1 ذره در یک بُعد، پراکنش

مسئله یِ پراکنش این است که یک ذره در جاها یِ دور آزاد است (انرژی-یِ-پتانسیل ثابت است) و وقت ی به جاها یی میرسید که انرژی-یِ-پتانسیل به مکان بستگی دارد (یعنی یک نیرو به ذره وارد میشود) سرعت ِ ذره تغییر میکند. از پایستگی یِ انرژی نتیجه میشود وقت ی ذره باز هم دور شود (به شرط ی که انرژی-یِ-پتانسیل در بینهایت به یک ثابت بگراید) اندازه یِ سرعت ِ ذره هم ان مقدار ِ اولیه است. فقط جهت ِ ذره ممکن است عوض شده باشد.

در یک-بُعد، فقط دُ جهت برا یِ سرعت است. پس در یک بُعد، ذره ممکن است در هم ان جهت ِ اولیه حرکت کند، یا برگردد. نتیجه یِ مکانیک ِ کلاسیک این است که اگر انرژی یِ ذره از همه یِ مقدارها یِ انرژی-یِ-پتانسیل بیشتر باشد، ذره برنمیگردد. اگر جاها یی باشند که انرژی-یِ-پتانسیل بیش از انرژی یِ ذره باشد، ذره برمیگردد.

با یک مثال ِ ساده شروع میکنم. انرژی-یِ-پتانسیل تکِئی-ثابت است:

$$V(x) = 0, \qquad x < 0. \tag{1}$$

$$V(x) = V_0, \qquad x > 0. \tag{2}$$

جرم ِ ذره را با m نشان میدهم. معادله یِ ویژه-مقداری برا یِ انرژی چنین میشود.

$$E\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\psi}{\mathrm{d}\,x^2}, \qquad x < 0. \tag{3}$$

$$(E - V_0)\,\psi = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\psi}{\mathrm{d}\,x^2}, \qquad x > 0. \tag{4}$$

k و k' را چنین تعریف میکنم.

$$k = \sqrt{\frac{2\,m\,E}{\hbar^2}}. \tag{5}$$

$$k' = \sqrt{\frac{2\,m\,(E - V_0)}{\hbar^2}}. \tag{6}$$

به این ترتیب،

$$\psi(x) = A\, \exp(\mathrm{i}\, k\, x) + B\, \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), \qquad x < 0. \tag{7}$$

$$\psi(x) = A'\, \exp(\mathrm{i}\, k'\, x) + B'\, \exp(-\mathrm{i}\, k'\, x), \quad x > 0. \tag{8}$$

E را مثبت گرفته اَم. پس k حقیقی و مثبت است. اما بر $(E - V_0)$ فرض ی نگذاشته ام: k' ممکن است مُهومی باشد. پیوستگی یِ ψ و مشتق ِ آن در $(x = 0)$ نتیجه میدهند

$$A + B = A' + B'. \tag{9}$$

$$k\,(A - B) = k'\,(A' - B'). \tag{10}$$

و از اینها نتیجه میشود

$$A = \frac{1}{2}\,\left[\left(1 + \frac{k'}{k}\right)\, A' + \left(1 - \frac{k'}{k}\right)\, B'\right]. \tag{11}$$

$$B = \frac{1}{2}\,\left[\left(1 - \frac{k'}{k}\right)\, A' + \left(1 + \frac{k'}{k}\right)\, B'\right]. \tag{12}$$

وضعیت ی را در نظر میگیرم که یک جریان از ذرات، از چپ به این پله یِ انرژی-یِ-پتانسیل میخُرَد. یعنی از راست ذره ای به سو یِ این پله نمیئاید. پس در $(x > 0)$ مُج ِ چپ-رُ ی نیست:

$$B' = 0. \tag{13}$$

این روابط ِ بین ِ ضریبها را ساده میکند:

$$A' = \frac{2\,k}{k + k'}\, A. \tag{14}$$

$$B = \frac{k - k'}{k + k'}\, A. \tag{15}$$

جریانها یِ متناظر با مُجها یِ چپ-رُ و راست-رُ در $(x < 0)$ را با، به ترتیب، J_+ و J_-، و جریان ِ

