1 ذره یِ آزاد

ذره یِ آزاد ذره ای ست که به آن نیرو وارد نمیشود. رابطه یِ $\boldsymbol{F}$ (نیرو) با V (انرژی یِ پتانسیل) این است.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\, V. \tag{1}$$

پس اگر نیرو صفر باشد، انرژی-یِ-پتانسیل ثابت است. افزودن ِ یک مقدار ِ ثابت به انرژی-یِ-پتانسیل (جا-به-جا-کردن ِ صفر ِ انرژی-یِ-پتانسیل) مسئله را عوض نمیکند. پس، از جمله، میشود انرژی-یِ-پتانسیل ِ متناظر با یک ذره یِ آزاد را صفر گرفت. چنین میکنم. پس میشود گفت ذره یِ آزاد ذره ای ست که در انرژی-یِ-پتانسیل ِ صفر حرکت میکند: همیلتنی یِ یک ذره یِ آزاد به جرم ِ m چنین است.

$$H = \frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}}{2\,m}. \tag{2}$$

چون همیلتنی تابع ِ تکانه است، ویژه-بردارها یِ تکانه ویژه-بردار ِ همیلتنی هم هستند:

$$H\,|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}\rangle = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}}{2\,m}\,|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}\rangle. \tag{3}$$

البته ویژه-بردارها یِ تکانه بهنجار-شدنی نیستند. طول ِ شان محدود نیست:

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}\rangle &= \int \mathrm{d}^n\, r\,\langle \boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}|\boldsymbol{r}\rangle\,\langle \boldsymbol{r}|\boldsymbol{P}=\boldsymbol{p}\rangle,\\ &= \int \mathrm{d}^n\, r\,\frac{1}{h^n}\end{aligned} \tag{4}$$

که نشان میدهد مجذور- ِ-طول ِ ویژه-بردارها یِ تکانه بینهایت است. این یعنی ویژه-بردارها یِ تکانه (و در نتیجه ویژه-بردارها یِ همیلتنی یِ ذره-یِ-آزاد) واقعَن در فضا-یِ-هیلبرت نیستند و نمیتوانند حالت ِ یک ذره باشند. اما با این ویژه-بردارها میشود جریان ی از ذرات را تُصیف کرد. قبلَن معلوم شد اگر

$$\psi(\boldsymbol{r}) = c\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}), \tag{5}$$

که c و $\boldsymbol{k}$ ثابت َند، چگالی یِ احتمال و چگالی-یِ-جریان ِ احتمال میشوند

$$\rho = |c|^2. \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \frac{\hbar\,\boldsymbol{k}}{m}\,|c|^2, \\ &= \frac{\boldsymbol{p}}{m}\,\rho. \end{aligned} \tag{7}$$

یا

$$\boldsymbol{J} = \rho\,\boldsymbol{v}, \tag{8}$$

که

$$\boldsymbol{p} = \hbar\,\boldsymbol{k}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p}}{m}. \tag{10}$$

این تابع- ِ-مُج ذرات ی را تُصیف میکند که همه یِ فضا را با یک چگالی یِ یکنواخت پر کرده اند و با سرعت ِ $\boldsymbol{v}$ حرکت میکنند.

حالت ِ یک ذره با یک بردار در فضا-یِ-هیلبِرت تُصیف میشود، که از جمله یعنی طول ِ این بردار محدود است. پس میشود این بردار را یکه کرد. بردار- ِ-حالت ِ یکه-شده را با $|\psi(t)\rangle$ نشان میدهم. با معلوم-بودن ِ این بردار، از جمله میشود میانگین ِ (مقدار- ِ-چشمداشتی یِ) مشاهده-پذیرها را به دست آورد:

$$\langle Q\rangle(t) = \langle\psi(t)|\,Q\,|\psi(t)\rangle. \tag{11}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\,\langle Q\rangle}{\mathrm{d}\,t} &= \langle\psi(t)|\,Q\,H\,|\psi(t)\rangle - \langle\psi(t)|\,H\,Q\,|\psi(t)\rangle, \\ &= \langle\psi(t)|\,[Q,H]\,|\psi(t)\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

این رابطه خاص ِ ذره-یِ-آزاد نیست، چون در رسیدن به آن از شکل ِ همیلتنی استفاده نشده. برا یِ ذره یِ آزاد، همیلتنی تابع ِ فقط تکانه است. پس جا-به-جا-گر ِ همیلتنی با هر تابع از تکانه صفر است. در نتیجه،

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle f(\boldsymbol{P})\rangle}{\mathrm{d}\,t}=0. \tag{13}$$

جاه-به-جاگر ِ مشاهده-پذیرها یِ دیگر با همیلتنی یِ ذره-یِ-آزاد را میشود با استفاده از رابطه یِ زیر حساب کرد.

$$[A, B\,C]=B\,[A,C]+[A,B]\,C. \tag{14}$$

(لطفَن این را ثابت کنید.) پس،

$$[Q,\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}]=\sum_j(P_j\,[Q,P_j]+[Q,P_j]\,P_j). \tag{15}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}[(R_j)^l,P_j]&=[R_j,P_j]\,(R_j)^{l-1}+R_j\,[R_j,P_j]\,(R_j)^{l-2}+\cdots,\\&=\mathrm{i}\,\hbar\,l\,(R_j)^{l-1}.\end{aligned} \tag{16}$$

