1 مقدار ِ چشمداشتی، عدم- ِ قطعیت

کمیت ِ Q سنجیده شود، احتمال ِ این که q به دست آید $P(Q=q)$ است. با استفاده از این احتمال میشود میانگین ِ نتایج ِ سنجش را حساب کرد. یعنی میانگین ِ مقدارها یی را حساب کرد که با تعداد ِ زیاد ی سنجش به دست میئایند. اگر N بار سنجش انجام شود، و N بزرگ باشد، تعداد ِ بارها یی که q نتیجه میشود $[N\,P(Q=q)]$ است. پس $\langle Q\rangle$ (میانگین ِ Q) چنین میشود.

$$\langle Q\rangle = \frac{1}{N}\left\{\sum_q [N\,P(Q=q)]\,q\right\}, \tag{1}$$

که یعنی

$$\langle Q\rangle = \sum_q P(Q=q)\,q. \tag{2}$$

البته این میانگین لازم نیست حتمَن یک ی از مقدارها یِ ممکن باشد. مثلَن یک تاس ِ سالم را میریزیم. احتمال ِ این که هر یک از مقدارها یِ 1 تا 6 بیاید برابر با $(1/6)$ است. میانگین ِ عدد ی که میئاید میشود

$$\sum_{q=1}^{6}\frac{q}{6} = 3.5, \tag{3}$$

در حال ی که نتیجه یِ هیچ سنجش ی 3.5 نیست.

کوانتم- مکانیک میگوید اگر سیستم در حالت ِ $|\psi\rangle$ باشد،

$$P(Q=q) = |\langle Q=q|\psi\rangle|^2, \tag{4}$$

که حالت و ویژه- بردارها یکه گرفته شده اند. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\langle Q\rangle &= \sum_q |\langle Q=q|\psi\rangle|^2\,q,\\ &= \sum_q q\,\langle\psi|Q=q\rangle\langle Q=q|\psi\rangle,\\ &= \langle\psi|\left(\sum_q q\,|Q=q\rangle\langle Q=q|\right)|\psi\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

که با استفاده از

$$Q = \sum_q q \,|Q=q\rangle\langle Q=q|, \tag{6}$$

نتیجه میدهد

$$\langle Q\rangle = \langle\psi|\, Q\, |\psi\rangle. \tag{7}$$

Q اِرمیتی ست. پس $\langle Q\rangle$ حقیقی ست. چرا؟

یک شاخص ِ دیگر برا یِ یک متغیر ِ تصادفی این است که متغیر چه قدر تصادفی ست. هر چه مقادی ر که در سنجش به دست میئاین به هم نزدیکتر باشند، متغیر کمتر تصادفی ست. حالت ِ حدی این است که همیشه یک مقدار به دست اید. در این صورت متغیر اصلَن تصادفی نیست. یک راه برا یِ کمی-کردن ِ این شاخص استفاده از انحراف ِ میانگین است. گیرم Q یک متغیر ِ تصادفی با میانگین ِ $\langle Q\rangle$ است. وقت ی در یک سنجش q نتیجه میشود، انحراف از میانگین $|q-\langle Q\rangle|$ است. میانگین این کمیت

$$\sum_q P(Q=q)\,|q-\langle Q\rangle|$$

است و به آن انحراف ِ میانگین میگویند. یک شاکال ِ این کمیت به عنوان ِ شاخص ِ تصادفی-بودن این است که کار-کردن با قدر- ِ-مطلق ساده نیست. اینتخاب ِ ساده یِ بعدی این است که به جا یِ انحراف از میانگین، مجذور ِ انحراف از میانگین را به کار ببریم. مجذور ِ انحراف نامنفی ست و قدر- ِ-مطلق لازم ندارد. به میانگین ِ مجذور ِ انحراف از میانگین وردایی میگویند. وردایی یِ Q را با $\mathrm{Var}(Q)$ نشان میدهم:

$$\mathrm{Var}(Q) = \langle (Q-\langle Q\rangle)^2\rangle, \tag{8}$$

یعنی

$$\mathrm{Var}(Q) = \sum_q P(Q=q)\,(q-\langle Q\rangle)^2. \tag{9}$$

طرفِ راست را باز میکنم:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Q) &= \sum_q P(Q=q)\,(q^2 - 2\,\langle Q\rangle\, q + \langle Q\rangle^2),\\ &= \langle Q^2\rangle - 2\,\langle Q\rangle\,\langle Q\rangle + \langle Q\rangle^2, \end{aligned} \tag{10}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathrm{Var}(Q) = \langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2. \tag{11}$$

