1 بْرا-کِت

یک نمادگذاری هست که در خیل ی از متنها یِ کوانتم-مکانیک به کار میرود. در این نمادگذاری یِ بْرا-کِت، هر بردار با یک کِت نمایش داده میشود: به جا یِ بردار ِ u کِت ِ $|u\rangle$ را به کار میبرند. به جا یِ $g(u,v)$ (حاصل- ِضرب ِ داخلی یِ u در v) هم $\langle u|v\rangle$ را به کار میبرند. این نمادگذاری برا یِ حاصل- ِضرب ِ داخلی از اینجا میئاید که $g(u,v)$ نسبت به v خطی ست. پس میشود آن را به شکل ِ اثر ِ یک عملگر ِ خطی بر v نوشت. البته این عملگر ِ خطی به u وابسته است. آن را با $u^\dagger$ نشان میدهم. به این ترتیب،

$$g(u,v) = u^\dagger\, v. \tag{1}$$

به عملگرها یِ خطی یی که مقدار ِ شان عدد است هم-بردار میگویند. $u^\dagger$ یک هم-بردار است. اگر بردارها با ماتریسها یِ ستونی نمایش داده شوند، نمایش ِ هم-بردارها با ماتریسها یِ سطحی ست.

بستگی یِ $u^\dagger$ به u پادخطی ست. این از اینجا میئاید که بستگی یِ $g(u,v)$ به u پادخطی ست:

$$\begin{aligned}(\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2)^\dagger\, v &= g(\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2, v),\\ &= \overline{\alpha_1}\, g(u_1,v) + \overline{\alpha_2}\, g(u_2,v),\\ &= \overline{\alpha_1}\, u_1^\dagger\, v + \overline{\alpha_2}\, u_2^\dagger\, v,\\ &= (\overline{\alpha_1}\, u_1^\dagger + \overline{\alpha_2}\, u_2^\dagger)\, v.\end{aligned} \tag{2}$$

این رابطه برا یِ هر v برقرار است. پس،

$$(\alpha_1\, u_1 + \alpha_2\, u_2)^\dagger\, v = \overline{\alpha_1}\, u_1^\dagger + \overline{\alpha_2}\, u_2^\dagger. \tag{3}$$

در نمادگذاری یِ بْرا-کِت، $u^\dagger$ را با بْرا یِ $\langle u|$ نشان میدهند. به این ترتیب $g(u,v)$ یا $(u^\dagger\, v)$ را با $\langle u|v\rangle$ نشان میدهند، که ساده-شده یِ $(\langle u|)\,(|v\rangle)$ است.

اثر ِ نماد ِ صلیب ($\dagger$) قبلَن برا یِ عملگرها یِ خطی و حالا برا یِ بردارها تعریف شد. تعریف ِ اثر ِ این نماد را به هم-بردارها و عددها هم گسترش میدهم. متناظر با هم-بردار ِ $\langle u|$ و عدد ِ α، تعریف

میکنم

$$\langle u|^\dagger = |u\rangle. \tag{4}$$

$$\alpha^\dagger = \bar{\alpha}. \tag{5}$$

با این تعریفها، به سادگی دیده میشود X هر چه باشد (عدد، بردار، هم-بردار، عملگر ِ خطی)

$$(X^\dagger)^\dagger = X. \tag{6}$$

همچنین، اگر X و Y چنان باشند که $(X+Y)$ تعریف شده باشد،

$$(X+Y)^\dagger = X^\dagger + Y^\dagger. \tag{7}$$

در واقع کلیتر، اگر α و β عدد باشند،

$$(\alpha\, X + \beta\, Y)^\dagger = \bar{\alpha}\, X^\dagger + \bar{\beta}\, Y^\dagger. \tag{8}$$

سرانجام، دیده میشود اگر X و Y چنان باشند که $(X\,Y)$ تعریف شده باشد،

$$(X\,Y)^\dagger = Y^\dagger\, X^\dagger. \tag{9}$$

اثبات ِ این روابط به فقط نوشتن نیاز دارد. لطفَن این کار را انجام دهید.

