1 ماتریسها یِ قطری- شدنی و قطری- نشدنی

M یک ماتریس ِ مربع است. u یک ویژه- بردار ِ M متناظر با ویژه- مقدار ِ μ است، اگر u ناصفر باشد و

$$M\,u = \mu\,u. \tag{1}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$(\mu - M)\,u = 0. \tag{2}$$

یک جواب ِ این معادله برا یِ u این است که u صفر است. به این جواب ِ بدیهی میگویم. شرط ِ این که u ویژه- بردار باشد این است که u ناصفر باشد و معادله را براورد. برا یِ این، معادله باید جواب ِ نابدیهی داشته باشد. شرط ِ این که این معادله یِ خطی یِ بدون- ِ-طرف- ِ-دوم (یعنی با طرف ِ دوم برابر با صفر) جواب ِ نابدیهی داشته باشد این است که دترمینان ِ ماتریس ِ ضرایب صفر باشد. چندجملِئی یِ مشخصه یِ ماتریس ِ M را با C_M نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\mathrm{C}_M(z) = \det(z - M). \tag{3}$$

پس μ یک ویژه- مقدار ِ M است، اگر و تنها اگر $\mathrm{C}_M(\mu)$ صفر باشد، یعنی μ یک ریشه یِ چندجملِئی یِ مشخصه یِ M باشد. اگر M یک ماتریس ِ $(n \times n)$ باشد، C_M یک چندجملِئی از درجه یِ n است، پس n ریشه دارد. البته ریشِها ممکن است ناحقیقی باشند (حتا اگر خُد ِ M حقیقی باشد) و ممکن است تکراری باشند.

گیرم u_1 تا u_k ویژه- بردارها یِ ماتریس ِ M متناظر با ویژه- مقدارها یی متمایز (به ترتیب μ_1 تا μ_k) اند:

$$M\,u_j = \mu_j\,u_j. \tag{4}$$

نشان میدهم مجموعه یِ u_1 تا u_k خطی- مستقل است. برا یِ این کار، گیرم یک ترکیب ِ خطی از این بردارها صفر است. یعنی عددها یِ α_1 تا α_k چنان َند که

$$\alpha_1\,u_1 + \cdots + \alpha_k\,u_k = 0. \tag{5}$$

$(M-\mu_1)$ را از چپ در این برابری ضرب میکنم. با استفاده از (4) نتیجه میشود

$$(\mu_2-\mu_1)\,\alpha_2\,u_2+\cdots+(\mu_k-\mu_1)\,\alpha_k\,u_k=0. \tag{6}$$

$(M-\mu_2)$ را از چپ در این برابری ضرب میکنم. سپس $(M-\mu_3)$ را از چپ در برابری ِ حاصل ضرب میکنم، و این کار تا ضرب ِ $(M-\mu_{k-1})$ ادامه میدهم. با استفاده از (4) نتیجه میشود

$$(\mu_k-\mu_{k-1})\cdots(\mu_k-\mu_1)\,\alpha_k\,u_k=0. \tag{7}$$

چون ویژه-مقدارها متمایز َند، هیچ یک از پرانتزها صفر نیست. پس،

$$\alpha_k\,u_k=0. \tag{8}$$

u_k ویژه-بردار است. پس صفر نیست. نتیجه میشود α_k صفر است. به این ترتیب،

$$\alpha_1\,u_1+\cdots+\alpha_{k-1}\,u_{k-1}=0. \tag{9}$$

با استدلال ی مشابه معلوم میشود α_{k-1} صفر است. و با تکرار ِ استدلال، معلوم میشود همه ی ِ α_j ها صفر َند. پس اگر یک ترکیب ِ خطی از u_1 تا u_k صفر باشد همه ی ِ ضرایب صفر َند. این یعنی مجموعه ی ِ u_1 تا u_k خطی-مستقل است.

گیرم M یک ماتریس ِ $(n\times n)$ است و هیچ یک از ویژه-مقدارها یَش تکراری نیستند. پس این ماتریس n ویژه-بردار دارد که یک مجموعه ی ِ خطی-مستقل میسازند. چون بُعد ِ دامنه ی ِ M برابر با n است، این ویژه-بردارها یک پایه ی ِ n میشوند. شکل ِ ماتریسی ی ِ M در این پایه بسیار ساده است: یک ماتریس ِ قطری که اعضا ی ِ رو-ی ِ-قطر ِ آن ویژه-مقدارها ی ِ M اند.

معلوم شد اگر ویژه-مقدارها ی ِ M متمایز باشند، یک پایه هست که M در آن قطری ست. به طُر ِ کلی، اگر M به تعداد ِ بعد ِ دامنه اَش ویژه-بردار ِ خطی-مستقل داشته باشد، مجموعه ی ِ این ویژه-بردارها یک پایه میسازد که M در آن قطری ست. در این حالت میگویند M قطری-شدنی ست. و معلوم شد اگر ویژه-مقدارها متمایز باشند حتمَن چنین است: هر ماتریس (ِ مربع) ی که ویژه-مقدارها یَش متمایز باشند قطری-شدنی ست.

اما اگر همه ی ِ ویژه-مقدارها متمایز نباشند چه؟ دُ مثال میزنم که تعداد ِ کافی ویژه-بردار، در یک ی هست و در دیگری نیست. ماتریس در اولی قطری-شدنی ست و در دومی قطری-شدنی نیست.

1.1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

این ماتریس هم ین حالا هم قطری ست. با این وجود نشان میدهم میشود برا یَش دُ ویژه-بردار ِ خطی-مستقل یافت. دیده میشود

$$\mathrm{C}_M(z) = (z-1)^2. \tag{11}$$

پس تنها-ویژه-مقدار ِ این ماتریس 1 است. u ویژه-بردار ِ این ماتریس است، اگر

$$(1-M)\,u = 0. \tag{12}$$

اما این یک اتحاد برا یِ u است: هر بردار ِ u این معادله را بر میئاورَد. دُ جواب ِ خاص برا یِ u میگیرم که یک مجموعه یِ خطی-مستقل بسازند. مثلَن

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

M در پایه یِ u_1 و u_2 قطری ست. در واقع این هم ان پایه ای ست که M از اول در آن نوشته شده بود.

1.2

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

$$\mathrm{C}_N(z) = (z-1)^2. \tag{16}$$

پس تنها-ویژه-مقدارِ این ماتریس هم 1 است. در واقع C_N با C_M برابر است. v ویژه-بردارِ این ماتریس است، اگر

$$(1-N)\,v=0. \tag{17}$$

این یعنی اگر

$$v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{18}$$

آنگاه،

$$-y=0. \tag{19}$$

پس،

$$v=x\,\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

همه یِ v ها یی که به شکلِ بالا یَند مضرب ی از یک بردارِ ثابت َند. پس هر-دُ-بردار ی که ویژه-بردارِ N باشند یک مجموعه یِ خطی-وابسته میسازند. یعنی پایه ای نیست که اعضا یَش ویژه-بردارِ N باشند. N قطری-نشدنی ست.