برا یِ مثالِ تاسِ سالم، قبلَن معلوم شد

$$\langle Q\rangle = \frac{7}{2}. \tag{12}$$

برا یِ محاسبه یِ وردایی $\langle Q^2\rangle$ را حساب میکنم:

$$\begin{aligned}\langle Q^2\rangle &= \sum_{q=1}^{6} \frac{q^2}{6},\\ &= \frac{91}{6}. \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathrm{Var}(Q) = \frac{35}{12}. \tag{14}$$

$\mathrm{Var}(Q)$ یک معیار برا یِ مقدارِ تصادفی-بودنِ Q هست، هر چه $\mathrm{Var}(Q)$ بزرگتر باشد Q تصادفیتر است. اما بُعدِ $\mathrm{Var}(Q)$ مجذورِ بُعدِ Q است. پس $\mathrm{Var}(Q)$ را نمیشود با $\langle Q\rangle$ مقایسه کرد. جذرِ $\mathrm{Var}(Q)$ این ویژگی را دارد که هر چه بزرگتر باشد Q تصادفیتر است (چون هر چه جذرِ $\mathrm{Var}(Q)$ بزرگتر باشد خُدِ $\mathrm{Var}(Q)$ هم بزرگتر است) و ضمنَن بعدَ ش با بُعدِ Q یکسان است. جذرِ $\mathrm{Var}(Q)$ را با $\Delta\, Q$ نشان میدهند و به آن انحراف-ِ-معیارِ Q یا نایقینی یِ (عدم-ِ-قطعیتِ) Q میگویند.

کوانتم-مکانیک میگوید نتیجه یِ سنجشِ Q تصادفی ست، مگر حالتِ سیستم ویژه-بردارِ Q باشد. آیا میشود حالت را چنان گرفت که نتیجه یِ سنجش برا یِ دُ کمیتِ A و B هر-دُ قطعی باشد؟ برا یِ این که چنین شود حالتِ سیستم باید هم ویژه-بردارِ A باشد و هم ویژه-بردارِ B. اگر A و B قطری-شدنی باشند و با هم جا-به-جا شوند، میشود یک پایه ساخت که هر یک از اعضا یَ ش

ویژه-بردار ِ همزمان ِ A و B است. برا یِ دیدن ِ این، گیرم $|u\rangle$ یک ویژه-بردار ِ A با ویژه-مقدار ِ a است. A را بر $(B\,|u\rangle)$ اثر میدهم:

$$\begin{aligned} A\,B\,|u\rangle &= B\,A\,|u\rangle, \\ &= a\,B\,|u\rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

پس $(B\,|u\rangle)$ هم ویژه-بردار ِ A با هم ان ویژه-مقدار است. این یعنی نتیجه یِ اثر ِ B بر یک ویژه-فضا یِ A در هم ان ویژه-فضا ست. تحدید ِ B به $\mathbb{V}_{A=a}$ (ویژه-فضا یِ A با ویژه-مقدار ِ a) را قطری میکنم. هر یک از ویژه-بردارها یِ تحدید ِ B به $\mathbb{V}_{A=a}$ ویژه-بردار ِ B اند، و البته ویژه-بردار ِ A با هم ان ویژه-مقدار ِ a هم هستند. به این ترتیب یک پایه برا یِ $\mathbb{V}_{A=a}$ به دست میئاید که هر یک از اعضا یَ ش ویژه-بردار ِ همزمان ِ A و B اند. این کار را برا یِ همه یِ ویژه-فضاها یِ A انجام میدهم. به این یک پایه برا یِ کل ِ فضا به دست میئاید که هر یک از اعضا یَ ش ویژه-بردار ِ همزمان ِ A و B اند.

یک نتیجه یِ فرعی یِ این اثبات آن است که اگر $|u\rangle$ ویژه-بردار ِ A با ویژه-مقدار ِ a باشد، و این ویژه-مقدار تبهگن نباشد، یعنی بُعد ِ $\mathbb{V}_{A=a}$ یک باشد، آنگاه $|u\rangle$ یک ویژه-بردار ِ B هم هست.

پس اگر کمیتها یِ A و B با هم چا-به-جا شوند، حالتها یی هستند که نتیجه یِ سنجش ِ هم A و هم B را قطعی میکنند. اما اگر A و B با هم جا-به-جا نشوند چه؟ قضیه یِ عدم- ِ-قطعیت یک محدودیت برا یِ نایقینیها یِ A و B میدهد. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} (\Delta\,A)^2\,(\Delta\,B)^2 &= \langle\psi|(A-\langle A\rangle)^2|\psi\rangle\,\langle\psi|(B-\langle B\rangle)^2|\psi\rangle, \\ &= |(A-\langle A\rangle)\,|\psi\rangle|^2\,|(B-\langle B\rangle)\,|\psi\rangle|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

