1 تابع ِ یک عملگر ِ خطی

گیرم T یک عملگر ِ خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ است، که قطری-شدنی ست. متناظر با تابع ِ f، عملگر ِ خطی یِ $f(T)$ را چنین تعریف میکنم که اگر u یک ویژه-بردار ِ T با ویژه-مقدار ِ μ باشد،

$$[f(T)]\,u = [f(\mu)]\,u. \tag{1}$$

چون T قطری-شدنی ست، یک پایه یِ e هست که هر یک از اعضا یَ ش یک ویژه-بردار ِ T است. ویژه-مقدار ِ متناظر با e_i را با μ_i نشان میدهم:

$$T\,e_i = \mu_i\,e_i. \tag{2}$$

به این ترتیب اثر ِ $f(T)$ بر هر یک از اعضا یِ e تعریف شده است:

$$[f(T)]\,e_i = [f(\mu_i)]\,e_i. \tag{3}$$

e یک پایه است. پس هر بردار ِ v را میشود بر حسب ِ آن بسط داد:

$$v = \sum_i v_i\,e_i. \tag{4}$$

به این ترتیب، اثر ِ $f(T)$ بر v چنین میشود.

$$\begin{aligned}[f(T)]\,v &= [f(T)]\,\left(\sum_i v_i\,e_i\right),\\ &= \sum_i v_i\,[f(T)]\,e_i,\\ &= \sum_i v_i\,[f(\mu_i)]\,e_i.\end{aligned} \tag{5}$$

اگر تابع ِ f با یک سری یِ توانی از متغیر َ ش برابر باشد،

$$f(x) = \sum_n a_n x^n, \tag{6}$$

یک راه ِ دیگر برا یِ تعریف ِ $f(T)$ به دست میئاید:

$$f(T) = \sum_n a_n T^n. \tag{7}$$

به سادگی دیده میشود اگر هم f با یک سری یِ توانی برابر باشد، و هم T قطری-شدنی باشد، آنگاه این دُ-روش ِ تعریف ِ $f(T)$ یکسان َند. برا یِ اثبات، گیرم e یک پایه است که هر یک از اعضا یَ ش یک ویژه-بردار ِ T است و (2) برقرار است. از روش ِ دوم ِ تعریف ِ $[f(T)]$ شروع میکنم:

$$\begin{aligned}
[f(T)]\, e_i &= \left(\sum_n a_n T^n\right) e_i, \\
&= \sum_n a_n (\mu_i)^n\, e_i, \\
&= [f(\mu_i)]\, e_i,
\end{aligned} \tag{8}$$

که هم ان (3) است. پس اگر هر-دُ-روش ِ تعریف ممکن باشند، نتیجه یِ حاصل از آنها یکسان است.

تابع ِ نمایی با بسط ِ تیلر َ ش برابر است:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9}$$

به این ترتیب انمایی یِ عملگر ِ خطی یِ T چنین تعریف میشود

$$\exp(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!}. \tag{10}$$

اگر x و y عدد باشند،

$$[\exp(x)]\, [\exp[y)] = \exp(x + y). \tag{11}$$

اما رابطه یِ مشابه، برا یِ عملگرها یِ خطی لزومَن برقرار نیست. برا یِ دیدن ِ این، $[\exp(A)]\, [\exp(B)]$ را (که A و B عملگرها یی خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ اند) را بسط میدهم و بخش ی را در نظر میگیرم که نسبت به A و B (جمعَن) از درجه یِ n است. این را با T_n نشان میدهم:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^{n-k}}{(n-k)!}\, \frac{B^k}{k!}, \tag{12}$$

یا،

$$T_n = \frac{S_n}{n!}, \tag{13}$$

که،

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}\, B^k. \tag{14}$$

اگر A و B با هم جا-به-جا میشدند، آنگاه طرف ِ راست بسط ِ $(A+B)^n$ میبود و نتیجه میشد

$$[\exp(A)]\,[\exp(B)] = \exp(A+B). \tag{15}$$

اما در حالت ِ کلی چنین نیست. مثلَن برا یِ $n=2$،

$$S_2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2. \tag{16}$$

در حال ی که

$$(A+B)^2 = A^2 + A\,B + B\,A + B^2, \tag{17}$$

که تنها زمان ی با S_2 برابر است که A و B با هم جا-به-جا شوند.

خلاصه این که (15) لزومَن برقرار نیست، اما اگر A و B با هم جا-به-جا شوند برقرار است.

به سادِگی دیده میشود (لطفَن نشان دهید)

$$\exp(-T) = [\exp(T)]^{-1}. \tag{18}$$

$$[\exp(T)]^\dagger = \exp(T^\dagger). \tag{19}$$

در واقع کلیتر، اگر f با یک سری یِ توانی برابر باشد و ضریبها یِ این سری حقیقی باشند،

$$[f(T)]^\dagger = f(T^\dagger). \tag{20}$$

از جمله معلوم میشود (لطفَن نشان دهید) اگر H اِرمیتی باشد، $\exp(H)$ هم اِرمیتی ست، و اگر A پادارمیتی باشد، یعنی

$$A^\dagger = -A \tag{21}$$

$\exp(A)$ یکانی ست. پس اگر H اِرمیتی باشد، که در نتیجه $(\mathrm{i}\,H)$ پادارمیتی ست، آنگاه $\exp(\mathrm{i}\,H)$ یکانی ست.

چرا اگر H اِرمیتی باشد $(\mathrm{i}\,H)$ پادارمیتی ست؟