$\langle u|$ یک هم-بردار و $|v\rangle$ یک بردار است. $\langle u|v\rangle$ یک عدد است، مثل ِ این که یک ماتریس ِ سطری از چپ در یک ماتریس ِ ستونی ضرب شده باشد. $|v\rangle\langle u|$ مثل ِ ضرب ِ یک ماتریس ِ ستونی از چپ در یک ماتریس ِ سطری ست. چنین-حاصل- ِ-ضرب ی یک ماتریس (عملگر ِ خطی) است. متناظر با بردار ِ $|w\rangle$،

$$(|v\rangle\langle u|)\,|w\rangle = |v\rangle\,(\langle u|w\rangle). \tag{10}$$

این به کار رفته که ضرب ِ کمیتها (عدد، بردار، هم-بردار، عملگر- ِ-خطی) در هم، به شرط ِ خُش-تعریف-بودن، شرکت-پذیر است. به عنوان ِ یک کاربرد ِ ساده، قبلَن به دست آمد اگر e یک پایه یِ یکه-متعامد و u یک بردار باشد،

$$u = \sum_j e_j\, g(e_j, u)]. \tag{11}$$

$g(e_j, u)$ عدد است، پس مهم نیست طرف ِ راست یا چپ ِ بردار ِ e_j نوشته شود. رابطه یِ بالا را با نماد ِ براکت (خط- ِ-فاصله حذف شده) مینویسم:

$$|u\rangle = \sum_j |e_j\rangle\langle e_j|u\rangle,$$
$$= \left(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\right) (|u\rangle. \tag{12}$$

این رابطه برا یِ هر بردار ِ $|u\rangle$ درست است. پس،

$$\sum_j |e_j\rangle\langle e_j| = 1. \tag{13}$$

طرف ِ راست ِ این رابطه عملگر ِ همانی ست. توجه به این نکته مهم است که برابری یِ بالا وقت ی درست است که e یک پایه یِ یکه-متعامد باشد. به عنوان ِ یک کاربرد ِ این رابطه، گیرم T یک عملگر ِ خطی و e یک پایه یِ یکه-متعامد است. در این صورت،

$$T = 1\,T\,1,$$
$$= \left(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j|\right)\ T\ \left(\sum_k |e_k\rangle\langle e_k|\right),$$
$$= \sum_{j,k} |e_j\rangle\,(\langle e_j|T|e_k\rangle)\,\langle e_k, \tag{14}$$

که نتیجه میدهد

$$T = \sum_{j,k} |e_j\rangle\, T_{j\,k}\, \langle e_k. \tag{15}$$

این به کار رفته که اگر e یک پایه یِ یکه-متعامد باشد،

$$T_{j\,k} = g(e_j, T\,e_k), \tag{16}$$

که با نمادگذاری یِ براکت میشود

$$T_{j\,k} = \langle e_j|T|e_k\rangle. \tag{17}$$

قبلَن این رابطه برا یِ تعریف ِ مزدوج ِ اِرمیتی یِ عملگر ِ خطی یِ T به کار رفت.

$$g(u, T^\dagger v) = g(T u, v). \tag{18}$$

با نمادگذاری یِ براکت،

$$\langle u|T^\dagger|v\rangle = (T\,|u\rangle)^\dagger\,|v\rangle. \tag{19}$$

اما این در واقع هم ان است که

$$(T\,|u\rangle)^\dagger = |u\rangle^\dagger\,T^\dagger, \tag{20}$$

یا

$$(T\,|u\rangle)^\dagger = \langle u|T^\dagger. \tag{21}$$

به جا یِ (18) میشود نوشت

$$g(u, T^\dagger v) = \overline{g(v, T u)}, \tag{22}$$

یا،

$$\langle u|T^\dagger|v\rangle = \overline{\langle v|T|u\rangle}. \tag{23}$$

از جمله برا یِ یک پایه یِ e،

$$\langle e_i|T^\dagger|e_j\rangle = \overline{\langle e_j|T|e_i\rangle}, \tag{24}$$

که اگر پایه یکه-متعامد باشد نتیجه میدهد

$$(T^\dagger)_{i\,j} = \overline{(T_{j\,i})}. \tag{25}$$