1 نوسانگرِ هماهنگ، II

مسئله یِ ویژه-مقداری برا یِ نوسانگرِ هماهنگ را میشود به روش ی جبری، بدونِ حلِ معادله-یِ-دیفرانسیل، هم حل کرد. همیلتنی یِ نوسانگر-ِ-هاهنگ چنین است.

$$H = \frac{P^2}{2\,m} + \frac{m\,\omega^2\,X^2}{2}, \tag{1}$$

یا،

$$H = \hbar\,\omega\,\left(\frac{P^2}{2\,\hbar\,\omega\,m} + \frac{m\,\omega\,X^2}{2\,\hbar}\right). \tag{2}$$

اگر X و P عدد بودند، طرفِ راست را میشد به حاصل-ِ-ضربِ عاملها یِ درجه-یِ-یک تجزیه کرد:

$$\frac{p^2}{2\,\hbar\,\omega\,m} + \frac{m\,\omega\,x^2}{2\,\hbar} = \left(\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,x - \mathrm{i}\,\frac{p}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega\,m}}\right)\,\left(\sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,x - \mathrm{i}\,\frac{p}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega\,m}}\right). \tag{3}$$

بر اساسِ این تجزیه، عملگرها یِ a و $a^\dagger$ را چنین تعریف میکنم

$$a = \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,X + \mathrm{i}\,\frac{P}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega\,m}}. \tag{4}$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\,\omega}{2\,\hbar}}\,X - \mathrm{i}\,\frac{P}{\sqrt{2\,\hbar\,\omega\,m}}. \tag{5}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} a^\dagger\,a &= \frac{P^2}{2\,\hbar\,\omega\,m} + \frac{m\,\omega\,X^2}{2\,\hbar} + \frac{\mathrm{i}\,[X,P]}{2\,\hbar}, \\ &= \frac{P^2}{2\,\hbar\,\omega\,m} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

پس،

$$H = \hbar\,\omega\,\left(a^\dagger\,a + \frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

به این ترتیب، مسئله یِ قطری-کردنِ H عملَن مسئله یِ قطری-کردنِ $(a^\dagger\,a)$ است.

عملگرِ N را چنین تعریف میکنم.

$$N = a^\dagger\, a. \tag{8}$$

پس،

$$H = \hbar\,\omega\, \left(N + \frac{1}{2}\right). \tag{9}$$

از تعریفِ a و $a^\dagger$، و با استفاده از جا-به-جاگرِ X و P، دیده میشود

$$[a, a^\dagger] = 1. \tag{10}$$

(لطفَن این را خُدِتان هم حساب کنید.) به این ترتیب،

$$\begin{aligned} [N, a] &= [a^\dagger\, a, a], \\ &= [a^\dagger, a]\, a, \end{aligned} \tag{11}$$

که نتیجه میدهد

$$[N, a] = -a. \tag{12}$$

به شکل ی مشابه،

$$[N, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{13}$$

ویژه-بردارِ N متناظر با ویژه-مقدارِ n را با $|N = n\rangle$ نشان میدهم:

$$N\,|N = n\rangle = n\,|N = n\rangle. \tag{14}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} N\,(a\,|N = n\rangle) &= a\,N\,|N = n\rangle + [N, a]\,|N = n\rangle, \\ &= n\,a\,|N = n\rangle - a\,|N = n\rangle. \end{aligned} \tag{15}$$

پس،

$$N\,(a\,|N=n\rangle)=(n-1)\,(a\,|N=n\rangle). \tag{16}$$

این یعنی $(a\,|N=n\rangle)$ ویژه-بردار ِ N متناظر با ویژه-مقدار ِ $(n-1)$ است، البته به شرط ی که $(a\,|N=n\rangle)$ صفر نباشد. پس a ویژه-مقدار ِ متناظر با N را یک ی کم میکند. به شکل ی مشابه دیده میشود

$$N\,(a^\dagger\,|N=n\rangle)=(n+1)\,(a^\dagger\,|N=n\rangle). \tag{17}$$

پس $a^\dagger$ ویژه-مقدار ِ متناظر با N را یک ی زیاد میکند. به هم ین خاطر به a عملگر پایین-بَر، و به $a^\dagger$ عملگر ِ بالا-بَر میگویند.