مُج ِ راست-رُ در $(x > 0)$ را با J' نشان میدهم:

$$J_+ = \frac{\hbar\, k}{m}\, |A|^2. \tag{16}$$

$$J_- = -\frac{\hbar\, k}{m}\, |B|^2. \tag{17}$$

$$J' = \frac{\hbar\, k'}{m}\, |A'|^2, \qquad k'^2 > 0. \tag{18}$$

$$J' = 0, \qquad\qquad k'^2 < 0. \tag{19}$$

لطفَن اینها را به دست آورید. به ویژه به این توجه کنید که اگر k' مُهومی باشد، $(\mathrm{i}\, k')$ حقیقی ست، پس

$$\overline{\exp(\mathrm{i}\, k'\, x)} = \exp(\mathrm{i}\, k'\, x), \quad k'^2 < 0. \tag{20}$$

هم ین است که باعث میشود اگر k' مُهومی باشد جریان در $(x > 0)$ صفر شود.

اگر k' مُهومی باشد،

$$|k - k'| = |k + k'|. \tag{21}$$

یاد ِ تان هست که k حقیقی ست. پس اگر k' مُهومی باشد،

$$|B|^2 = |A|^2. \tag{22}$$

$$J_- = -J_+. \tag{23}$$

اگر k' مُهومی باشد، هم ان جریان از ذرات که از چپ به سو یِ پله میرفت، برمیگردد، و در طرف ِ راست هم جریان ی نیست. از جمله دیده میشود

$$J_+ + J_- = J'. \tag{24}$$

این پیوستگی یِ جریان (بدون ِ انباشته-شدن ِ ذرات) است: هر چه از چپ میئاید، یا باید برگردد یا به راست برود. وقت ی k' مُهومی باشد، همه یِ جریان برمیگردد.

اگر k' حقیقی باشد،

$$J_- = -\frac{(k - k')^2}{(k + k')^2}\, J_+. \tag{25}$$

$$J' = \frac{k'}{k}\, \frac{4\, k^2}{(k + k')^2}\, J_+. \tag{26}$$

لطفَن اینها را به دست آورید. دیده میشود

$$J' - J_- = J_+. \tag{27}$$

پس اینجا هم (24) برقرار است. اما اینجا بخش ی از جریان هم به راست میرود. T و R (ضرایب ِ عبور و بازگشت) را چنین تعریف میکنند.

$$J' = T\, J_+. \tag{28}$$

$$J_- = -R\, J_+. \tag{29}$$

رابطه یِ (24) یا (27) میشود.

$$T + R = 1. \tag{30}$$

بعض ی جاها $(-J_-)$ را جریان ِ مُج ِ چپ-رُ تعریف میکنند، به جا یِ J_- با قدر- ِ-مطلق ِ آن کار میکنند. بعض ی جاها هم ضریبها یِ عبور و بازگشت ِ را به شکل ِ نسبت ِ دامنِها (نَ نسبت ِ جریانها) تعریف میکنند.

وضعیت ی که k' مُهومی ست، به نتیجه ای مینجامد که با آن چه از مکانیک ِ کلاسیک میئاید میخانَد: در این وضعیت E از V_0 کوچکتر است. پس ذرات برمیگردند. ذرات انرژی یِ کافی برا یِ این که از پله بالا بروند ندارند.

