

1 سینماتیک با مختصات ی جز مختصات دگرتهی

در بررسی ی حرکت بر دایره، جا ی ذره با مختصه ی زاویئی ی ϕ مشخص شد. این یک حالت خاص استفاده از مختصات ی جز مختصات دگرتهی برا ی بررسی ی حرکت ذره است. مثلن میشود برا ی بررسی ی حرکت یک ذره در یک صفحه مختصات قطبی را به کار برد. رابطه ی مختصات قطبی ی (ρ, ϕ) با مختصات دگرتهی ی (x, y) چنین است.

$$x = \rho \cos \phi. \quad (1)$$

$$y = \rho \sin \phi. \quad (2)$$

ρ فاصله تا مبدئ، و ϕ زاویه ی بردار مکان با نیمه ی مثبت محور x است. بردار مکان میشود

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} x + \hat{\mathbf{y}} y. \quad (3)$$

یا

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}} (\rho \cos \phi) + \hat{\mathbf{y}} (\rho \sin \phi). \quad (4)$$

$\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ ثابت ند. پس اگر از بردار مکان نسبت به x و y مشتق بگیرم، بردارها-ی-پایه ی $\hat{\mathbf{x}}$ و $\hat{\mathbf{y}}$ به دست میآیند:

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}. \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}. \quad (6)$$

همین کار را با مختصات قطبی تکرار میکنم. تعریف میکنم

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}. \quad (7)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}. \quad (8)$$

دید می‌شود

$$e_1 = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi. \quad (9)$$

$$e_2 = \rho(-\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi). \quad (10)$$

هر-دُی این بردارها یک‌ه نیستند:

$$|e_1| = 1. \quad (11)$$

$$|e_2| = \rho. \quad (12)$$

$\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ را یک‌ه-شده ی، به ترتیب، e_1 و e_2 تعریف می‌کنم:

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi. \quad (13)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi. \quad (14)$$

$\hat{\rho}$ بردار یک‌ه شعاعی (در جهت افزایش فاصله از مبدا)، و $\hat{\phi}$ بردار یک‌ه سمتی (در جهت افزایش زاویه با نیمه ی مثبت محور افقی) است. بردار مکان، بر حسب مختصات قطبی و بردارها-ی-پایه ی قطبی چنین می‌شود.

$$r = \rho \hat{\rho}. \quad (15)$$

یک نکته ی مهم این است که

$$r \neq \rho \hat{\rho} + \phi \hat{\phi}. \quad (16)$$

با استفاده از (4) یا (15)، می‌شود سرعت و شتاب را حساب کرد. در استفاده از (15)، باید به این

توجه کرد که $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ ، برخلاف \hat{x} و \hat{y} ثابت نیستند. با استفاده از (13) و (14)،

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi}(-\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi), \quad (17)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = \dot{\phi}(-\hat{x} \cos \phi - \hat{y} \sin \phi), \quad (18)$$

که نتیجه میدهند

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (19)$$

$$\frac{d\hat{\phi}}{dt} = -\dot{\phi} \hat{\rho}. \quad (20)$$

به این ترتیب سرعت میشود

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \\ &= \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dt}, \end{aligned} \quad (21)$$

یا

$$\mathbf{v} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\phi} \hat{\phi}. \quad (22)$$

شتاب هم میشود

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \\ &= \ddot{\rho} \hat{\rho} + \dot{\rho} \frac{d\hat{\rho}}{dt} + \dot{\rho} \dot{\phi} \hat{\phi} + \rho \ddot{\phi} \hat{\phi} + \rho \dot{\phi} \frac{d\hat{\phi}}{dt}, \end{aligned} \quad (23)$$

یا

$$\mathbf{a} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \hat{\phi}. \quad (24)$$

برخلاف مختصات دگرگونی، این که مشتق دوم مختصات نسبت به زمان صفر باشد شرط لازم یا کافی برای این که شتاب صفر باشد نیست. برای این د مثال میزنم.

1.1

مختصات قطبی ی یک ذره چنین است.

$$\rho = (D^2 + u^2 t^2)^{1/2}. \quad (25)$$

$$\phi = \phi_0 + \tan^{-1} \frac{ut}{D}. \quad (26)$$

ϕ_0 ثابت است. u و D هم ثابتها بی مثبت نند. دیده میشود

$$\dot{\rho} = (D^2 + u^2 t^2)^{-1/2} u^2 t. \quad (27)$$

$$\dot{\phi} = (D^2 + u^2 t^2)^{-1} D u. \quad (28)$$

$$\ddot{\rho} = (D^2 + u^2 t^2)^{-3/2} D^2 u^2. \quad (29)$$

$$\ddot{\phi} = -2(D^2 + u^2 t^2)^{-2} D u^3 t. \quad (30)$$

با جاگذاری دیده میشود

$$v = u. \quad (31)$$

$$a = 0. \quad (32)$$

میشود دید مسیر این ذره یک خط راست است. (لطفن این را نشان دهید و بردار سرعت ذره را حساب کنید. یک راه این است که معادله حرکت را بر حسب مختصات دگرته بنویسید.) اینجا مشتقهای دوم مختصات قطبی نسبت زمان صفر نیستند، اما شتاب صفر است.

1.2

مختصات قطبی یک ذره چنین است.

$$\rho = R. \quad (33)$$

$$\phi = \phi_0 + \omega t. \quad (34)$$

ϕ_0 ثابت است. R و ω ثابتها بی مثبت نند. دیده میشود

$$\dot{\rho} = 0. \quad (35)$$

$$\dot{\phi} = \omega. \quad (36)$$

$$\ddot{\rho} = 0. \quad (37)$$

$$\ddot{\phi} = 0. \quad (38)$$

با جاگذاری دیده میشود

$$\mathbf{v} = R\omega \hat{\phi}. \quad (39)$$

$$v = R\omega. \quad (40)$$

$$\mathbf{a} = (-R\omega^2) \hat{\rho}. \quad (41)$$

این یک حرکت بر دایره با سرعت زاویئی ثابت است. اینجا مشتقها ی دوم مختصات قطبی نسبت زمان صفر ند، اما شتاب صفر نیست.