دیده میشود

$$\langle N=n|N|N=n\rangle=n\,\langle N=n|N=n\rangle. \tag{18}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\langle N=n|N|N=n\rangle&=\langle N=n|a^\dagger\,a|N=n\rangle,\\&=|a|N=n\rangle|^2.\end{aligned} \tag{19}$$

پس،

$$n=\frac{|a|N=n\rangle|^2}{\langle N=n|N=n\rangle}. \tag{20}$$

این نشان میدهد اگر n ویژه-مقدار ِ N باشد، آنگاه n نامنفی ست. ضمنَن نشان میدهد $(a|N=n\rangle)$ فقط وقت ی صفر است که n صفر باشد. پس اگر n ویژه-مقدار ِ N باشد، آنگاه $(n-1)$ هم ویژه-مقدار ِ N است، مگر n صفر باشد. با تکرار ِ این استدلال، و با یک استقرا یِ ساده معلوم میشود اگر n ویژه-مقدار ِ N باشد، آنگاه k هر عدد ِ صحیح ِ مثبتی باشد، $(n-k)$ هم ویژه-مقدار ِ N است، مگر یک عدد ِ صحیح ِ نامنفی k_0 باشد که $(n-k_0)$ صفر شود. در این صورت $(n-k)$ هم ویژه-مقدار ِ N است، به شرط ی که k از k_0 بزرگتر نباشد.

با اینها میشود ثابت کرد اگر n ویژه-مقدار ِ N باشد، آنگاه n صحیح است. برا یِ اثبات، گیرم n ویژه-مقدار ِ N است و صحیح نیست. در این صورت هیچ k_0 ِ صحیح ی نیست که $(n-k_0)$ صفر باشد. پس k هر عدد ِ صحیح ِ مثبتی باشد، $(n-k)$ ویژه-مقدار ِ N است. اما یک عدد ِ صحیح ِ مثبت ِ k هست که $(n-k)$ منفی ست. پس با فرض ِ این که n (که صحیح نیست) یک وژه-مقدار ِ N است، این نتیجه به دست میئاید که N یک ویژه-مقدار ِ منفی دارد. این نتیجه درست نیست. پس این فرض که N یک ویژه-مقدار دارد که صحیح نیست نادرست است.

معلوم شد اگر n ویژه-مقدار ِ N باشد، آنگاه n صحیح است. k_0 ی که به ازا یِ آن $(n-k_0)$ صفر میشود خُد ِ n است. پس n و $(n-1)$ و ...و $(n-n)$ ویژه-مقدار ِ N اند. از جمله 0 ویژه-مقدار ِ N استک یک بردار ِ ناصفر ِ $|N=0\rangle$ هست که

$$N\,|N=0\rangle = 0. \tag{21}$$

به $|N=0\rangle$ حالت ِ پایه میگویند. به استفاده از این میشود بقیه یِ ویژه-بردارها یِ N را ساخت. برا یِ این کار عملگر ِ بالا-بر را متوالیَن بر این بردار اثر میدهم. کافی ست نشان دهم نتیجه هرگز صفر نمیشود. برا یِ نشان-دادن ِ این، $|a^\dagger|N=n\rangle|$ را حساب میکنم:

$$\begin{aligned} |a^\dagger|N=n\rangle|^2 &= \langle N=n|a\,a^\dagger|N=n\rangle,\\ &= \langle N=n|(a^\dagger\,a+1)|N=n\rangle. \end{aligned} \tag{22}$$

پس،

$$|a^\dagger|N=n\rangle|^2 = (n+1)\,\langle N=n|N=n\rangle. \tag{23}$$

n نامنفی ست. پس طرف ِ راست مثبت است. در نتیجه $|a^\dagger|N=n\rangle|$ مثبت است. این نشان میدهد $(a^\dagger|N=n\rangle)$ به ازا یِ هر n ویژه-بردار ِ N است، و البته ویژه-مقدار ِ متناظر $(n+1)$ است.

رابطه یِ (23)، ضمنَن بهنجارش ِ ویژه-بردارها یِ N را تعیین میکند. از این رابطه دیده میشود

$$a^\dagger\,|N=n\rangle = c_n\,\sqrt{n+1}\,|N=n+1\rangle, \tag{24}$$

که c_n ها اعداد ی با طول ِ یک َند. جز این، c_n ها دلبخاه َند. یک انتخاب ِ ساده این است که همه را یک میگیرند. در این صورت،

$$a^\dagger\,|N=n\rangle=\sqrt{n+1}\,|N=n+1\rangle. \tag{25}$$

با n بار استفاده از این رابطه نتیجه میشود

$$|N=n\rangle=\frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|N=0\rangle. \tag{26}$$

از (25)، ضمنَن نتیجه میشود

$$a\,|N=n\rangle=\sqrt{n}\,|N=n-1\rangle. \tag{27}$$

پس هر ویژه-مقدار ِ N یک عدد ِ صحیح ِ نامنفی ست، و هر عدد ِ صحیح ِ نامنفی یی یک ویژه-مقدار ِ N است. رابطه یِ (9) نشان میدهد ویژه-بردارها یِ H هم ان ویژه-بردارها ِ N اند، و

$$H\,|N=n\rangle=\left(n+\frac{1}{2}\right)\,\hbar\omega\,|N=n\rangle. \tag{28}$$

پس ویژه-مقدارها یِ H میشوند

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\,\hbar\omega. \tag{29}$$

این هم ان است که قبلَن با حل ِ معادله-یِ-دیفرانسیل به دست آمد.