همه یِ مئلفِها یِ مکان جز R_j با P_j جا-به-جا میشوند. پس اگر A تابع ی از مئلفِها یِ مکان جز R_j باشد، جا-به-جاگر ِ آن با P_j صفر است. از اینجا،

$$[(R_j)^l\,A,P_j]=\mathrm{i}\,\hbar\,l\,(R_j)^{l-1}\,A. \tag{17}$$

به این ترتیب از (17) دیده میشود اگر f تابع ی از مکان باشد که بسط-ِ-تِیلِر َش بر حسب ِ مئلفه یِ j با خُد ِ f برابر است،

$$[f(\boldsymbol{R}),P_j]=\mathrm{i}\,\hbar\,(\partial_j\,f)(\boldsymbol{R}), \tag{18}$$

که $(\partial_j\,f)$ مشتق ِ پارِئی یِ f نسبت به مئلفه یِ j ِ متغیر َش است. به این ترتیب،

$$[f(\boldsymbol{R}),\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{P}]=\mathrm{i}\,\hbar\,\sum_j\{P_j\,[(\partial_j\,f)(\boldsymbol{R})]+[(\partial_j\,f)(\boldsymbol{R})]\,P_j\}. \tag{19}$$

از جمله معلوم میشود (لطفَن نشان دهید)،

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle R_j\rangle}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\langle P_j\rangle}{m}. \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle R_j\,R_k\rangle}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\langle (P_j\,R_k + R_j\,P_k)\rangle}{m}. \tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle (P_j\,R_k + R_j\,P_k)\rangle}{\mathrm{d}\,t} = \frac{2\,\langle P_j\,P_k\rangle}{m}. \tag{22}$$

روابطِ (20) و (21) اگر انرژی-یِ-پتانسیل صفر نباشد هم درست َند، اما (22) وقت ی درست است که ذره آزاد باشد. در این حالت طرفِ راستِ (20) و طرفِ راستِ (22) ثابت َند. به این ترتیب به سادگی میشود معادلاتِ (20) تا (22) را حل کرد:

$$\langle R_j\rangle(t) = \langle R_j\rangle(0) + \frac{\langle P_j\rangle\,t}{m}. \tag{23}$$

$$\langle (P_j\,R_k + R_j\,P_k)\rangle(t) = \langle (P_j\,R_k + R_j\,P_k)\rangle(0) + \frac{2\,\langle P_j\,P_k\rangle\,t}{m}. \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\langle R_j\,R_k\rangle(t) = {}& \langle R_j\,R_k\rangle(0) + [\langle (P_j\,R_k + R_j\,P_k)\rangle(0)]\,t\\ &+ \frac{\langle P_j\,P_k\rangle\,t^2}{m^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

از جمله برا یِ فضا یِ یک-بُعدی،

$$\langle R\rangle(t) = \langle R\rangle(0) + \frac{\langle P\rangle\,t}{m}. \tag{26}$$

$$\langle (P\,R + R\,P)\rangle(t) = \langle (P\,R + R\,P)\rangle(0) + \frac{2\,\langle P^2\rangle\,t}{m}. \tag{27}$$

$$\langle R^2\rangle(t) = \langle R\,R\rangle(0) + [\langle (P\,R + R\,P)\rangle(0)]\,t + \frac{\langle P^2\rangle\,t^2}{m^2}. \tag{28}$$

(26) را مجذور میکنم و از (28) کم میکنم:

$$\begin{aligned}(\langle R^2\rangle - \langle R\rangle^2)(t) = {}& (\langle R^2\rangle - \langle R\rangle^2)(0) + [\langle (P\,R + R\,P)\rangle(0) - 2\,\langle P\rangle\,\langle R\rangle(0)]\,t\\ &+ \frac{(\langle P^2\rangle - \langle P\rangle^2)\,t^2}{m^2},\end{aligned} \tag{29}$$

یا

$$(\Delta R)^2(t) = (\Delta R)^2(0) + [\langle (P\,R + R\,P)\rangle(0) - 2\,\langle P\rangle\,\langle R\rangle(0)]\,t + \frac{(\Delta P)^2\,t^2}{m^2}. \tag{30}$$

در زمانها یِ بزرگ، بزرگترین جمله در طرف ِ راست جمله یِ آخر است، که با مجذور ِ زمان متناسب است. این نشان میدهد در زمانها یِ بزرگ عدم- ِقطعیت ِ مکان (ِ ذره یِ آزاد) به شکل ِ خطی با زمان زیاد میشود. عدم- -قطعیت ِ تکانه (یِ ذره یِ آزاد) به زمان بستگی ندارد. یک وضعیت ِ خاص این است که در زمان ِ صفر، حالت ِ سیستم عدم- ِقطعیت ِ کمینه داشته باشد:

$$[(\Delta R)(0)]\,[(\Delta P)(0)] = \frac{\hbar}{2}. \tag{31}$$

یاد ِ تان هست که یک شرط ِ لازم برا یِ این رابطه این است که

$$\langle\{(R - \langle R\rangle), (P - \langle P\rangle)\}\rangle = 0. \tag{32}$$

(اگر یاد ِ تان نبود هم حالا یاداوری شد.) این یعنی ضریب ِ t در طرف ِ دوم ِ (30) صفر است. به این ترتیب (30) میشود

$$(\Delta R)^2(t) = (\Delta R)^2(0) + \frac{\hbar^2\,t^2}{4\,(\Delta R)^2(0)}. \tag{33}$$

هر چه عدم- ِقطعیت ِ مکان در زمان ِ صفر کوچکتر شود، عدم- ِقطعیت ِ مکان در زمانها یِ بزرگ بزرگتر میشود.