نابرابری یِ کُشی-شْوارتس این است که حاصل- ِ-ضرب ِ مجذور ِ طول ِ دُ-بردار، از مجذور ِ حاصل- ِ-ضرب ِ درونی یِ آن دُ-بردار کوچکتر نیست. (سادهتر این که قدر- ِ-مطلق ِ حاصل- ِ-ضرب ِ درونی یِ دُ-بردار از حاصل- ِ-ضرب ِ طولها یِ آن دُ-بردار کوچکتر نیست.) پس،

$$(\Delta\,A)^2\,(\Delta\,B)^2 \geq |\langle\psi|(A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle)|\psi\rangle|^2, \tag{17}$$

یا،

$$(\Delta A)^2\,(\Delta B)^2 \geq |\langle (A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle)\rangle|^2. \tag{18}$$

در واقع باید مزدوج ِ اِرمیتی یِ پرانتز ِ اول میامد، اما چون A اِرمیتی و در نتیجه $\langle A\rangle$ حقیقی ست، پرانتز ِ اول اِرمیتی ست و با مزدوج- ِ-اِرمیتی یَ ش برابر است. C و D را چنین تعریف میکنم.

$$C = [(A-\langle A\rangle), (B-\langle B\rangle)], \tag{19}$$

$$D = \{(A-\langle A\rangle), (B-\langle B\rangle)\}, \tag{20}$$

که

$$[X, Y] = X\,Y - Y\,X. \tag{21}$$

$$\{X, Y\} = X\,Y + Y\,X. \tag{22}$$

به $[X, Y]$ جا-به-جاگر ِ X و Y، و به $\{X, Y\}$ پادجا-به-جاگر ِ $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ میگویند. دیده میشود

$$(A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle) = \frac{C}{2} + \frac{D}{2}. \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\langle (A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle)\rangle = \frac{\langle C\rangle}{2} + \frac{\langle D\rangle}{2}. \tag{24}$$

اگر X و Y اِرمیتی باشند، $[X, Y]$ پاداِرمیتی ست، یعنی i برابر ِ یک کمیت ِ اِرمیتی ست، و $\{X, Y\}$ اِرمیتی ست (لطفَن اینها را نشان دهید). پس $\langle [X, Y]\rangle$ مُهومی یِ محض است و $\langle \{X, Y\}\rangle$ حقیقی ست. به این ترتیب،

$$|\langle (A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle)\rangle|^2 = \frac{|\langle C\rangle|^2}{4} + \frac{|\langle D\rangle|^2}{4}. \tag{25}$$

پس،

$$|\langle (A-\langle A\rangle)\,(B-\langle B\rangle)\rangle|^2 \geq \frac{|\langle C\rangle|^2}{4}. \tag{26}$$

از ترکیبِ (18) و (26) دیده میشود

$$(\Delta\, A)^2\,(\Delta\, B)^2 \geq \frac{|\langle C\rangle|^2}{4}, \tag{27}$$

یا

$$(\Delta\, A)\,(\Delta\, B) \geq \frac{|\langle C\rangle|}{2}. \tag{28}$$

جا-به-جا-گرِ یک عدد (ضرب در عملگرِ همانی) با هر چیز صفر است. پس (19) چنین میشود.

$$C = [A, B]. \tag{29}$$

به این ترتیب (28) چنین میشود.

$$(\Delta\, A)\,(\Delta\, B) \geq \frac{|\langle [A, B]\rangle|}{2}. \tag{30}$$

به این نتیجه قضیه یِ عدم-ِقطعیت میگویند: حاصل-ِضربِ نایقینها یِ دُ کمیت، از نصفِ مقدار-ِچشمداشتی یِ جا-به-جاگرِ شان کوچکتر نیست. در ضمن میشود شرطِ این را به دست آورد که دُ-طرفِ رابطع یِ بالا برابر باشند: شرطِ کمینه یِ عدم-ِقطعیت. برا یِ این که چنین شودنابرابریها یِ (17) و (26) هر-دُ باید برابری شوند. نابرابری یِ (17) (کُشی-شْوارتس) برابری میشود، اگر و تنها اگر بردارها یی که در آن وارد میشوند همراستا باشند:

$$[(B - \langle B\rangle)|\psi] \parallel [(B - \langle B\rangle)|\psi]. \tag{31}$$

نابرابری یِ (26) برابری میشود، اگر و تنها اگر جمله یِ دوم در طرفِ راستِ (25) صفر شود. یعنی

$$\langle\psi|\{(A - \langle A\rangle), (B - \langle B\rangle)\}|\psi\rangle = 0. \tag{32}$$

پس نابرابری یِ (30) همیشه برقرار است، و به برابری تبدیل میشود اگر و تنها اگر (31) و (32) هر-دُ براورده شوند.