## 1 نوسانگرِ هماهنگ

گیرم انرژی-یِ-پتانسیلِ $V$ در نقطه یِ $x_0$ کمینه میشود. پس در این نقطه مشتقِ اولِ انرژی-یِ-پتانسیل صفر است. چون انرژی-یِ-پتانسیل در $x_0$ کمینه است، مشتقِ دومِ انرژی-یِ-پتانسیل در $x_0$ نمیتواند منفی باشد، پس اگر صفر نباشد مثبت است. بسطِ تِیلِرِ انرژی-یِ-پتانسیل اطرافِ $x_0$ میشود

$$V(x) = V(x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \cdots . \tag{1}$$

جمله یِ درجه-یِ-صفر یک ثابت است، که اثرِ مشاهده-پذیر ندارد (افزودنِ یک ثابت به انرژی-یِ-پتانسیل و در نتیجه همیلتنی، فیزیک را عوض نمیکند). اولین جمله یِ نابدیهی جمله یِ درجه-یِ-دِ است. اگر $(x - x_0)$ آن قدر کوچک باشد که جملاتِ با توانِ بیشتر قابل- -چشم-پوشی باشند، انرژی-یِ-پتانسیل عملَن نسبت به $(x - x_0)$ درجه-یِ-دُ میشود. $V(x_0)$ را، که اثرِ مشاهده-پذیر ندارد، کنار میگذارم. مبدئ را هم بر $x_0$ میگذارم (یعنی $x_0$ را صفر میکنم). انرژی-یِ-پتانسیل میشود

$$V(x) = \frac{k\,x^2}{2}, \tag{2}$$

که

$$k = V''(0). \tag{3}$$

به انرژی-یِ-پتانسیل ی به شکلِ (2)، یا (1)، با چشم-پوشی از جملاتِ با توانِ بیش-از-یک، انرژی-یِ-پتانسیلِ نوسانگرِ هماهنگ میگویند.

دیده میشود انرژی-یِ-پتانسیلِ نوسانگرِ هماهنگ شکلِ تقریبی یِ انرژی-یِ-پتانسیل برا یِ مسائلِ گوناگون در نزدیکی یِ نقطه یِ تعادلِ پایدار (جا یی که انرژی-یِ-پتانسیل کمینه میشود) است، پس بسیار عام است. این یک عاملِ اهمیتِ انرژی-یِ-پتانسیلِ نوسانگرِ هماهنگ است. یک عاملِ دیگر این است که حلِ مسئله یِ نوسانگرِ هماهنگ، چه در مکانیکِ کلاسیک و چه در کوانتم-مکانیک، ساده است.

انرژی-یِ-پتانسیلِ نوسانگرِ هماهنگ، در $x$ به سو یِ $(-\infty)$ یا $\infty$ بینهایت میشود. پس انرژی هر قدر هم بزرگ باشد، جاها یِ دور کمتر از انرژی-یِ-پتانسیل است. این نشان میدهد همه یِ

ویژه-بردارها یِ همیلتنی مقید َند. مسئله یِ ویژه-مقداری برا یِ همیلتنی میشود

$$E\,\psi=-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\psi}{\mathrm{d}\,x^2}+\frac{k\,x^2}{2}\,\psi. \tag{4}$$

بُعد ِ $(k/m)$ عکس ِ مجذور ِ بُعد ِ زمان است. $\omega$ را چنین تعریف میکنند.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{5}$$

در واقع $\omega$ هم ان بسامد- ِزاویئی یِ حرکت در مکانیک ِ کلاسیک است. $E$ و $x$ را بر حسب ِ متغیرها یِ بی-بُعد ِ $\varepsilon$ و $y$ مینویسم:

$$E=\hbar\,\omega\,\varepsilon, \tag{6}$$

$$x=\alpha\,y, \tag{7}$$

که

$$\alpha=\sqrt{\frac{\hbar}{m\,\omega}}. \tag{8}$$

معادله یِ ویژه-مقداری میشود

$$\varepsilon\,\psi=\frac{1}{2}\,\left(-\frac{\mathrm{d}^2\,\psi}{\mathrm{d}\,y^2}+y^2\,\psi\right). \tag{9}$$

این یک معادله یِ دیفرانسیل است، با این شرط ِ مرزی که $\psi$ در $y$ به سو یِ $(\pm\infty)$ بینهایت نشود. وقت یِ $y$ بزرگ میشود، $\varepsilon$ در برابر ِ $y^2$ قابل- ِچشم-پوشی ست. پس معادله چنین میشود

$$0\approx-\frac{\mathrm{d}^2\,\psi}{\mathrm{d}\,y^2}+y^2\,\psi. \tag{10}$$

$\phi$ را چنین تعریف میکنم.

$$\psi=\exp(\phi). \tag{11}$$

معادله، بر حسب ِ $\phi$، چنین میشود

$$0\approx-\left(\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,y}\right)^2-\frac{\mathrm{d}^2\,\phi}{\mathrm{d}\,y^2}+y^2. \tag{12}$$

