

1 حل مسئله با قانونهای نیوتن

معادله‌ی دیفرانسیل حرکت برای هر ذره، قانون دوم نیوتن است. پس برای حل مسئله باید نیروهای وارد بر هر ذره معلوم باشند. مهم است که نیرو نتراشیم. هر نیرویی که به ذره وارد میشود باید منشی داشته باشد، یعنی باید معلوم باشد از کجا آمده. پس شروع کار این است که معلوم شود چه چیزهایی به ذره نیرو وارد میکنند.

یک جسم به جرم m در نزدیکی سطح زمین حرکت میکند. مقاومت هوا ناچیز است. در این حالت تنها چیزی که به جسم نیرو وارد میکند زمین است. نیرویی که زمین به جسم وارد میکند وزن جسم است، که برابر با (mg) است. g شتاب گرانش است. پس معادله‌ی نیوتن میشود

$$m a = m g, \quad (1)$$

که a شتاب جسم است. از اینجا شتاب جسم به دست میآید:

$$a = g. \quad (2)$$

اگر فاصله‌ی جسم از سطح زمین، و جا-به-جایی‌ی جسم، هر-دُ خیل‌ی کوچکتر از شعاع زمین باشند، g ثابت است و در نتیجه a هم ثابت میشود. از اینجا-به-بعد را قبلن حل کرده ایم. یک جسم روی یک سطح افقی است. چیزهایی که به این جسم نیرو وارد میکنند زمین و سطحند. نیرویی که زمین وارد میکند وزن جسم است. نیرویی که سطح به جسم وارد میکند یک بخش عمود-بر-سطح دارد و یک بخش موازی-با-سطح. به بخش موازی-با-سطح اصطکاک میگویند. وضعیت‌ی را در نظر میگیریم که سطح اصطکاک ندارد. پس نیروی ناشی از سطح عمود بر سطح است. اما مقدار این نیرو چه قدر است؟ برخلاف وزن که مقدارش مشخص است، مقدار این نیرو مشخص نیست. به جای آن یک داده در باره‌ی حرکت داریم: این که جسم بر سطح میماند. این یک مثال از وضعیتهایی است که بخش‌ی از نیرو را نمیدانیم، در مقابل روابطی بین زمان و مکان و سرعت داریم. به نیروهای متناظر نیروهای قیدی، و به روابط متناظر قید میگویند. نیروی قیدی باید چنان تنظیم شود که قید برآورده شود. ولی به هر حال تعداد معادلات باید با تعداد مجهولها برابر باشد. در این مثال،

$$m a = m g + N, \quad (3)$$

که N نیروی عمود-بر-سطح است. جهت این نیرو معلوم است. اما مقدار آن معلوم نیست. محور z را عمودی و رو-به-بالا میگیریم. میدانیم

$$\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{z}}. \quad (4)$$

$$\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{z}}. \quad (5)$$

اما مقدار N معلوم نیست. فقط این را میدانیم که N منفی نمیشود، یعنی سطح جسم را به طرف x نمیگذرد. (فرض شده جسم به سطح نچسبیده.) تصویرها ی معادله ی نیوتن موازی با سطح و عمود بر z (در جهت محور z) میشوند

$$m a_{\parallel} = 0. \quad (6)$$

$$m a_z = -m g + N. \quad (7)$$

شاخص \parallel یعنی موازی با سطح. معادله ی اول میگوید شتاب موازی-با-سطح صفر است. پس حرکت در صفحه ی افقی یکنواخت است. معادله ی دوم یک معادله برای a_z و N است. یک معادله کم داریم. نیروی قیدی ی N نامعلوم است. اما به جای آن x معادله ی قید را داریم، که جسم بر سطح میماند. این که جسم بر سطح میماند، یعنی

$$z = z_0, \quad (8)$$

که z_0 مقدار ی ثابت است. با x بار مشتقگیری از این رابطه نتیجه میشود

$$a_z = 0. \quad (9)$$

حالا تعداد معادلات کافی ست. N به دست میآید:

$$N = m g. \quad (10)$$

در مسئله ی بالا یک تغییر کوچک میدهم: یک نیروی اضافی ی $(F' \hat{\mathbf{z}})$ هم به جسم وارد میشود. اگر F' مثبت باشد، یعنی جسم به بالا کشیده میشود، و اگر F' منفی باشد، یعنی جسم به سطح فشرده

میشود. فقط به بخش قائم حرکت میپردازیم. معادله نیوٲن میشود

$$m a_z = F' + N - m g. \quad (11)$$

این یک معادله برای \hat{z} مجهول N و a_z است. اما از قید (جسم بر سطح است، یعنی z ثابت است) معادله (9) نتیجه میشود. پس،

$$N = m g - F'. \quad (12)$$

اگر F' منفی باشد (جسم به سطح فشرده شود) N مثبت است. اما اگر F' مثبت و بزرگتر از وزن جسم باشد، N منفی میشود. سطح نمیتواند جسم را به سوی \hat{z} بکشد. پس N نباید منفی شود. اگر چنین شد یعنی دست - کم یک z از معادلات z که به این نتیجه انجامیده نادرست است. معادلات z که به (12) انجامیدند (8)، یا (9)، و (11) بودند. (11) معادله نیوٲن است و باید درست باشد. پس (8) نادرست است. یعنی اگر F' بزرگتر از وزن جسم باشد، جسم بر سطح نمیماند.

