1 سینماتیکِ کوانتمی

سینماتیک به حالتِ سیستم، کمیتها (مشاهد-پذیرها)، و فرایندِ سنجش میپردازد. در کوانتم-مکانیک، حالتِ سیستم با یک بردار در یک فضا یِ برداری یِ مختلط مجهز به ضربِ درونی داده میشود. به چنین-فضا یی یک فضا یِ هیلبرت میگویند.

نکته یِ اول: فضا یِ هیلبرت یک فضا یِ برداری با ضرب-ِ-درونی ست که یک ویژگی یِ دیگر هم دارد. فضا یِ هیلبرت کامل است، به این معنی که اگر u یک دنباله با مقدار در این فضا باشد که $|u_n - u_m|$ وقت یِ m و n به بینهایت میگرایند صفر شود، آن دنباله همگرا ست.

نکته یِ دوم: دسته یِ خاص ی از حالتها هستند که با بردارها یِ فضا یِ هیلبرت متناظر َند. به اینها حالتها یِ خالص میگویند. اما حالتها یِ کلیتر را هم میشود بر مبنا یِ اینها ساخت.

نکته یِ سوم: تناظرِ بینِ حالتها (یِ خالص) و بردارها یِ فضا یِ هیلبرت یک-به-یک نیست. تناظرِ یک-به-یک بینِ حالتها (یِ خالص) و راستاها یِ فضا یِ هیلبرت است. یعنی هم یِ بردارها یی که با هم موازی یَند متناظر با حالت ی یکسان َند.

در کوانتم-مکانیک هر کمیت (مشاهده-پذیر) با یک عملگرِ اِرمیتی در فضا یِ هیلبرت مشخص میشود. سادِتر، میگویند هر کمیت یک عملگر در فضا یِ هیلبرت است. چیز ی که میمانَد این است که اگر حالتِ سیستم $|\psi\rangle$ باشد و کمیتِ Q سنجیده شود، نتیجه چیست. کوانتم-مکانیک میگوید در سنجشِ Q فقط ویژه-مقدارها یِ Q ممکن است به دست آیند. و ویژه-مقدارِ q با احتمالِ $P(Q=q)$ به دست میئاید، که

$$P(Q=q)=\frac{|\langle Q=q|\psi\rangle|^2}{\langle Q=q|Q=q\rangle\;\psi|\psi\rangle}. \tag{1}$$

$|Q=q\rangle$ ویژه-بردارِ Q با ویژه-مقدارِ q است:

$$Q\,|Q=q\rangle = q\,|Q=q\rangle \tag{2}$$

رُشن است که اگر $|Q=q\rangle$ یا $|\psi\rangle$ در یک عدد ضرب شوند، $P(Q=q)$ تغییر نمیکند. و شکلِ $P(Q=q)$ سادِتر میشود اگر $|\psi\rangle$ و $|Q=q\rangle$ بهنجار باشند (طولِ شان یک باشد):

$$P(Q=q)=|\langle Q=q|\psi\rangle|^2. \tag{3}$$

اینها برا یِ وقت ی ست که Q تبهگن نباشد، یعنی ویژه-مقدارها یَ ش تکراری نباشند. اگر Q تبهگن باشد، ممکن است متناظر با یک ویژه-مقدار ِ q بیش از یک ویژه-بردار وجود داشته باشد. این ویژه-بردارها را با یک برچسب ِ اضافی مشخص میکنم:

$$Q\,|Q=q,a\rangle = q\,|Q=q,a\rangle. \tag{4}$$

این ویژه-بردارها را میشود یکه-متعامد کرد:

$$\langle Q=q,a|Q=q,b\rangle = \delta_{a\,b}. \tag{5}$$

در این حالت،

$$P(Q=q) = \sum_a |\langle Q=q,a|\psi\rangle|^2. \tag{6}$$

$P(Q=q)$، برا یِ این که احتمال باشد باید ویژگیها یی داشته باشد. این که نامنفی باشد و این که

$$\sum_q P(Q=q) = 1. \tag{7}$$

نامنفی-بودن ِ $P(Q=q)$ رُشن است، چون $P(Q=q)$ مجذور ِ طول ِ یک عدد ِ مختلط است. برا یِ اثبات ِ ویژگی یِ دوم،

$$\begin{aligned}\sum_q P(Q=q) &= \sum_q \sum_a |\langle Q=q,a|\psi\rangle|^2,\\ &= \sum_q \sum_a \langle\psi|Q=q,a\rangle\,\langle Q=q,a|\psi\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

اما مجموعه یِ $|Q=q,a\rangle$ ها یک پایه است (چون Q اِرمیتی و بنابراین قطری-شدنی ست) و یکه-متعامد است. پس،

$$1 = \sum_q \sum_a |Q=q,a\rangle\,\langle Q=q,a|. \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$\sum_q P(Q=q) = \langle\psi|\psi\rangle. \tag{10}$$

$|\psi\rangle$ بهنجار است. پس (7) نتیجه میشود.

مثال: ماتریس ِ Q (در یک پایه یِ یکه-متعامد) چنین است.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}-\mathrm{i} \\ \sqrt{2}+\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

حالت ِ یک سیستم $|\psi\rangle$ است، و ماتریس ِ $|\psi\rangle$ در هم ان پایه چنین است.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \tag{12}$$

با سنجش ِ Q چه مقدارها یی، و هر کدام با چه احتمال ی به دست میئایند؟ (جواب در ادامه میئاید، اما لطفَن خُد ِ تان حل کنید.)

مقدارها یِ ممکن ویژه-مقدارها یِ Q اند. ویژه-مقدارها یِ Q برابر با (-1) و 3 میشوند. ویژه-بردارها هم چنین میشوند.

$$|Q=-1\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-\mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$|Q=3\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}+\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

البته هر یک از این ویژه-بردارها را میشود در یک عد ِ دلبخاه ضرب کرد. $|\psi\rangle$ و ویژه-بردارها، هیچ کدام بهنجار نیستند:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 4. \tag{15}$$

$$\langle Q=-1|Q=-1\rangle = 4. \tag{16}$$

$$\langle Q=3|Q=3\rangle = 4. \tag{17}$$

همچنین،

$$\langle Q=-1|\psi\rangle = \sqrt{2}-\sqrt{3}+\mathrm{i}. \tag{18}$$

$$\langle Q=3|\psi\rangle = \sqrt{6}+1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}. \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$P(Q=-1)=\frac{3-\sqrt{6}}{8}. \tag{20}$$

$$P(Q=3)=\frac{5+\sqrt{6}}{8}. \tag{21}$$