1 مکان و تکانه

یک ذره مقید است بر یک دایره به محیطِ L حرکت کند. جا یِ این ذره با یک مختصه یِ x مشخص میشود، که x از x_0 تا $(x_0 + L)$ تغییر میکند. x_0 را میشود هر مقدار ی گرفت. همچنین، میشود این قید که x در یک گستره به طولِ L را برداشت و به جا یِ آن این را گذاشت که $(x = a)$ و $(x = a + L)$ یک نقطه را مشخص میکنند. حالتِ متناظر با این که ذره در x باشد را با $|x\rangle$ نشان میدهم. تابع- ِ-مُج ِ متناظر با بردارِ $|\psi\rangle$ را هم چنین تعریف میکنم.

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle. \tag{1}$$

حاصل- ِ-ضربِ درونی برا یِ بردارها یِ $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ بر حسبِ تابع- ِ-مُجها داده میشود:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \mathrm{d}\,x\,\overline{\psi_1(x)}\,\psi_2(x). \tag{2}$$

ناحیه یِ انتگرالگیری یک بازه به طولِ L است. حاصل- ِ-ضربِ درونی را میشود چنین نوشت.

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \int \mathrm{d}\,x\langle\psi_1|x\rangle\,\langle x|\psi_2\rangle, \tag{3}$$

که از آن بر میئاید

$$\int \mathrm{d}\,x\,|x\rangle\,\langle x| = 1. \tag{4}$$

همچنین،

$$\langle x'|\psi\rangle = \int \mathrm{d}\,x\,\langle x'|x\rangle\,\langle x|\psi\rangle, \tag{5}$$

یا،

$$\psi(x') = \int \mathrm{d}\,x\,\langle x'|x\rangle\,\psi(x). \tag{6}$$

دلتا یِ دیرَک را با این رابطه تعریف میکنند.

$$\psi(x') = \int \mathrm{d}\,x\,\delta(x - x')\,\psi(x). \tag{7}$$

هیچ تابعِ معمولی‌ یی این ویژگی را ندارد. می‌گویند دلتا یِ دیرَک یک تابعِ تعمیم‌-یافته است. اما تابع‌ها یی هستند که رفتارِ شان نزدیک به رفتارِ دلتا یِ دیرَک است. مثلَن،

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}(1/\varepsilon), & |x|<(\varepsilon/2)\\ 0, & |x|>(\varepsilon/2)\end{cases}. \tag{8}$$

دیده می‌شود

$$\int \mathrm{d}\,x\,\delta_\varepsilon(x-x')\,\psi(x)=\frac{1}{\varepsilon}\int_{x'-(\varepsilon/2)}^{x'+(\varepsilon/2)}\mathrm{d}\,x\,\psi(x), \tag{9}$$

و طرفِ راست وقت ی ε به صفر می‌گراید به $\psi(x')$ می‌گراید. به شکل ی نا-دقیق، دلتا یِ دیرَک حالتِ حدی یِ تابع ی ست که مقدار َش جز در نزدیکی یِ یک نقطه ناچیز است، اما در نزدیکی یِ آن نقطه بزرگ می‌شود، چنان که انتگرالِ تابع یک است. از رابطه یِ (7) ضمنَن دیده می‌شود

$$f(x)\,\delta(x-x')=f(x')\,\delta(x-x'). \tag{10}$$

لطفَن این رابطه را، مثلَن با ضرب-کردنِ دُ-طرف بر یک تبعِ دلبخاه و انتگرالگیری، نشان دهید. همچنین،

$$\delta(-x)=\delta(x). \tag{11}$$

لطفَن این را هم نشان دهید. تغییر-ِ-متغیر از x به $(-x)$ مفید است. البته باید توجه کرد که در این تغییر-ِ-متغیر جا یِ حدها یِ انتگرالگیری هم عوض می‌شود.

از مقایسه یِ (6) و (7) دیده می‌شود

$$\langle x'|x\rangle=\delta(x-x'). \tag{12}$$

معادلاتِ (4) و (12) هم ان روابطِ کامل-بودن و تعامدِ یک پایه اَند، وقت ی شاخصِ پایه پیوسته است.

