1 عملگرها یِ اِرمیتی و یکانی

$\mathbb{V}$ یک فضا یِ برداری ست که بر آن ضربِ درونی تعریف شده، و T یک عملگرِ خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ است. مزدوجِ اِرمیتی یِ T را با $T^\dagger$ نشان میدهم و آن را عملگر ی خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ تعریف میکنم که

$$g(u, T^\dagger v) = g(T u, v). \tag{1}$$

از جمله اگر e یک پایه یِ $\mathbb{V}$ باشد،

$$g(e_i, T^\dagger e_j) = g(T e_i, e_j), \tag{2}$$

یا، با نوشتنِ اثرِ عملگرها بر اعضا یِ پایه بر حسبِ عنصرها یِ ماتریسی،

$$\sum_k g_{i\,k}\,(T^\dagger)_{k\,j} = \sum_k g_{k\,j}\,\overline{(T_{k\,i})}. \tag{3}$$

اگر e یکه-متعامد باشد، (2) یا هم-ارز با آن (3) به این شکلِ سادتر در میئاید:

$$(T^\dagger)_{i\,j} = \overline{(T_{j\,i})}. \tag{4}$$

یعنی ماتریسِ $T^\dagger$ به این شکل از ماتریسِ T به دست میئاید که جا یِ سطها و ستونها عوض شود و عنصرها مزدوج-ِ-مختلط شوند. البته لازم است توجه شود که این شکلِ ساده فقط برا یِ یک پایه یِ یکه-متعامد درست است.

میگویند عملگرِ خطی یِ H با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ اِرمیتی ست، اگر

$$H^\dagger = H. \tag{5}$$

میگویند عملگرِ خطی یِ U با دامنه یِ $\mathbb{V}$ و مقدار در $\mathbb{V}$ یکانی ست، اگر

$$U^\dagger = U^{-1}. \tag{6}$$

گیرم $\mathbb{V}$ یک فضا یِ برداری یِ n-بُعدی ست، و H عملگر ی اِرمیتی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است. نشان میدهم $\mathbb{V}$ یک پایه یِ متعامد دارد که اعضا یَ ش ویژه-بردارِ H اند. از اینجا شروع میکنم که چندجملِئی یِ

مشخصه یِ H از درجه یِ n است و حتمَن ریشه دارد. پس H دست- ِ-کم یک ویژه-بردار و یک ویژه-مقدار (متناظر با آن) دارد. اینها را با، به ترتیب، v_1 و μ_1 نشان میدهم:

$$H\,u_1 = \mu_1\,u_1. \tag{7}$$

مجموعه یِ همه یِ بردارها یِ عمود بر u_1 را با $\mathbb{V}_1$ نشان میدهم. این یعنی v در $\mathbb{V}_1$ است، اگر و تنها اگر

$$g(v, u_1) = 0. \tag{8}$$

نشان میدهم اگر v در $\mathbb{V}_1$ باشد، آنگاه $(H\,v)$ هم در $\mathbb{V}_1$ است. برا یِ این، باید نشان دهم $(H\,v)$ بر u_1 عمود است:

$$\begin{aligned}
g(H\,v, u_1) &= g(v, H^\dagger\,u_1),\\
&= g(v, H\,u_1),\\
&= \mu_1\,g(v, u_1),\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

پس $(H\,v)$ بر u_1 عمود است. H_1 را عملگر ی خطی تعریف میکنم که دامنه اَ ش $\mathbb{V}_1$ است و ضابطه اَ ش هم ان ضابطه یِ H. این یعنی اگر v در $\mathbb{V}_1$ باشد،

$$H_1\,v = H\,v. \tag{10}$$

معلوم شد اگر H بر بردار ی در $\mathbb{V}_1$ اثر کند، نتیجه در $\mathbb{V}_1$ است. به این ترتیب H_1 عملگر ی خطی با دامنه یِ $\mathbb{V}_1$ و مقدار در $\mathbb{V}_1$ است، که اگر u و v در دامنه اَ ش $(\mathbb{V}_1)$ باشند،

$$g(H_1\,v, u) = g(v, H_1\,u). \tag{11}$$

این یعنی H_1 اِرمیتی ست. حالا میشود استدلال را برا یِ H_1 تکرار کرد. H_1 یک ویژه-بردار در $\mathbb{V}_1$ دارد. این را با u_2 و ویژه-مقدار ِ متناظر را با μ_2 نشان میدهم. رُشن است که u_2 یک ویژه-بردار ِ H متناظر با ویژه-مقدار ِ μ_2 هم هست. البته mu_2 ممکن است با μ_1 برابر باشد. اما u_2 بر u_1 عمود است.

$\mathbb{V}_2$ را مجموعه یِ بردارها یی در $\mathbb{V}_1$ تعریف میکنم که بر u_2 عمود َند. H_2 را عملگر ی خطی تعریف میکنم که دامنه اَ ش $\mathbb{V}_2$ و ضابطه اَ ش هم ان ضابطه یِ H_1، یا در واقع هم ان ضابطه یِ H، است. H_2 یک ویژه- بردار دارد که آن را با u_3 و ویژه- مقدار ِ متناظر را با μ_3 نشان میدهم. به این ترتیب u_3 یک ویژه- بردار ِ دیگر برا یِ H است، که بر دُ- تا یِ قبلی عمود است. با تکرار ِ این کار، n ویژه- بردار برا یِ H به دست میئاید، که دُ- به- دُ بر هم عمود َند.