اما وضعیت ی که k' مُهومی ست به نتیجه ای مینجامد که با مکانیک ِ کلاسیک نمیخانَد: انرژی یِ هر ذره از انرژی-یِ-پتانسیل در طرف ِ راست بیشتر است. پس مکانیک ِ کلاسیک میگوید ذرات نباید برگردند. اما نتیجه ای که اینجا به دست آمده این نیست. بخش ی از جریان برمیگردد. حتا اگر V_0 منفی باشد، که انرژی-یِ-جنبشی یِ ذرات در طرف ِ راست بیشتر شود، باز هم بخش ی از ذرات برمیگردند. اما میشود دید در حد ی که انرژی یِ ذرات ِ فرودی به بینهایت میگراید، ضریب ِ بازگشت به صفر میگراید. این از آنجا میئاید که

$$\lim_{E\to\infty} \frac{k'}{k} = 1. \tag{31}$$

در این حد نتیجه هم ان است که در مکانیک ِ کلاسیک انتظار میرود: ذرات برنمیگردند.

وقت ی k' مُهومی ست، همه یِ جریان ی که از چپ میئامد برمیگردد. این با مکانیک ِ کلاسیک میخانَد. اما اینجا هم یک چیز ِ ناکلاسیک هست: در $(x > 0)$ تابع- ِ-مُج صفر نیست، هر چند جریان صفر است.

این که در ناحیه یِ کلاسیکی- ممنوع (آنجا که انرژی- یِ- پتانسیل بیشتر از انرژی ست) چگالی یِ ذرات ناصفر است، با یک تغییر در مسئله به یک نتیجه یِ مشاهده- پذیر مینجامد (که طبعَن با مکانیک ِ کلاسیک نمیخانَد). گیرم انرژی- یِ- پتانسیل چنین است.

$$V(x) = 0, \qquad x < 0. \tag{32}$$

$$V(x) = V_0, \qquad 0 < x < a. \tag{33}$$

$$V(x) = 0, \qquad x > a. \tag{34}$$

مشابه با مثال ِ قبل، جواب ِ مسئله یِ ویژه- مقداری برا یِ انرژی میشود

$$\psi(x) = A\, \exp(\mathrm{i}\, k\, x) + B\, \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), \qquad x < 0. \tag{35}$$

$$\psi(x) = A'\, \exp(\mathrm{i}\, k'\, x) + B'\, \exp(-\mathrm{i}\, k'\, x), \quad 0 < x < a. \tag{36}$$

$$\psi(x) = A''\, \exp(\mathrm{i}\, k\, x) + B''\, \exp(-\mathrm{i}\, k\, x), \qquad x > a. \tag{37}$$

اینجا هم اگر یک دسته ذره از چپ بیایند، در $(x > a)$ فقط یک مُج ِ راست-رُ هست. یعنی B'' صفر است. به این ترتیب روابط ِ پیوستگی هم میشوند

$$A + B = A' + B'. \tag{38}$$

$$k\,(A - B) = k'\,(A' - B'). \tag{39}$$

$$A'\, \exp(\mathrm{i}\, k'\, a) + B'\, \exp(-\mathrm{i}\, k'\, a) = A''\, \exp(\mathrm{i}\, k\, a). \tag{40}$$

$$k'\,[A'\, \exp(\mathrm{i}\, k'\, a) - B'\, \exp(-\mathrm{i}\, k'\, a)] = k\, A''\, \exp(\mathrm{i}\, k\, a). \tag{41}$$

از اینها نتیجه میشود

$$A = \frac{1}{4}\left\{2\left[\exp(\mathrm{i}\,k'\,a) + \exp(-\mathrm{i}\,k'\,a)\right] - \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)\left[\exp(\mathrm{i}\,k'\,a) - \exp(-\mathrm{i}\,k'\,a)\right]\right\}$$
$$\times A''\,\exp(\mathrm{i}\,k\,a). \tag{42}$$

$$B = \frac{1}{4}\left(\frac{k'}{k} - \frac{k}{k'}\right)\left[\exp(\mathrm{i}\,k'\,a) - \exp(-\mathrm{i}\,k'\,a)\right] A''\,\exp(\mathrm{i}\,k\,a). \tag{43}$$

در این مثال، چون عدد- ِ-مُج در $(x > a)$ هم ان k است،

$$J'' = \frac{\hbar\,k}{m}\,|A''|^2, \tag{44}$$

که J'' جریان ِ ذرات در $(x > a)$ است. (16) و (17) برا یِ جریانها یِ راست-رُ و چپ-رُ در $(x < 0)$ همچنان برقرار َند. البته رابطه یِ B با A عوض شده است. دیده میشود

