

1 سنجش، مقدار چشمداشتی، عدم - قطعیت، مثال

فضای هیلبرت دُ-بُعدی است. یک پایه ی متعامد برای این فضا میگیرم. مشاهده-پذیرها میشوند ماتریسها ی اِرمیتی ی دُ-در-دُ. شکل کلی ی اینها چنین است.

$$Q = \begin{pmatrix} a & \bar{b} \\ b & d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

که a و d حقیقی یَند. از جمله ی این مشاهده-پذیرها،

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

حالت اولیه ی سیستم $|\psi\rangle$ است:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.6i \end{pmatrix}. \quad (4)$$

σ را میسنجیم. ویژه-مقدارها ی σ برابر با 1 یا (-1) اند. پس فقط اینها ممکن است به دست آیند. و احتمالها میشوند

$$P(\sigma = 1) = 0.64. \quad (5)$$

$$P(\sigma = -1) = 0.36. \quad (6)$$

پس از سنجش، حالت سیستم بر ویژه-فضای متناظر با ویژه-مقدار به-دست-آمده تصویر میشود. پس بسته به این که مقدار مثبت یا منفی به دست آمده باشد، حالت سیستم $|\psi'_+\rangle$ یا $|\psi'_-\rangle$ میشود، که

$$|\psi'_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

$$|\psi'_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= P(\sigma = 1)(1) + P(\sigma = -1)(-1), \\ &= 0.28, \end{aligned} \quad (9)$$

یا، از یک راه دیگر،

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \psi | \sigma | \psi \rangle, \\ &= 0.28. \end{aligned} \quad (10)$$

عدم-قطعیت σ را هم میشود چنین حساب کرد.

$$\langle \sigma^2 \rangle = 1. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (\Delta \sigma)^2 &= \langle \sigma^2 \rangle - \langle \sigma \rangle^2, \\ &= 0.9216. \end{aligned} \quad (12)$$

اگر با هم ان حالت $|\psi\rangle$ کمیت τ را میسنجیم، نتایج اینها میشد. (لطفن τ را قطری کنید و این نتایج را به دست آورید.)

$$P(\tau = 1) = 0.5. \quad (13)$$

$$P(\tau = -1) = 0.5. \quad (14)$$

حالتها ی ممکن سیستم بعد از سنجش τ اینها میشوند.

$$|\psi''_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$|\psi''_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

همچنین،

$$\langle \tau \rangle = 0. \quad (17)$$

$$\langle \tau^2 \rangle = 1. \quad (18)$$

$$(\Delta \tau)^2 = 1. \quad (19)$$

دیده میشود،

$$(\Delta \sigma) (\Delta \tau) = 0.9216. \quad (20)$$

قضیه ی عدم-قطعیت میگوید

$$(\Delta \sigma) (\Delta \tau) \geq \frac{|[\sigma, \tau]|}{2}. \quad (21)$$

دیده میشود

$$[\sigma, \tau] = \varepsilon, \quad (22)$$

که

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

$$\langle \varepsilon \rangle = 0.96 i. \quad (24)$$

پس انتظار میرود

$$(\Delta \sigma)(\Delta \tau) \geq 0.48 \quad (25)$$

که درست است.

اگر پس از سنجش τ کمیت σ سنجیده میشد نتیجه چه میبود؟ پس از سنجش τ ، حالت سیستم $|\psi''_+\rangle$ یا $|\psi''_-\rangle$ میشد. میتوانید حساب کنید که برای هر کدام از اینها،

$$P''_+(\sigma = 1) = 0.5. \quad (26)$$

$$P''_+(\sigma = -1) = 0.5. \quad (27)$$

$$(\Delta''_+ \sigma) = 1. \quad (28)$$

$$P''_-(\sigma = 1) = 0.5. \quad (29)$$

$$P''_-(\sigma = -1) = 0.5. \quad (30)$$

$$(\Delta''_- \sigma) = 1. \quad (31)$$

سنجش τ نتایج سنجش σ را خراب میکرد.