ببینیم در $y$ ها یِ بزرگ کدام یک از جملات ِ اول یا دوم مهمتر است. اگر جمله یِ اول مهمتر باشد، مشتق ِ اول ِ $\phi$ متناسب با $y$ میشود. پس مشتق ِ دوم ِ $\phi$ ثابت میشود. این با این که جمله یِ اول مهمتر از جمله یِ دوم است سازگار است. اگر جمله یِ دوم مهمتر باشد، مشتق ِ دوم ِ $\phi$ متناسب با $y^2$ میشود. پس مشتق ِ اول ِ $\phi$ متناسب با $y^3$ و در نتیجه جمله یِ اول متناسب با $y^6$ میشود. این با این که جمله یِ دوم مهمتر از جمله یِ اول است سازگار نیست. نتیجه این که در $y$ ها یِ بزرگ جمله یِ اول مهمتر است و معادله میشود

$$0 \approx -\left(\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,y}\right)^2 + y^2. \tag{13}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,\phi}{\mathrm{d}\,y} \approx \pm y. \tag{14}$$

$$\phi \approx \pm\frac{y^2}{2}. \tag{15}$$

قرار است $[\exp(\phi)]$ در $y$ به سو یِ $(\pm\infty)$ محدود بماند. پس در $(15)$ علامت ِ پذیرفتنی $-$ است:

$$\phi \approx -\frac{y^2}{2}. \tag{16}$$

یا،

$$\psi \approx \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \tag{17}$$

این رفتار ِ جواب برا یِ $y$ ها یِ بزرگ است. بر اساس ِ این رفتار ِ حدی، متغیر ِ $\chi$ را چنین وارد میکنم.

$$\psi = \chi\,\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \tag{18}$$

معادله بر حسب ِ $\chi$ میشود

$$\varepsilon\,\chi = \frac{1}{2}\,\left(-\frac{\mathrm{d}^2\,\chi}{\mathrm{d}\,y^2} + 2\,y\,\frac{\mathrm{d}\,\chi}{\mathrm{d}\,y} + \chi\right), \tag{19}$$

یا

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2\,\chi}{\mathrm{d}\,y^2} - 2\,y\,\frac{\mathrm{d}\,\chi}{\mathrm{d}\,y} + (2\,\varepsilon - 1)\,\chi. \tag{20}$$

برا یِ حل ِ این معادله، $\chi$ را به شکل ِ یک سری یِ توانی مینویسم:

$$\chi = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\,y^j. \tag{21}$$

پس،

$$\frac{\mathrm{d}\,\chi}{\mathrm{d}\,y} = \sum_{j=0}^{\infty} j\,c_j\,y^{j-1}. \tag{22}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\chi}{\mathrm{d}\,y^2} = \sum_{j=0}^{\infty} j\,(j-1)\,c_j\,y^{j-2}. \tag{23}$$

رابطه یِ $(20)$ میشود

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} j\,(j-1)\,c_j\,y^{j-2} - 2\,\sum_{j=0}^{\infty} j\,c_j\,y^j + (2\,\varepsilon - 1)\,\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,y^j. \tag{24}$$

در سری یِ اول، $(j-2)$ را با $k$ جایگزین میکنم:

$$0 = \sum_{k=-2}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\,c_{k+2}\,y^k - 2\,\sum_{j=0}^{\infty} j\,c_j\,y^j + (2\,\varepsilon - 1)\,\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,y^j. \tag{25}$$

جملات ِ متناظر با $(k = -2)$ و $(k = -1)$ در سری یِ اول صفر َند، پس حد ِ پایین ِ $k$ در این سری را میشود $0$ گذاشت. همچنین، $k$ شاخص ِ جمع-بندی ست. پس میشود اسم َش را عوض کرد. اسم ِ $k$ در سری یِ اول را عوض میکنم و $j$ میگذارم. به این ترتیب،

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty}(j+2)\,(j+1)\,c_{j+2}\,y^j - 2\,\sum_{j=0}^{\infty} j\,c_j\,y^j + (2\,\varepsilon - 1)\,\sum_{j=0}^{\infty} c_j\,y^j. \tag{26}$$

این تساوی برقرار است، اگر و تنها اگر در طرف ِ راست ضریب ِ همه یِ $y^j$ ها صفر باشد:

$$0 = (j+2)\,(j+1)\,c_{j+2} + (2\,\varepsilon - 2\,j - 1)\,c_j. \tag{27}$$

این یک رابطه یِ بازگشتی ست که $c_{j+2}$ را بر حسب ِ $c_j$ میدهد:

$$c_{j+2} = \frac{1 + 2\,j - 2\,\varepsilon}{(j+2)\,(j+1)}\,c_j. \tag{28}$$

به این ترتیب، همه یِ $c_j$ ها یِ با $j$ ِ زُج بر حسب ِ $c_0$، و همه یِ $c_j$ ها یِ با $j$ ِ فرد بر حسب ِ $c_1$ به دست میئایند.