یک راه برا یِ تعریفِ p (تکانه) رابطه یِ دُبرُی است: رابطه یِ تکانه با λ (طول-ِ-مُج) و h (ثابتِ پْلانک):

$$p=\frac{h}{\lambda}. \tag{13}$$

این یعنی تکانه یِ متناظر با یک مُج ِ تخت با طول- ِ-مُج ِ λ از رابطه یِ بالا به دست میئاید. u_k (مُج ِ تخت با عدد- ِ-مُج ِ k) چنین است.

$$u_k(x) = c\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \tag{14}$$

که c یک ثابت است و

$$k = \frac{2\,\pi}{\lambda}. \tag{15}$$

$$p = \hbar\,k. \tag{16}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\,\pi}. \tag{17}$$

پس اگر ψ یک ترکیب ِ خطی از مُجها یِ تخت باشد:

$$\psi(x) = \sum_k a_k\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \tag{18}$$

اثر ِ P (عملگر ِ تکانه) بر آن چنین میشود.

$$\begin{aligned}(P\,\psi)(x) &= \sum_k\,a_k\,(\hbar\,k)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x),\\ &= -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,[\psi(x)].\end{aligned} \tag{19}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\langle x|P|\psi\rangle = -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\langle x|\psi\rangle, \tag{20}$$

یا،

$$\langle x|P = -\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,\langle x|. \tag{21}$$

معادله یِ ویژه-مقداری برا یِ تکانه میشود

$$P\,|P = p\rangle = p\,|P = p\rangle. \tag{22}$$

پس،

$$\langle x|P\,|P=p\rangle = p\,\langle x|P=p\rangle, \tag{23}$$

یا،

$$-\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\,(\langle x|P=p\rangle) = p\,\langle x|P=p\rangle. \tag{24}$$

جوابِ این معادله‌-یِ-دیفرانسیل میشود

$$\langle x|P=p\rangle = \mathcal{N}\,\exp(\mathrm{i}\,k\,x), \tag{25}$$

که $\mathcal{N}$ یک ثابت است و رابطه یِ k با p هم ان رابطه یِ (16) است. این که نقطه یِ x هم ان نقطه یِ $(x+L)$ است، نتیجه میدهد

$$\exp(\mathrm{i}\,k\,L) = 1, \tag{26}$$

که یعنی k باید یک ی از مقدارها یِ k_n باشد، که

$$k_n = n\,\frac{2\,\pi}{L}. \tag{27}$$

متناظر با آن، p باید یک ی از مقدارها یِ p_n باشد، که

$$p_n = n\,\frac{h}{L}. \tag{28}$$

سرانجام،

$$\begin{aligned}\langle P=p|P=p\rangle &= \int \mathrm{d}\,x\,\overline{\langle x|P=p\rangle}\,\langle x|P=p\rangle,\\ &= |\mathcal{N}|^2\int \mathrm{d}\,x,\\ &= |\mathcal{N}|^2\,L. \end{aligned}\tag{29}$$

با انتخاب ِ

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{L}}, \tag{30}$$

یا این مقدار ضرب در یک فاز ِ دلبخاه، ویژه-بردارها یکه میشوند. این ویژه-بردارها یِ یکه را چنین نشان میدهم.

$$\langle x|P=p\hat{\rangle} = \frac{1}{\sqrt{L}}\ \exp(\mathrm{i}\,k\,x). \tag{31}$$

کلاه نشانه یِ این بهنجارش ِ خاص است. در حد ِ L به بینهایت بهنجارش ِ دیگری تعریف میکنم. با این ویژه-بردارها یِ یکه،

$$\sum_p |P=p\hat{\rangle}\,\hat{\langle}P=p| = 1. \tag{32}$$

$$\hat{\langle}P=p'|P=p\hat{\rangle} = \delta_{p\,p'}. \tag{33}$$

حالا ذره ای را بررسی میکنم که رو یِ یک خط (از هر-دُ-طرف بی-پایان) حرکت میکند. این را میشود حد ِ بالا در L به بینهایت گرفت. اما در این حد طرف ِ راست ِ رابطه یِ (31) صفر میشود. پس بهنجارش را عوض میکنم:

