1 چند مثال

1.1

معادله یِ حرکت ِ یک ذره در یک بُعد چنین است.

$$\ddot{x} = -\beta\,|x|^{\gamma}. \tag{1}$$

β و γ ثابت َند. نشان داده میشود حرکت ِ این ذره دُرِئی ست. دُره یِ حرکت را با τ نشان میدهم.

بُعد ِ β را حساب کنید. با تحلیل ِ بُعدی رابطه ای بین ِ τ و A (دامنه یِ حرکت) و ثابتها یِ مسئله بیابید.

بُعد ِ x را با X و بُعد ِ زمان را با T نشان میدهم. از معادله یِ حرکت نتیجه میشود

$$[\beta] = X^{1-\gamma}\,T^{-2}. \tag{2}$$

بُعدها یِ دامنه و دُره هم چنین میشوند.

$$[A] = X. \tag{3}$$

$$[\tau] = T. \tag{4}$$

تنها پارامتر ِ بُعددار ی که در معادله یِ حرکت وارد شده β است. پس در رابطه یِ بین ِ A و τ فقط یک پارامتر ِ دیگر وارد میشود، که هم ان β است. تحلیل ِ بُعدی بر اساس ِ کمیتها یِ بیبُعد ی میشود که با اینها ساخته میشوند:

$$Q = \tau^{\mu}\,A^{\nu}\,\beta^{\sigma}. \tag{5}$$

از این که Q بیبُعد است نتیجه میشود

$$\mu - 2\,\sigma = 0. \tag{6}$$

$$\nu + (1-\gamma)\,\sigma = 0. \tag{7}$$

پس،

$$\sigma = \frac{\mu}{2}. \tag{8}$$

$$\nu = \frac{\mu\,(\gamma-1)}{2}. \tag{9}$$

$$Q = \left[\tau\,\beta^{1/2}\,A^{(\gamma-1)/2}\right]^{\mu}. \tag{10}$$

همه یِ کمیتها یِ بی‌بُعد را میشود بر حسبِ آکلاد نوشت. پس نتیجه یِ تحلیلِ بُعدی این است که آکلاد ثابت است:

$$\tau = C\,\beta^{-1/2}\,A^{(1-\gamma)/2}, \tag{11}$$

که C یک ثابتِ بی‌بُعد است که با مقدارَش با تحلیلِ بُعدی به دست نمیئاید. در حالتِ خاص ی که γ یک باشد، دُره مستقل از دامنه است.

1.2

یک هواپیما با سرعتِ ثابتِ v در عرضِ جغرافیایی یِ λ پرواز میکند. طولِ جغرافیایی یِ مبدئ ϕ_1 و طولِ جغرافیایی یِ مقصد ϕ_2 است. (معلوم است که $\phi_2 > \phi_1$ است، اگر مقصد در شرق باشد.) زمانِ شروعِ پرواز به وقتِ مبدئ T_1 است. زمانِ پایانِ پرواز به وقتِ مقصد T_2' است. محیطِ استوا L، و زمانِ یک شبانِروز τ است.

$(T_2' - T_1)$ را حساب کنید.

فاصله یِ مبدئ تا مقصد را با D نشان میدهم:

$$D = \frac{L\,\cos\theta}{2\,\pi}\,|\phi_2 - \phi_1|. \tag{12}$$

پس T (زمانِ پرواز) چنین میشود.

$$T = \frac{L\,\cos\theta}{2\,\pi\,v}\,|\phi_2 - \phi_1|. \tag{13}$$

زمانِ پایانِ پرواز به وقتِ مبدئ را با T_1' نشان میدهم:

$$T_1' = T_1 + \frac{L\,\cos\theta}{2\,\pi\,v}\,|\phi_2 - \phi_1|. \tag{14}$$

زمان به وقت ِ مقصد منها یِ زمان به وقت ِ مبدئ متناسب با اختلاف ِ طول- ِ-جغرافیاییها ست، و برا یِ اختلاف ِ $(2\,\pi)$ یک شبانِروز میشود:

$$T_2' - T_1' = \frac{\phi_2 - \phi_1}{2\,\pi}\,\tau. \tag{15}$$

به این ترتیب،

$$T_2' - T_1 = \frac{1}{2\,\pi}\,\left[\frac{L\,\cos\theta}{v}\,|\phi_2 - \phi_1| + \tau\,(\phi_2 - \phi)\right]. \tag{16}$$

