1 تحول ِ یک سیستم ِ دُ-حالتی

سیستم ی را در نظر بگیرید که فضا-یِ-هیلبِرت ِ متناظر با آن دُ-بُعدی ست. ماتریس ِ کلیترین هَمیلتِنی یِ متناظر با این سیستم، در یک پایه یِ یکه-متعامد چنین است.

$$H = \begin{pmatrix} a & \bar{c} \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1}$$

که a و d حقیقی یَند. این ماتریس را میشود چنین نوشت.

$$H = \alpha + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \tag{2}$$

که

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \gamma_1\,\sigma_1 + \gamma_2\,\sigma_2 + \gamma_3\,\sigma_3, \tag{3}$$

α و γ_i ها عددها ی حقیقی یَند، و σ_i ها ماتریس َند (ماتریسها یِ پاؤلی):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

حالت ِ سیستم در زمان ِ صفر $\rangle\psi(0)$ است:

$$\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{7}$$

هدف محاسبه یِ حالت ِ سیستم در زمان ِ t است.

برا یِ این کار هَمیلتنی را قطری میکنم. (لطفَن این کار بکنید و ویژه-مقدارها و ویژه-بردارها یِ هَمیلتنی را حساب کنید.) ویژه-مقدارها یِ H میشوند

$$E_{\pm} = \alpha \pm \gamma, \tag{8}$$

که

$$\gamma = \sqrt{(\gamma_1)^2 + (\gamma_2)^2 + (\gamma_3)^2}. \tag{9}$$

ویژه-بردارها هم میشوند

$$|\pm\rangle = \mathcal{N}_{\pm} \begin{pmatrix} \gamma_3 \pm \gamma \\ \gamma_1 + \mathrm{i}\,\gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

که $\mathcal{N}_j$ ها دلبخاه َند. ویژه-بردارها بهنجار میشوند، اگر

$$|\mathcal{N}_{\pm}|^2 = \frac{1}{2\,\gamma\,(\gamma \pm \gamma_3)}. \tag{11}$$

با ویژه-بردارها یِ بهنجار کار میکنم.

برا یِ محاسبه یِ تحول ِ حالت، حالت ِ اولیه را بر حسب ِ ویژه-بردارها بسط میدهم:

$$|\psi(0)\rangle = c_+(0)\,|+\rangle + c_-(0)\,|-\rangle. \tag{12}$$

چون ویژه-بردارها متعامد َند و یکه شده اند،

$$c_j(0) = \langle j|\psi(0)\rangle, \tag{13}$$

که نتیجه میدهد

$$c_{\pm}(0) = \overline{\mathcal{N}_{\pm}}\,[(\gamma_3 \pm \gamma)\,x + (\gamma_1 - \mathrm{i}\,\gamma_2)\,y]. \tag{14}$$

و برا یِ زمان ِ t،

$$c_{\pm}(t) = c_{\pm}(0)\,\exp\left(\frac{E_{\pm}\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right). \tag{15}$$

$$c_{\pm}(t) = \left[\exp\left(\frac{\alpha\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\,\left[\exp\left(\pm\frac{\gamma\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\,\overline{\mathcal{N}_{\pm}}\,[(\gamma_3 \pm \gamma)\,x + (\gamma_1 - \mathrm{i}\,\gamma_2)\,y]. \tag{16}$$

با استفاده از این و

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)\,|+\rangle + c_-(t)\,|-\rangle, \tag{17}$$

دیده میشود

$$|\psi(t)\rangle = [\zeta(t)]\,[|\psi_+(t)\rangle + |\psi_-(t)\rangle], \tag{18}$$

که

$$\zeta(t) = \exp\left(\frac{\alpha\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right). \tag{19}$$

$$\begin{aligned} |\psi_\pm(t)\rangle &= [z_\pm(t)]\,|\mathcal{N}_\pm|^2\,[(\gamma_3\pm\gamma)\,x + (\gamma_1 - \mathrm{i}\,\gamma_2)\,y]\,\begin{pmatrix}\gamma_3\pm\gamma\\ \gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2\end{pmatrix}, \\ &= \frac{z_\pm(t)}{2\,\gamma}\,\begin{pmatrix}(\gamma\pm\gamma_3)\,x \pm (\gamma_1-\mathrm{i}\,\gamma_2)\,y\\ \pm(\gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2)\,x + (\gamma\mp\gamma_3)\,y\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{20}$$

$$z_\pm(t) = \exp\left(\pm\frac{\gamma\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right). \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \frac{\zeta(t)}{2\,\gamma}\,\Bigg\{&[z_+(t)]\,\begin{pmatrix}(\gamma+\gamma_3)\,x + (\gamma_1-\mathrm{i}\,\gamma_2)\,y\\ (\gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2)\,x + (\gamma-\gamma_3)\,y\end{pmatrix} \\ &+[z_-(t)]\,\begin{pmatrix}(\gamma-\gamma_3)\,x - (\gamma_1-\mathrm{i}\,\gamma_2)\,y\\ -(\gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2)\,x + (\gamma+\gamma_3)\,y\end{pmatrix}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{22}$$

ζ یک عدد ِ مختلط با طول ِ یک است. ζ به زمان بستگی دارد، اما در تحول ِ سیستم اثر ی ندارد، چون ضرب ِ بردار ِ حالت در یک فاز حالت ِ سیستم را عوض نمیکند. z_+ و z_- هم عددها یی مختلط با طول ِ یک َند. اما اثر ِ اینها در تحول به شکل ِ ضرب ِ بردار ِ حالت در یک فاز نیست، و اینها در تحول مئثر َند.

رابطه یِ (22) را میشد چنین نوشت.

$$|\psi(t)\rangle = [U(t,0)]\,|\psi(0)\rangle, \tag{23}$$

که U (عملگرِ تحول) چنین است.

$$U(t,0) = \frac{\zeta(t)}{2\,\gamma}\left\{[z_+(t)]\begin{pmatrix}(\gamma+\gamma_3) & (\gamma_1-\mathrm{i}\,\gamma_2)\\ (\gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2) & (\gamma-\gamma_3)\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.+[z_-(t)]\begin{pmatrix}(\gamma-\gamma_3) & -(\gamma_1-\mathrm{i}\,\gamma_2)\\ -(\gamma_1+\mathrm{i}\,\gamma_2) & (\gamma+\gamma_3)\end{pmatrix}\right\}. \tag{24}$$

دیده میشود (لطفَن تحقیق کنید)

$$U(t,0) = \left[\exp\left(\frac{E_+\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\,|+\rangle\,\langle+| + \left[\exp\left(\frac{E_-\,t}{\mathrm{i}\,\hbar}\right)\right]\,|-\rangle\,\langle-|. \tag{25}$$