$$\langle x|P=p\rangle = \frac{1}{\sqrt{h}}\ \exp(\mathrm{i}\,k\,x). \tag{34}$$

رابطه یِ (32) میشود

$$\frac{h}{L}\ \sum_p |P=p\rangle\,\langle P=p| = 1. \tag{35}$$

فاصله یِ دُ مقدار ِ متوالی یِ p برابر با (h/L) است. پس در L به بینهایت، طرف ِ راست به انتگرال تبدیل میشود:

$$\int \mathrm{d}\,p\,|P=p\rangle\,\langle P=p| = 1. \tag{36}$$

و با روشی ی شبیه ِ آن چه برا یِ رسیدن به (12) به کار رفت، نتیجه میشود

$$\langle P=p'|P=p\rangle = \delta(p-p'). \tag{37}$$

برا یِ حرکت بر خط، X (عملگر ِ مکان) را هم چنین تعریف میکنم.

$$X\,|x\rangle = x\,|x\rangle. \tag{38}$$

پس $|x\rangle$ ویژه-بردار ِ X متناظر با ویژه-مقدار ِ x است. یعنی $|x\rangle$ هم ان $|X=x\rangle$ است.

نشان میدهم X و P اِرمیتی یَند. با دُ بردار ِ دلبخاه ِ $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$،

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1|X|\psi_2\rangle &= \int \mathrm{d}\,x\,\langle\psi_1|X|x\rangle\,\langle x|\psi_2\rangle,\\
&= \int \mathrm{d}\,x\,x\,\langle\psi_1||x\rangle\,\langle x|\psi_2\rangle,\\
&= \int \mathrm{d}\,x\,x\,\overline{\psi_1(x)}\,\psi_2(x),\\
&= \overline{\int \mathrm{d}\,x\,x\,\psi_1(x)\,\overline{\psi_2(x)}},\\
&= \overline{\langle\psi_2|X|\psi_1\rangle}.
\end{aligned} \tag{39}$$

پس،

$$\langle\psi_1|X|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|X^\dagger|\psi_2\rangle. \tag{40}$$

که نشان میدهد X اِرمیتی ست. همچنین،

$$\begin{aligned}
\langle\psi_1|P|\psi_2\rangle &= \int \mathrm{d}\,x\,\langle\psi_1|x\rangle\,\langle x|P|\psi_2\rangle,\\
&= -\mathrm{i}\,\hbar \int \mathrm{d}\,x\,\overline{\langle x|\psi_1\rangle}\,\frac{\mathrm{d}\,\langle x|\psi_2\rangle}{\mathrm{d}\,x},\\
&= \mathrm{i}\,\hbar \int \mathrm{d}\,x\,\frac{\mathrm{d}\,\overline{\langle x|\psi_1\rangle}}{\mathrm{d}\,x}\,\langle x|\psi_2\rangle,\\
&= \overline{-\mathrm{i}\,\hbar \int \mathrm{d}\,x\,\frac{\mathrm{d}\,\langle x|\psi_1\rangle}{\mathrm{d}\,x}\,\overline{\langle x|\psi_2\rangle}},\\
&= \overline{\langle\psi_2|P|\psi_1\rangle}.
\end{aligned} \tag{41}$$

در رسیدن از خط ِ دوم به خط ِ سوم انتگرالگیری یِ جزئ-به-جزئ به کار رفته. به این ترتیب،

$$\langle\psi_1|P|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|P^\dagger|\psi_2\rangle. \tag{42}$$

که نشان می‌دهد P اِرمیتی ست.

