1 مسیرِ حرکت

مکانِ یک ذره در زمانِ t بردارِ $\boldsymbol{r}(t)$ است. سرعتِ این ذره مشتقِ مکان است:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}. \tag{1}$$

$(\delta\, s)$، مسافت ی که ذره از t تا $(t+\delta\, t)$ میپیماید، طولِ بخش ی از مسیرِ حرکت است که بینِ $\boldsymbol{r}(t)$ و $\boldsymbol{r}(t+\delta\,\delta)$ است. این طول، تا مرتبه یِ یک نسبت به $(\delta\, t)$ با طولِ پاره-خط ی که $\boldsymbol{r}(t)$ را به $\boldsymbol{r}(t+\delta\,\delta)$ وصل میکند. برابر است:

$$\delta\, s = |\boldsymbol{r}(t+\delta\,\delta) - \boldsymbol{r}(t)| + o(\delta\, t). \tag{2}$$

$o(h)$ کمیت ی ست که سرعتر از h به صفر میگراید، یعنی نسبتِ آن به h به صفر میگراید. از تعریفِ مشتق معلوم است که

$$\boldsymbol{r}(t+\delta\,\delta) - \boldsymbol{r}(t) = [\boldsymbol{v}(t)]\,(\delta\, t) + o(\delta\, t). \tag{3}$$

به این ترتیب، وقت ی $(\delta\, t)$ مثبت است،

$$\delta\, s = |\boldsymbol{v}(t)|\,(\delta\, t) + o(\delta\, t). \tag{4}$$

دُ-طرف را به $(\delta\, t)$ تقسیم میکنم و $(\delta\, t)$ را به صفر میل میدهم. نتیجه میشود

$$\dot{s} = |\boldsymbol{v}|. \tag{5}$$

مشتقِ مسافت نسبت به زمان اندازه یِ سرعت است. توجه به این نکته مهم است که در حالتِ کلی اندازه یِ جا-به-جایی بینِ دُ زمان، با مسافتِ پیموده-شده بینِ این دُ-زمان برابر نیست: اولی طولِ پاره-خط ی ست که دُ نقطه از مسیر را به هم وصل میکند. دومی طولِ بخش ی از مسیر است که بینِ آن دُ-نقطه است. اولی از دومی کوچکتر است، مگر مسیر یک خطِ راست باشد. اما اگر دُ-نقطه به هم نزدیک شوند، اختلافِ این دُ-کمیت سرعتر از اختلافِ زمانِ بینِ این دُ-نقطه صفر میشود، یعنی حدِ اختلافِ این دُ-کمیت تقسیم بر اختلاف-ِ-زمان، وقت ی اختلاف-ِ-زمان به صفر میگراید صفر است.

بردارِ سرعت را (مثلِ هر بردارِ دیگری) میشود بر حسبِ طولَش و یک بردارِ یکه نوشت:

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\,\hat{\boldsymbol{\tau}}. \tag{6}$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$ یکه‌-شده یِ بردارِ سرعت است و مماس بر مسیرِ حرکت است. در هر نقطه یِ مسیر، دُ جهتِ مخالف-ِ-هم برا یِ مماس بر مسیر ممکن است. $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ همجهت با $\boldsymbol{v}$ است، یعنی در جهتِ حرکت است.
از (1) و (5) و (6) دیده میشود

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}. \tag{7}$$

یا،

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,s}. \tag{8}$$

این رابطه، بر خلافِ مثلَن رابطه یِ (1)، به این وابسته نیست که مسیر کند یا تند پیموده شود: برا یِ دُ ذره که بر مسیرِ یکسان ی حرکت میکنند، اما احتمالَن سرعتِ شان یکسان نیست، دُ-طرفِ این رابطه یکسان است. تنها-شرط این است که جهتِ حرکتِ این دُ-ذره یکسان باشد. مماس بر مسیر به اندازه یِ سرعتِ ذره بستگی ندارد.

مشتقِ سرعت شتاب است:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\,t}, \\ &= \frac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\boldsymbol{\tau}} + |\boldsymbol{v}|\,\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,t}. \end{aligned} \tag{9}$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$ طولَش ثابت است، چون یکه است. پس مشتقَش بر خُدَش عمود است:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}\,(\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\mathrm{d}\,t}, \\ &= 2\,\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,t}. \end{aligned} \tag{10}$$

با مشتقِ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ یک بردارِ یکه یِ دیگر میسازم. این بردار ($\hat{\boldsymbol{n}}$) را یکه-شده یِ مشتقِ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ نسبت به s تعریف میکنم:

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,s} = \left|\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,s}\right|\,\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{11}$$

بعد ُ مشتق ِ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ نسبت به s(و البته بعد ِ اندازه یِ این کمیت) عکس ِ طول است. اندازه یِ مشتق ِ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ نسبت به s را با $(1/R)$ نشان میدهم. رُشن است که بعد ِ R طول است. به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,s} = \frac{1}{R}. \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\,\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}\,s},$$
$$= \frac{|\boldsymbol{v}|}{R}\,\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{13}$$

پس شتاب چنین میشود

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{R}\,\hat{\boldsymbol{n}}. \tag{14}$$

