1 تقلیل ِ بردار ِ حالت

معلوم شد اگر حالت ِ سیستم $|\psi\rangle$ باشد و کمیت ِ Q سنجیده شود، در حالت ِ کلی نتیجه یِ سنجش قطعی نیست: هر یک از ویژه-مقدارها یِ Q ممکن است به دست آید. البته میشود احتمال ِ به-دست-آمدن ِ هر ویژه-مقدار را حساب کرد. احتمال ِ این که q به دست اید یک است، اگر و تنها اگر $|\psi\rangle$ ویژه-بردار ِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q باشد.

وضعیت ی را در نظر بگیرید که کمیت ِ Q سنجیده شده و مقدار ِ q به دست آمده. اگر بلافاصله پس از این سنجش دُباره Q سنجیده شود نتیجه چیست؟ اگر قرار باشد سنجش تکرار-پذیر باشد، باز هم باید حتمَن q به دست آید. یعنی این بار باید احتمال ِ به دست-آمدن ِ q یک باشد. پس حالت ِ سیستم باید ویژه-بردار ِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q باشد. حالت ِ سیستم پیش از سنجش ِ اول را به مجموع ِ دُ بردار تجزیه میکنم:

$$|\psi\rangle = |\psi'\rangle + |\psi''\rangle, \tag{1}$$

که $|\psi'\rangle$ ویژه-بردار ِ Q ، و تصویر ِ قائم ِ این بردار بر زیرفضا یِ عمود بر ویژه-فضا یِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q است و $|\psi''\rangle$ بر $|\psi'\rangle$ عمود است. $|\psi'\rangle$ تصویر ِ قائم ِ $|\psi\rangle$ بر ویژه-فضا یِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q است. یک راه که تضمین میکند اگر نتیجه یِ سنجش ِ اول q بود نتیجه یِ سنجش ِ بعدی هم q باشد این است که حالت ِ سیستم پس از سنجش ِ اول (با نتیجه یِ q) بر ویژه-فضا یِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q تصویر شود. یعنی حالت ِ سیستم پس از سنجش ِ اول $|\psi'\rangle$ شود. به این، تقلیل ِ بردار ِ حالت میگویند.

کوانتم-مکانیک میگوید طی ِ سنجش ِ Q، بردار ِ حالت ِ سیستم بر یک ی از ویژه-فضاها یِ Q تصویر میشود و مقدار ی که سنجیده شده ویژه-مقدار ِ Q متناظر با آن ویژه-فضا ست. این که کدام (ویژه-فضا انتخاب شود (کدام ویژه-مقدار انتخاب شود) تصادفی ست و احتمال َ ش هم ان است که قبلَن آمد.

تقلیل ِ بردار ِ حالت مسئله یِ تکرار-پذیر-بودن ِ سنجش را حل میکند، اما نکات ِ دیگر ی پیش میئاورَد: با سنجش نمیشود فهمید حالت ِ سیستم پیش از سنجش چه بوده. فقط میشود چیزها یی در باره یِ حالت ِ سیستم پس از سنجش فهمید: حالت ِ سیستم پس از سنجش ِ Q در ویژه-فضا یِ Q متناظر با ویژه-مقدار ِ q (نتیجه یِ سنجش) است. اگر Q تبهگن نباشد، حالت ِ سیستم پس از سنجش

(با دانستن ِ نتیجه یِ سنجش) کاملَن معین است. همچنین، سنجش (حتا سنجش ِ آرمانی) حالت ِ سیستم را عوض میکند.

مثال: ماتریس ِ Q در یک پایه یِ یکه-متعامد چنین است.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

حالت ِ یک سیستم $|\psi\rangle$ است، و ماتریس ِ $|\psi\rangle$ در هم ان پایه چنین است.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

با سنجش ِ Q چه مقدارها یی، و هر کدام با چه احتمال ی به دست میئایند؟ (جواب در ادامه میئاید، اما لطفَن خُد ِ تان حل کنید.)

مقدارها یِ ممکن ویژه-مقدارها یِ Q اند. ویژه-مقدارها یِ Q برابر با (-1) و 1 میشوند. ویژه-بردارها هم چنین میشوند.

$$|Q = -1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$$|Q = 1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

ویژه-فضا یِ متناظر با ویژه-مقدار ِ 1 دُ-بُعدی ست. برا یِ آن یک پایه یِ متعامد میگیرم:

$$|Q=1,1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

$$|Q=1,2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

و البته دیده میشود همه یِ این بردارها بهنجار نیستند.

$$\langle\psi|\psi\rangle = 2. \tag{8}$$

$$\langle Q=-1|Q=-1\rangle = 2. \tag{9}$$

$$\langle Q=1,1|Q=1,1\rangle = 2. \tag{10}$$

$$\langle Q=1,2|Q=1,2\rangle = 1 \tag{11}$$

همچنین،

$$\langle Q=-1|\psi\rangle = 1. \tag{12}$$

$$\langle Q=1,1|\psi\rangle = 1. \tag{13}$$

$$\langle Q=1,2|\psi\rangle = 1. \tag{14}$$

به این ترتیب،

$$P(Q=-1) = \frac{1}{4}. \tag{15}$$

$$\begin{aligned} P(Q=1) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned} \tag{16}$$

اگر نتیجه یِ سنجش (-1) شد، حالت ِ سیستم پس از سنجش چیست؟ گر نتیجه یِ سنجش 1 شد، حالت ِ سیستم پس از سنجش چیست؟

حالت ِ سیستم پس از سنجش تصویر-شده یِ حالت ِ پیش-از-سنجش بر ویژه-فضا یِ متناظر است. بسط ِ حالت ِ اولیه یِ سیستم بر حسب ِ ویژه-بردارها چنین است.

$$\psi = \frac{1}{2}\,|Q=-1\rangle + \frac{1}{2}\,|Q=1,1\rangle + |Q=1,2\rangle. \tag{17}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ راست تصویر ِ $|\psi\rangle$ بر ویژه-فضا یِ متناظر با ویژه-مقدار ِ (-1)، و مجموع ِ دُ-جمله یِ بعد ِ طرف ِ راست تصویر ِ $|\psi\rangle$ بر ویژه-فضا یِ متناظر با ویژه-مقدار ِ 1 است. پس حالت ِ سیستم پس از سنجش، اگر نتیجه یِ سنجش (-1) باشد

$$\begin{pmatrix} (1/2) \\ (-1/2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

میشود، و اگر نتیجه یِ سنجش 1 باشد

$$\begin{pmatrix} (1/2) \\ (1/2) \\ 1 \end{pmatrix}$$

میشود.