X و P با هم جا-به-جا نمی‌شوند. $\langle\psi|$ یک بردار ِ دلبخاه است:

$$\begin{aligned}\langle x|[X,P]|\psi\rangle &= \langle x|X\,P|\psi\rangle - \langle x|P\,X|\psi\rangle,\\ &= x\,\langle x|P|\psi\rangle + \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\,(\langle x|X|\psi\rangle)}{\mathrm{d}\,x},\\ &= -\mathrm{i}\,\hbar\,x\,\frac{\mathrm{d}\,\langle x|\psi\rangle}{\mathrm{d}\,x} + \mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\mathrm{d}\,(x\,\langle x|\psi\rangle)}{\mathrm{d}\,x},\\ &= \mathrm{i}\,\hbar\,\langle x|\psi\rangle, \end{aligned} \tag{43}$$

که نشان می‌دهد

$$[X,P] = \mathrm{i}\,\hbar. \tag{44}$$

از جمله، قضیه یِ عدم- ِ-قطعیت می‌گوید

$$(\Delta\,X)\,(\Delta\,P) \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{45}$$

دنبال ِ بردار ی می‌گردم که حاصل- ِ-ضرب ِ عدم- ِ-قطعیتها یِ مکان و تکانه برا یِ آن کمینه باشد. چنین-بردار ی باید دُ شرط را براورَد:

$$[(P-\langle P\rangle)\,|\psi\rangle] = c\,[(X-\langle X\rangle)\,|\psi\rangle], \tag{46}$$

که c یک ثابت است، و

$$0 = \langle\psi|\{X-\langle X\rangle, P-\langle P\rangle\}|\psi\rangle. \tag{47}$$

از (46) نتیجه می‌شود

$$\langle\psi|(X-\langle X\rangle)\,(P-\langle P\rangle)|\psi\rangle = c\,\langle\psi|(X-\langle X\rangle)\,(X-\langle X\rangle)|\psi\rangle. \tag{48}$$

همچنین،

$$\begin{aligned}\langle\psi|(P-\langle P\rangle)\,(X-\langle X\rangle)|\psi\rangle &= \overline{\langle\psi|(X-\langle X\rangle)\,(P-\langle P\rangle)|\psi\rangle},\\ &= \bar{c}\,\langle\psi|(X-\langle X\rangle)\,(X-\langle X\rangle)|\psi\rangle.\end{aligned} \tag{49}$$

پس (47) میشود

$$0 = (c + \bar{c})\, \langle\psi|(X - \langle X\rangle)\, (X - \langle X\rangle)|\psi\rangle. \qquad (50)$$

ضریب ِ پرانتز در طرف ِ راست مثبت است. پس شرط ِ لازم برا یِ برقراری یِ (47) این است که

$$c + \bar{c} = 0. \qquad (51)$$

یعنی c مُهومی یِ محض باشد. میگیرم

$$c = \mathrm{i}\,\hbar\, b, \qquad (52)$$

که b حقیقی ست. $\hbar$ فقط به خاطر ِ خلوت-کردن ِ محاسبات آمده. $\langle x|$ را از چپ در (46) ضرب میکنم:

$$-\mathrm{i}\,\hbar\, \frac{\mathrm{d}\,\langle x|\psi\rangle}{\mathrm{d}\,x} = (c\, x - c\, \langle X\rangle + \langle P\rangle)\, \langle x|\psi\rangle. \qquad (53)$$

یا،

$$\frac{\mathrm{d}\,\langle x|\psi\rangle}{\mathrm{d}\,x} = \left[-b\,(x - \langle X\rangle) + \mathrm{i}\, \frac{\langle P\rangle}{\hbar}\right]\, \langle x|\psi\rangle, \qquad (54)$$

که نتیجه میدهد

$$\langle x|\psi\rangle = N\, \exp\left[-\frac{b\,(x - \langle X\rangle)^2}{2} + \mathrm{i}\, \frac{\langle P\rangle}{\hbar}\, x\right]. \qquad (55)$$

تابع- ِ-مُج ِ متناظر با عدم- ِ-قطعیت ِ کمینه، بسته-یِ-مُج ِ گاؤسی ست. لطفَن ثابت ِ N را چنان بیابید که طول ِ $|\psi\rangle$ برابر با یک باشد. همچنین، $(\Delta\, X)$ و $(\Delta\, P)$ را بیابید و تحقیق کنید اینها رابطه یِ عدم- ِ-قطعیت را با تساوی برمیئاورند.