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}. \tag{45}$$

$$T = \frac{|A''|^2}{|A|^2}. \tag{46}$$

k حقیقی ست. پس $|\exp(\mathrm{i}\,k\,a)|$ یک است. که یعنی $[\exp(\mathrm{i}\,k\,a)]$ در T اثر ی ندارد. ضریب ِ عبور صفر نیست، حتا اگر k' مُهومی باشد، یعنی E از V_0 کمتر باشد: ذرات میتواند از جاها یی که مکانیک- ِ-کلاسیک میگویند نباید باشند بگذرند. به این پدیده تونل-زنی میگویند. شکل ِ R در یک حالت ِ حدی ساده میشود. اگر k' مُهومی باشد و $|k'\,a|$ خیل ی بزرگتر از یک باشد، $(-\mathrm{i}\,k'\,a)$ یک عدد ِ مثبت ِ بزرگ میشود. در این حالت میشود در (42) از یک نمایی در برابر ِ نمایی یِ دیگر چشم پوشید:

$$A \approx \frac{1}{4}\left(2 + \frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)\left[\exp(-\mathrm{i}\,k'\,a)\right] A''\,\exp(\mathrm{i}\,k\,a). \tag{47}$$

دیده میشود

$$k' = \frac{\mathrm{i}\,\sqrt{2\,m\,(V_0 - E)}}{\hbar}. \tag{48}$$

از اینجا،

$$T \approx N\,\exp\left[-\frac{2\,\sqrt{2\,m\,(V_0 - E)}\,a}{\hbar}\right]. \tag{49}$$

N از ضریبِ نماییها در (47) میئاید، اما تابعِ نمایی در (49) بسیار تندتغییر است، پس اثرِ آن مهمتر است. ذرات تونل میزنند، اما نَ همه یِ آنها. اینجا T احتمالِ تونل-زنی ست. دیده میشود اگر ارتفاعِ سد زیاد باشد، یعنی $(V_0 - E)$ بزرگ باشد؛ جرمِ ذره زیاد باشد؛ یا پهنا یِ سد زیاد باشد، یعنی a بزرگ باشد؛ احتمالِ تونل-زنی کم میشود. در نمایی نسبتِ یک عبارت به $\hbar$ ظاهر شده. بزرگی یا کوچکی یِ صورت (که به ارتفاعِ سد، پنها یِ سد، و جرمِ ذره بستگی دارد) در مقایسه با $\hbar$ است که معنی دارد. وقت ی صورت خیل ی بزرگتر از $\hbar$ است، عملَن تونل-زنی در کار نیست و نتیجه هم ان است که مکانیکِ کلاسیک میگویند. میگویند آثارِ کوانتمی زمان ی مهم میشوند که $\hbar$ از کمیتِ هم-بُعدِ متناظر با آن خیلی کوچکتر نباشد.

در حالتِ کلی ضریبِ بازگشت صفر نیست. بخش ی از ذرات برمیگردند، حتا اگر انرژی-یِ پتانسیل همه-جا کمتر از انرژی باشد. اما در این وضعیت هم (که E از V_0 بزرگتر است) یک پدیده یِ جالب رخ میدهد: در حالتها یی ضریب-ِ-بازگشت صفر میشود. یعنی ذرات سد (یا خندق) را نمیبینند. از (43) معلوم است که این زمان ی رخ میدهد که

$$\exp(2\,\mathrm{i}\,k'\,a) = 1, \tag{50}$$

یعنی

$$k'\,a = n\,\pi, \tag{51}$$

که n یک عددِ صحیح است. رُشن است که این پدیده فقط وقت ی ممکن است رخ بدهد که k' حقیقی باشد: اگر ناحیه یِ کلاسیکی-ممنوع وجود داشته باشد، حتمَن بخش ی از جریان برمیگردد.