1 ضربِ درونی

گیرم $\mathbb{V}$ یک فضا یِ برداری یِ مختلط است (یعنی عددها یِ متناظر با آن عددها یِ مختلط َند). ضربِ درونی عمل ی ست که به دُ بردار یک عدد نسبت میدهد. حاصل-ِ-ضربِ درونی یِ u در v را با نمادها یِ مختلف ی نشان میدهند. فعلَن این حاصل-ِ-ضرب را با $g(u,v)$ نشان میدهم. ضربِ درونی این ویژِگیها را دارد.

نسبت به بردارِ دوم خطی ست:

$$g(u, \alpha\, v + \beta\, w) = \alpha\, g(u, v) + \beta\, g(u, w). \tag{1}$$

معین-مثبت است: اگر v ناصفر باشد،

$$(\forall\, v \neq 0)\ :\ g(v, v) > 0. \tag{2}$$

با عوض-کردنِ جا یِ بردارها یِ اول و دوم مزدوج-ِ-مختلط میشود:

$$g(v, u) = \overline{g(u, v)}. \tag{3}$$

با استفاده از این و ویژگی یِ اول معلوم میشود حاصل-ِ-ضربِ درونی نسبت به بردارِ اول پادخطی ست:

$$g(\alpha\ + \beta\, w, u) = \bar{\alpha}\, g(v, u) + \bar{\beta}\, g(w, u). \tag{4}$$

وقت ی حاصل-ِ-ضربِ داخلی یِ دُ بردار صفر است، میگویند آن دُ-بردار بر هم عمود َند. با استفاده از حاصل-ِ-ضربِ داخلی $|u|$ (طولِ بردارِ u) را چنین تعریف میکنند:

$$|u| = \sqrt{g(u, u)}. \tag{5}$$

میگویند u یکه است، اگر طولِ u یک باشد. رُشن است که اگر u ناصفر باشد، $(u/|u|)$ یکه است. از معین-مثبت-بودنِ حاصل-ِ-ضربِ داخلی معلوم میشود بردار ی که بر همه یِ بردارها (از جمله خُدِ ش) عمود باشد، صفر است.

گیرم e یک پایه یِ فضا ست. پس u و v را میشود بر حسب ِ آن بسط داد:

$$u = \sum_i u_i\, e_i. \tag{6}$$

$$v = \sum_j v_j\, e_j. \tag{7}$$

از این که حاصل- ِ-ضرب ِ داخلی نسبت به بردار ِ اول پادخطی و نسبت به بردار ِ دوم خطی ست، معلوم میشود

$$g(u, v) = \sum_{i,j} \bar{u}_i\, v_j\, g(e_i, e_j). \tag{8}$$

عنصرها یِ ماتریسی یِ g را با g با دُ شاخص نشان میدهم و آنها را چنین تعریف میکنم.

$$g_{i\,j} = g(e_i, e_j). \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$g(u, v) = \sum_{i,j} g_{i\,j}\, \bar{u}_i\, v_j. \tag{10}$$

میگویم پایه یِ e متعامد است، اگر هر دُ- بردار ِ متمایز ِ آن بر هم عمود باشند، یعنی اگر

$$g_{i\,j} = g_{i\,i}\, \delta_{i\,j}. \tag{11}$$

متناظر با هر پایه یِ e میشود یک پایه یِ متعامد ِ f ساخت. یک راه ِ اثبات ِ این ادعا ساختن ِ مستقیم ِ پایه یِ f است، با روش ی که به آن روش ِ گرام-شْمیت میگویند. روش این است که f_1 را هم ان e_1 میگیرم. f_2 را چنین میگیرم.

$$f_2 = e_2 + \alpha\, f_1. \tag{12}$$

و α را چنان میابم که f_2 بر f_1 عمود باشد:

$$\begin{aligned} 0 &= g(f_1, f_2), \\ &= g(f_1, e_2) + \alpha\, g(f_1, f_1). \end{aligned} \tag{13}$$

پس،

$$\alpha = -\frac{g(f_1, e_2)}{g(f_1, f_1)}. \tag{14}$$

چون f_1 صفر نیست، مخرج ِ این کسر صفر نیست و جواب ی که برا یِ α به دست آمده پذیرفتنی ست.

در ادامه، f_3 را چنین میگیرم.

$$f_3 = e_3 + \beta_1\, f_1 + \beta_2\, f_2, \tag{15}$$

و β_1 و β_2 را چنین میابم که f_3 بر f_1 و f_2 عمود باشد:

$$\begin{aligned} 0 &= g(f_i, f_3), \\ &= g(f_i, e_3) + \beta_i\, g(f_i, f_i), \end{aligned} \tag{16}$$

که i برابر با 1 یا 2 است. پس،

$$\beta_i = -\frac{g(f_i, e_3)}{g(f_i, f_i)}. \tag{17}$$

این کار ادامه میدهم. وقت ی f_1 تا f_k ساخته شده اند، f_{k+1} را چنین میگیرم.

$$f_{k+1} = e_{k+1} + \gamma_1\, f_2 + \cdots + \gamma_k\, f_k. \tag{18}$$

و مشابه با بالا به دست میئاید

$$\gamma_i = -\frac{g(f_i, e_{k+1})}{g(f_i, f_i)}. \tag{19}$$

با یک استقرا یِ ساده معلوم میشود به ازا یِ هر k مجموعه یِ f_1 تا f_k خطی-مستقل است. به این ترتیب f یک پایه است (چون خطی-مستقل است و تعداد ِ اعضا یَش برابر با تعداد ِ اعضا یِ پایه یِ e است).

f یک پایه یِ متعامد است. به سادِگی میشود از رو یِ آن پایه ای (F) ساخت که یکه-متعامد باشد، یعنی متعامد باشد و هر یک از اعضا یَش یکه باشند:

$$F_i = \frac{f_i}{|f_i|}. \tag{20}$$

گیرم e یک پایه یِ یکه-متعامد است (معلوم شد هر فضا یِ خطی یی چنین-پایه ای دارد). این یعنی

$$g(e_i, e_j) = \delta_{i\,j}. \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$g(u, v) = \sum_i \bar{u}_i\, v_i. \tag{22}$$

با چنین-پایه ای محاسبه یِ مئلفِها یِ بردارها و عنصرها یِ ماتریسی سادِتر میشود. برا یِ بردار ِ u

$$u = \sum_i u_i\, e_i. \tag{23}$$

حاصل- ِ-ضرب ِ داخلی یِ e_j در این را حساب میکنم:

$$\begin{aligned} g(e_j, u) &= \sum_i u_i\, g(e_j, e_i), \\ &= \sum_i u_i\, \delta_{i\,j}, \end{aligned} \tag{24}$$

که نتیجه میدهد

$$g(e_j, u) = u_j. \tag{25}$$

پس،

$$u_i = g(e_i, u) \tag{26}$$

(این تکرار ِ هم ان رابطه یِ بالا ست)، و

$$u = \sum_i e_i\, g(e_i, u). \tag{27}$$

متناظر با ماتریس ِ M هم،

$$M\, e_j = \sum_k M_{k\,j}\, e_k, \tag{28}$$

که نتیجه میدهد

$$g(e_i, M\, e_j) = \sum_k M_{k\,j}\, g(e_i, e_k),$$
$$= \sum_k M_{k\,j}\, \delta_{i\,k}. \tag{29}$$

به این ترتیب،

$$M_{i\,j} = g(e_i, M\, e_j). \tag{30}$$

توجه به این تکته مهم است که این روابط برا یِ مئلفِها و عنصرها یِ ماتریسی درست َند اگر پایه یکه-متعامد باشد.