همچنان این شرط مانده که $\psi$ در $y$ به سو یِ $(\pm\infty)$ محدود بماند. بخشها یِ زُج و فرد ِ $\chi$ (نسبت به $y$) را با، به ترتیب، $\chi_{\mathrm{e}}$ و $\chi_{\mathrm{o}}$ نشان میدهم:

$$\chi_{\mathrm{e}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2\,k}\,y^{2\,k}. \tag{29}$$

$$\chi_{\mathrm{o}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2\,k+1}\,y^{2\,k+1}. \tag{30}$$

نسبت ِ دُ جمله یِ متوالی در سری یِ متناظر با $\chi_{\mathrm{e}}$ چنین است.

$$\frac{c_{2\,k+2}\,y^{2\,k+2}}{c_{2\,k}\,y^{2\,k+2}} = \frac{1 + 4\,k - 2\,\varepsilon}{(2\,k+2)\,(2\,k+1)}\,y^2, \tag{31}$$

که برا یِ $k$ ها یِ بزرگ میشود

$$\frac{c_{2\,k+2}\,y^{2\,k+2}}{c_{2\,k}\,y^{2\,k+2}} \sim \frac{y^2}{k}. \tag{32}$$

این مشابه ِ چیز ی ست که در سری یِ تابع ِ نمایی دیده میشود:

$$\exp(z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k\,z^k, \tag{33}$$

که

$$d_k = \frac{1}{k!}. \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\frac{d_{k+1}\,z^{k+1}}{d_k\,z^k} &= \frac{z}{k+1},\\ &\sim \frac{z}{k}.\end{aligned} \tag{35}$$

از این مقایسه نتیجه میشود رفتار ِ $\chi_{\rm e}$ برا یِ $y$ ها یِ بزرگ چنین است.

$$\chi_{\rm e} \sim \exp(y^2). \tag{36}$$

با استدلال ی مشابه معلوم میشود فتار ِ $\chi_{\rm o}$ برا یِ $y$ ها یِ بزرگ هم چنین است.

$$\chi_{\rm o} \sim \exp(y^2). \tag{37}$$

اینها، همراه با (18)، نتیجه میدهند رفتار ِ $\psi$ برا یِ $y$ ها یِ بزرگ چنین است.

$$\psi \sim \exp\left(\frac{y^2}{2}\right). \tag{38}$$

اما این یعنی $\psi$ در $y$ به سو یِ $(\pm\infty)$ بینهایت میشود. تنها حالت ی که ممکن است چنین نشود این است که (36) و (37) نقض شوند. این هم فقط زمان یِ رخ میدهد که (31) (و مانسته یِ آن برا یِ $\chi_{\rm o}$) نقض شود. اما (31) هم ان (28) است، مگر مخرج ِ طرف ِ چپ صفر شود، که در این صورت کسر ِ طرف- ِ-چپ بی-معنی ست. (28) درست است. پس (31) (و مانسته یِ آن برا یِ $\chi_{\rm o}$) نقض میشوند، اگر و تنها اگر $c_j$ ها از جا یی به بعد صفر شوند.

اگر $c_0$ و $c_1$ هر-دُ صفر شوند، البته همه یِ $c_j$ ها صفر میشوند. اما در آن صورت خُد ِ $\psi$ هم صفر میشود و ویژه-بردار نیست. پس باید یک $n$ باشد که $c_n$ ناصفر است و $c_j$ ها یِ با $(j>n)$ صفر َند. از (28) دیده میشود شرط ِ لازم برا یِ این که چنین شود این است که

$$0 = 1 + 2\,n - 2\,\varepsilon, \tag{39}$$

که یعنی

$$\varepsilon = n + \frac{1}{2}. \tag{40}$$

اما این شرط کافی نیست. این شرط تضمین میکند $c_j$ ها یِ با $(j>n)$، اگر $(j-n)$ زُج باشد صفر َند. اگر $n$ زُج باشد، این یعنی $c_j$ ها یِ با $j$ ِ زُج و $(j>n)$ صفر َند. بقیه یِ $c_j$ ها یِ با $(j>n)$ هم صفر َند، اگر $c_1$ صفر باشد، که در این صورت همه یِ $c_j$ ها یِ با $j$ ِ فرد صفر َند. به شکل ی مشابه، دیده میشود اگر (39) با یک $n$ فرد برقرار باشد، باید علاوه بر آن $c_0$ هم صفر باشد.

نتیجه این که جواب ِ معادله ی ِ ویژه- مقداری این است که $\varepsilon$ به شکل ِ (40) است، و اگر $n$ زُج (فرد) باشد، $\psi$ یک چندجملِئی ی ِ زُج (فرد) از درجه ی ِ $n$ ضرب در $[\exp(-y^2/2)]$ است. (40) میشود

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega. \tag{41}$$

این هم ان شرط ِ کوانتش ِ انرژی برا ی ِ نوسانگر ِ هماهنگ است.