هر مجموعه از بردارها یِ ناصفر ِ دُ- به- دُ- عمود- بر- هم خطی- مستقل است. (چرا؟ یک ترکیب ِ خطی از بردارها را صفر بگذارید و یک ی از بردارها را در آن ضرب ِ داخلی کنید.) پس مجوعه یِ حاصل از u_1 تا u_n، که به این ترتیب به دست آمده اند، خطی- مستقل است. تعداد ِ اینها هم برابر با بُعد ِ فضا ست. پس این مجموعه یک پایه است.

گیرم $\mathbb{V}$ یک فضا یِ برداری یِ n- بُعدی ست، و U عملگر ی یکانی با دامنه یِ $\mathbb{V}$ است. به شکل ی مشابه میشود نشان داد $\mathbb{V}$ یک پایه یِ متعامد دارد که اعضا یَ ش ویژه- بردار ِ U اند. تنها- تفاوت این است که به جا یِ (9) باید این را به کار برد.

$$\begin{aligned} g(U\,v, u_1) &= g(v, U^\dagger\,u_1), \\ &= g(v, U^{-1}\,u_1), \\ &= (\mu_1)^{-1}\,g(v, u_1), \\ &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

گیرم μ یک ویژه- بردار ِ عملگر ِ یکانی یِ U است. ویژه- بردار ِ متناظر را با u نشان میدهم. دیده میشود

$$g(U\,u, u) = \bar{\mu}\,g(u, u). \tag{13}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} g(U\,u, u) &= g(u, U^\dagger\,u), \\ &= g(u, U^{-1}\,u), \\ &= \mu^{-1}\,g(u, u). \end{aligned} \tag{14}$$

پس،

$$(\bar{\mu} - \mu^{-1})\, g(u,u) = 0. \tag{15}$$

u ویژه- بردار است. پس صفر نیست. پس $g(u,u)$ صفر نیست. این یعنی

$$\bar{\mu} - \mu^{-1} = 0. \tag{16}$$

یا،

$$\bar{\mu}\,\mu = 1. \tag{17}$$

یعنی طول ِ هر ویژه- مقدار ِ یک عملگر ِ یکانی یک است.

با استدلال ی مشابه میشود نشان داد هر ویژه- مقدار ِ یک عملگر ِ اِرمیتی با مزدوجِ- ِ مختلط َ ش برابر است، یعنی حقیقی ست. (لطفَن این را نشان دهید.)

سرانجام، گیرم u_1 و u_2 دُ- ویژه- بردار ِ عملگر ِ یکاِنی یِ U متناظر با ویژه- مقدارها یِ، به ترتیب، μ_1 و μ_2 اند. دیده میشود

$$g(U\,u_1, u_2) = \overline{\mu_1}\, g(u_1, u_2). \tag{18}$$

همچنین،

$$\begin{aligned} g(U\,u_1, u_2) &= g(u_1, U^{\dagger}\,u_2), \\ &= g(u_1, U^{-1}\,u_2), \\ &= (\mu_2)^{-1}\, g(u_1, u_2). \end{aligned} \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$[(\mu_2)^{-1} - \overline{\mu_1}]\, g(u_1, u_2) = 0. \tag{20}$$

چون μ_2 یک ویژه- مقدار ِ یک عملگر ِ یکانی ست، وارون ِ آن با مزدوج- ِ مختلط َ ش برابر است. نتیجه این که اگر μ_1 و μ_2 برابر نباشند، $g(u_1, u_2)$ صفر است. چیز ی که ثابت شده این است.

دُ ویژه-بردار ِ یک عملگر ِ یکانی متناظر با ویژه-مقدارها یِ متمایز، بر هم عمود َند.

با استدلال ی مشابه (لطفَن این استدلال را انجام دهید) معلوم میشود

دُ ویژه-بردار ِ یک عملگر ِ اِرمیتی متناظر با ویژه-مقدارها یِ متمایز، بر هم عمود َند.

به طُر ِ خلاصه، هر عملگر ِ اِرمیتی یا یکانی در یک فضا یِ باپایان-بُعدی حتمَن قطری-شدنی ست.

در هر حالت، اگر همه یِ ویژه-مقدارها متمایز باشند پایه ای که عملگر در آن قطری ست متعامد است. اگر بعض ی از ویژه-مقدارها تکراری باشند، این پایه را میشود متعامد ساخت. البته رُشن است که پایه یِ متعامد ِ قطری-کننده را میشود یکه-متعامد کرد (هر بردار را بر طول َ ش تقسیم کرد) و نتیجه همچنان یک پایه یِ قطری-کننده (و البته یکه-متعامد) است. همچنین، هر ویژه-مقدار ِ یک عملگر ِ اِرمیتی حقیقی ست، و هر ویژه-مقدار ِ یک عملگر ِ یکانی طول َ ش یک است.