مسابقه z - کشتی: گروه 1 طرف راست یک طناب را گرفته و گروه 2 طرف چپ هم آن طناب را. گروه z طناب را با نیرو T_j میکشد. (البته گروه 1 طناب را به راست میکشد و گروه 2 طناب را به چپ میکشد. کدام گروه برنده میشود؟ شاید بگویید بدیهی است: آن گروه که طناب را با نیروی بیشتری میکشد. اما قرار است چیزی بدیهی نباشد. باید معادله بنویسیم. فقط معادلات در راستای z را مینویسیم. محور x را هم در راستای z و به سوی راست میگیریم. چیزهایی که به گروه 1 نیرو وارد میکنند طناب و زمین اند. گروه 2 به گروه 1 نیرو وارد نمیکند، چون گروهها با هم تماس ندارند و چیزهایی مثل نیروی گرانشی که با آن \hat{z} جسم از دور بر هم اثر میکنند هم در \hat{z} این گروهها ناچیز است. نیرویی که زمین به گروه z وارد میکند یک بخش عمودی دارد و یک بخش افقی. بخش افقی z این نیرو را با F_j نشان میدهم. F_1 العمل نیروی افقی بی ست که گروه 1 به زمین وارد میکند. پس نیروی افقی بی که گروه 1 به زمین وارد میکند $(-F_1)$ است. البته گروه 1 زمین را به چپ هل میدهد. پس،

$$-F_1 = -F_1 \hat{x}, \quad (13)$$

که F_1 مثبت است. به هم ین ترتیب، دیده میشود

$$-F_2 = -F_2 \hat{x}, \quad (14)$$

که F_2 مثبت است. نیرویی که طناب به گروه j وارد میکند را T_j نشان میدهم. طناب گروه 1 را به چپ میکشد. پس،

$$T_1 = -T_1 \hat{x}, \quad (15)$$

که T_1 مثبت است. به هم ین ترتیب،

$$T_2 = T_2 \hat{x}, \quad (16)$$

که T_2 مثبت است. پس معادله ی نیوتن برای جسمها میشود

$$m_1 a_1 = F_1 - T_1. \quad (17)$$

$$m_2 a_2 = T_2 - F_2. \quad (18)$$

m_j جرم گروه j ، و a_j شتاب گروه j است. اما به جز این دُ-گروه، یک مُجودِ دیگر هم هست: طناب. گروه j به طناب نیروی $(-T_j)$ را وارد میکند، عکس العملِ نیرویی که طناب به گروه j وارد میکند. جرم طناب را با m و شتاب آن را با a نشان میدهم. معادله ی نیوتن برای طناب میشود

$$m a = T_1 - T_2. \quad (19)$$

ℓ (طول طناب) فاصله ی دُ-گروه از هم است:

$$\ell = x_1 - x_2, \quad (20)$$

که x_j جای گروه j است. ℓ ثابت است. پس با دُ بار مشتقگیری از رابطه ی بالا معلوم میشود a_1 و a_2 برابرند. در واقع اینها با a هم برابرند، چون طناب با گروهها حرکت میکند و سرعت آن با سرعت هر یک از گروهها برابر است. معادلات (17) تا (19) را با هم جمع میکنم. از برابری ی شتابها نتیجه میشود

$$(m_1 + m_2 + m) a = F_1 - F_2. \quad (21)$$

گروه برنده با علامت شتاب تعیین میشود. وقت ی گروهها ابتدا ساکن نند، اگر شتاب مثبت باشد حرکت به راست خواهد بود و 1 برنده میشود، و اگر شتاب منفی باشد حرکت به چپ خواهد بود و 2 برنده میشود. پس گروه ی برنده میشود که زمین نیرو ی بزرگتری به آن وارد کند. چون اندازه ی نیرو یی که زمین به هر گروه وارد میکند با اندازه ی نیرو یی که آن گروه به زمین وارد میکند برابر است، میشود گفت گروه ی برنده میشود که نیرو ی بزرگتری به زمین وارد کند. در مسابقه ی طناب- کشی نگران طناب نباشید. تا میتوانید زمین را هل (افقی) بدهید.

به عنوان یک نتیجه ی فرعی: معمولن جرم طناب خیل ی کمتر از جرم هر یک از گروهها ست. به تقریب از جرم طناب چشم میپوشم. معادله ی (19) میشود

$$T_2 = T_1. \quad (22)$$

این نتیجه را جاها ی دیگر هم میشود به کار برد. اگر ریسمان (طناب) سبک باشد، کشش ریسمان در دُ-سر آن یکسان است. کلیتر، کشش ریسمان در سراسر آن یکسان است.