دیده میشود شتاب دُ مئلفه دارد. مئلفه یِ مماس-بر-مسیر ِ شتاب مشتق ِ اندازه یِ سرعت است. مئلفه یِ عمود-بر-مسیر ِ شتاب هم مجذور ِ سرعت تقسیم بر یک کمیت از جنس ِ طول است. مقایسه یِ این رابطه با شتاب در حرکت ِ بر دایره نشان میدهد در هر نقطه یِ مسیر، حرکت ِ ذره تا حد ِ مشتق ِ دوم مثل ِ حرکت بر یک دایره است. دایره ای که شعاع َ ش R است، صفحه اَ ش شامل ِ بردارها یِ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ و $\hat{\boldsymbol{n}}$ است، و مرکز َ ش $(\boldsymbol{r} + R\,\hat{\boldsymbol{n}})$ است، چنان که مئلفه یِ عمودی یِ شتاب به سو یِ مرکز ِ این دایره است. فرق ِ حرکت ِ کلی با حرکت بر دایره این است که در حالت ِ کلی مشخصات ِ این دایره (صفحه، مرکز، شعاع) ثابت نیست و متناظر با هر نقطه بر مسیر یک دایره هست، اما در حرکت-بر-دایره دوایر ی که متناظر با هر نقطه به دست میئایند یکسان َ ند.

دایره ای که متناظر با هر نقطه از مسیر ساخته میشود هم هندسی ست، یعنی به فقط مسیر بستگی دارد و مستقل از آن است که ذره با چه سرعت ی بر مسیر حرکت میکند. به R شعاع ِ انحنا و به $\hat{\boldsymbol{n}}$ قائم ِ اصلی میگویند. قائم ِ اصلی به این خاطر که در هر نقطه یِ یک مسیر (خم) در یک فضا یِ سه-بُعدی یک صفحه هست که بر خم (بردار ِ مماس-بر-خم) در آن نقطه عمود است. پس عمود-بر-خم، بر خلاف ِ مماس-بر-خم، یکتا نیست. $\hat{\boldsymbol{n}}$ آن بردار ِ عمود-بر-خم است که در صفحه یِ شامل ِ سرعت و شتاب است.

به عنوان ِ یک مثال، سقوط ِ آزاد ِ یک ذره نزدیک ِ سطح ِ زمین و در یک ناحیه یِ کوچک (در مقایسه با زمین) را در نظر بگیرید. محور ِ y را عمودی و رو-به-بالا میگیرم. صفحه یِ $x - y$ را هم

چنان میگیرم که حرکت در این صفحه باشد. معادله یِ حرکت میشود

$$\boldsymbol{r} = (x_0 + v_{x\,0}\,t)\,\hat{\boldsymbol{x}} + \left(y_0 + v_{y\,0}\,t - \frac{g\,t^2}{2}\right)\,\hat{\boldsymbol{y}}. \qquad (15)$$

سرعت چنین میشود

$$\boldsymbol{v} = v_{x\,0}\;\hat{\boldsymbol{x}} + (v_{y\,0} - g\,t)\;\hat{\boldsymbol{y}}. \qquad (16)$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}$ یکه-شده یِ $\boldsymbol{v}$ است:

$$|\boldsymbol{v}| = [(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{1/2}. \qquad (17)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = [(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{-1/2}\,[v_{x\,0}\,\hat{\boldsymbol{x}} + (v_{y\,0} - g\,t)\,\hat{\boldsymbol{y}}]. \qquad (18)$$

همچنین،

$$\frac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}\,t} = -g\,(v_{y\,0} - g\,t)\,[(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{-1/2}. \qquad (19)$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}
\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{R}\,\hat{\boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{a} - \frac{\mathrm{d}\,|\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}\,t}\,\hat{\boldsymbol{\tau}},\\
&= -g\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{g\,(v_{y\,0} - g\,t)\,[v_{x\,0}\,\hat{\boldsymbol{x}} + (v_{y\,0} - g\,t)\,\hat{\boldsymbol{y}}]}{(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2},\\
&= \frac{g\,v_{x\,0}\,[(v_{y\,0} - g\,t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - v_{x\,0}\,\hat{\boldsymbol{y}}]}{(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2}. \qquad (20)
\end{aligned}$$

در نتیجه (با فرضِ این که $v_{x\,0}$ مثبت است)،

$$\hat{\boldsymbol{n}} = [(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{-1/2}\,[(v_{y\,0} - g\,t)\,\hat{\boldsymbol{x}} - v_{x\,0}\,\hat{\boldsymbol{y}}]. \qquad (21)$$

$$\frac{|\boldsymbol{v}|^2}{R} = [(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{-1/2}\,g\,v_{x\,0}. \qquad (22)$$

$$R = \frac{[(v_{x\,0})^2 + (v_{y\,0} - g\,t)^2]^{3/2}}{g\,v_{x\,0}}. \qquad (23)$$

دیده میشود $\hat{\boldsymbol{n}}$ بر $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ عمود است، چنان که باید.

در بالاترین نقطه یِ مسیر،

$$v_{y\,0} - g\,t = 0. \tag{24}$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\boldsymbol{x}}. \tag{25}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = -\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{26}$$

$$R = \frac{(v_{x\,0})^2}{g}. \tag{27}$$