d}^{D}r,\\ &=P_{\sigma}+\oint\omega^{i\,0}{}_{\sigma}\;\mathrm{d}\mathcal{S}_{i}.\end{aligned} \tag{47}$$

$\mathrm{d}\mathcal{S}$ عنصر ِ سطح در مرز ِ فضا است. در رسیدن به تساوی يِ سه‌وم از این استفاده شده که ω پادمتقارن است و در نتیجه $\omega^{0\,0}{}_{\sigma}$ صفر است. جمله يِ دوم ِ طرف ِ راست ِ آخرین تساوی صفر است، اگر فضا مرز نداشته باشد یا $\omega^{i\,0}{}_{\sigma}$ ها در مرز یا بی‌نهایت با سرعت ِ کافی صفر شوند.

به این ترتیب، معلوم می‌شود در فضازمان ِ تخت و رو يِ لاک، تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه يِ کانونیک اصولاً همان تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه يِ متقارن است (صرفِ‌نظر از یک علامت ِ منفی که به قرارداد بسته‌گی دارد). این که این دوتانسور اصولاً یکی اند،

یعنی معادله‌ها یِ پی‌وسته‌گی یِشان یک‌سان است و ثابت‌هایِ‌حرکت ِ ناشی از تقارن ِ انتقالی هم که از این دوتانسور به دست می‌آید یک‌سان است.

این که تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک همان تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ متقارن است، رو یِ لاک درست است و بر اساس ِ این فرض‌ها است که در چگالی یِ لَگرانژی بسته‌گی به فضازمان از طریق ِ فقط میدان‌ها و متریک است، و فضازمان تخت است. در موارد ی بعض ی از این فرض‌ها را می‌شود حذف کرد. فرض کنید چگالی یِ لَگرانژی علاوه بر میدان‌ها (یِ دینامیکی) و متریک شامل ِ میدان‌ها یِ اسکالر ِ بیرونی یی هم باشد که مشتق ِشان در چگالی یِ لَگرانژی وارد نشده است. منظور از میدان ِ بیرونی این است که این میدان داده‌شده است و برا یِ آن معادله یِ حرکت نمی‌نویسیم. با استدلال ی شبیه ِ آن چه به (43) انجامید (و به این ترتیب که با میدان‌ها یِ بیرونی هم مثل ِ میدان‌ها یِ دینامیکی رفتار کنیم)، معلوم می‌شود

$$\mathcal{E}_A\, G^{A\,\rho}{}_\sigma - \Theta^\rho{}_\sigma + \partial_\mu \omega^{\mu\,\rho}{}_\sigma - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\alpha\,\beta\,,\rho}}\,\partial_\sigma g_{\alpha\,\beta} - \sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^\rho{}_\sigma = \Delta, \qquad (48)$$

که

$$\Delta := -\mathcal{E}_X\, G^{X\,\rho}{}_\sigma + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^X_{,\rho}}\,\phi^X_{,\sigma} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^X_{,\mu}}\,G^{X\,\rho}{}_\sigma\right). \qquad (49)$$

شاخص‌ها یِ بزرگ ِ از حرف‌ها یِ ابتدایی یِ لاتین متناظر با میدان‌ها یِ دینامیکی و شاخص‌ها یِ بزرگ ِ از حرف‌ها یِ انتهایی یِ لاتین متناظر با میدان‌ها یِ بیرونی اند. تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک هم با (فقط) میدان‌ها یِ دینامیکی تعریف شده. اگر ϕ^X اسکالر باشد، G^X صفر است. اگر G^X ها صفر باشند و مشتق ِ ϕ^X ها هم در چگالی یِ لَگرانژی وارد نشده باشد، Δ صفر می‌شود. پس اگر میدان‌ها یِ بیرونی اسکالر باشند و مشتق ِشان هم در چگالی یِ لَگرانژی وارد نشده باشد، Δ صفر است و (43) و در نتیجه (44) برقرار اند.

اگر ϕ^A اسکالر باشد G^A صفر است. اگر G^A ها صفر باشند و مشتق ِ متریک هم در چگالی یِ لَگرانژی وارد نشده باشد، ω صفر است. اگر G^A ها صفر باشند، مشتق ِ متریک در چگالی یِ لَگرانژی وارد نشده باشد، و ω هم صفر باشد، آن‌گاه همه یِ جمله‌ها یِ طرف ِ چپ ِ (43) جز مضرب‌ها یِ تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک و متقارن صفر اند. به این ترتیب، اگر همه یِ میدان‌ها (جز متریک) اسکالر باشند، مشتق ِ میدان‌ها یِ بیرونی

در چگالی یِ لَگرانژی نباشد، و مشتق ِ متریک هم در چگالی یِ لَگرانژی نباشد، رابطه یِ تانسور ِ انرژی ـ تکانه یِ کانونیک با تانسور ِ انرژی ـ تکانه یِ متقارن بیرون ِ لاک هم برقرار و به این شکل ِ ساده خواهد بود.

$$-\Theta^{\rho}{}_{\sigma}=\sqrt{|\mathfrak{D}|}\,T^{\rho}{}_{\sigma}. \tag{50}$$

5 مرجع‌ها

[1] محمد خرمی؛ " تانسور ِ انرژی ـ تکانه I"، X1-028 (2005/01/07)

[2] Mikio Nakahara; “Geometry, topology and physics”, (Institute of Physics Publishing, 1995) chapters 5–7

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Killing

[b] Levi-Civita