در چه حالت ی ممکن است $(T_2' - T_1)$ صفر شود؟ در پرواز به شرق یا پرواز به غرب؟

این مقدارها یِ عددی را به کار ببرید.

$$L = 40\,000\,\mathrm{k\,m}. \tag{17}$$

$$v = 1000\,\mathrm{k\,m\,h^{-1}}. \tag{18}$$

$$\tau = 24\,\mathrm{h}. \tag{19}$$

برا یِ هر یک از عرض- ِ-جغرافیاییها یِ 30° و 60°، برا یِ پرواز به شرق یا غرب، و برا یِ اختلاف- ِ-طول- ِ-جغرافیایی یِ 90°، مقدار ِ $(T_2' - T_1)$ را حساب کنید.

طول ِ جغرافیایی چه قدر باشد تا $(T_2' - T_1)$ صفر شود؟

1.3

یک ذره در یک صفحه بر مسیر ی حرکت میکند که معادله یِ آن بر حسب ِ مختصات ِ قطبی یِ (ρ, ϕ) چنین است.

$$\rho = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon\,\cos\phi}. \tag{20}$$

α و ε ثابت َند. سرعت ِ زاویِئی یِ ذره این را برمیئاورَد.

$$\rho^2\,\dot{\phi} = \ell, \tag{21}$$

که ℓ هم ثابت است.

$\dot{\rho}$ را بر حسبِ ϕ و ثابتها حساب کنید. $\ddot{\rho}$ را بر حسبِ ρ و ثابتها حساب کنید. مثلفه یِ شعاعی یِ شتاب را بر حسبِ ρ و ثابتها حساب کنید. نشان دهید مئلفه یِ سمتی یِ شتاب صفر است.

از (20) نتیجه میشود

$$\dot{\rho} = \frac{\alpha\,\varepsilon\,\sin\phi}{(1+\varepsilon\,\cos\phi)^2}\,\dot{\phi}. \tag{22}$$

$\dot{\phi}$ را از (21) در این میگذارم:

$$\dot{\rho} = \frac{\alpha\,\varepsilon\,\sin\phi}{(1+\varepsilon\,\cos\phi)^2}\,\frac{\ell}{\rho^2}. \tag{23}$$

ρ را از (20) در این میگذارم:

$$\dot{\rho} = \frac{\ell\,\varepsilon\,\sin\phi}{\alpha}. \tag{24}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\ddot{\rho} &= \frac{\ell\,\varepsilon\,\cos\phi}{\alpha}\,\dot{\phi},\\ &= \frac{\ell\,\varepsilon\,\cos\phi}{\alpha}\,\frac{\ell}{\rho^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

از (20) نتیجه میشود

$$\varepsilon\,\cos\phi = \frac{\alpha}{\rho} - 1. \tag{26}$$

پس،

$$\ddot{\rho} = \frac{\ell^2}{\rho^3} - \frac{\ell^2}{\alpha\,\rho^2}. \tag{27}$$

$\boldsymbol{a}$ (شتابِ ذره) چنین است.

$$\boldsymbol{a} = a_\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} + a_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{28}$$

که a_ρ و a_ϕ مثلفِها یِ، به ترتیب، شعاعی و سمتی یِ شتاب َند.

$$a_\rho = \ddot\rho - \rho\,\dot\phi^2, \\ = \frac{\ell^2}{\rho^3} - \frac{\ell^2}{\alpha\,\rho^2} - \frac{\ell^2}{\rho^3}, \tag{29}$$

که نتیجه میدهد

$$a_\rho = -\frac{\ell^2}{\alpha\,\rho^2}. \tag{30}$$

همچنین،

$$a_\phi = \rho\,\ddot\phi + 2\,\dot\rho\,\dot\phi. \tag{31}$$

از (20) نتیجه میشود

$$\ddot\phi = -2\,\frac{\ell}{\rho^3}\,\dot\rho, \\ = -2\,\frac{\dot\phi\,\dot\rho}{\rho}, \tag{32}$$

که نتیجه میدهد

$$a_\phi = 0. \tag{33}$$

حرکت ِ سیارات در مدار ِ خُرشید به این شکل است.